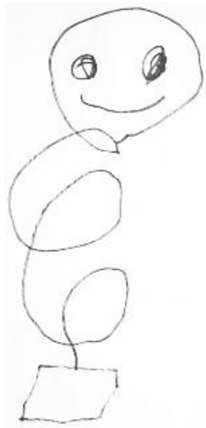
材料力学（後半）(Strength of Materials)

大阪大学大学院工学研究科知能・機能創成工学専攻マイクロダイナミクス研究室
中 谷 彰 宏　nakatani@ams.eng.osaka-u.ac.jp (M4-303)
http://www.md.ams.eng.osaka-u.ac.jp/

0　材料力学を通じて学ぶこと

- 考え方がわかるだけではダメです．表向きの計算法としての考え方はそれほど難しくないです．間違えなく最後まで計算して答えを出すまでの根気を身につけることも大切です．
- 様々な問題を実際に最後まで解いてみることを通じて，はじめてエンジニアの感性を養うことができると思ってください．両辺の単位とか次元とかに気を配るなど重要です．ケアレスミスがとんでもない大事故につながるという緊張感も社会に出たら大切になります．
- 公式の丸暗記はだめですが，意味を理解した上で，素養として，すぐ答えを出せる道具として公式を覚えることも重要です．また，力の流れ，変形のイメージができることも必要です．
- 材料力学は，新しい学問体系 (例えばナノテクノロジー) にきっと役に立ちます．
- 理論応用力学 (Theoretical and Applied Mechanics) の基礎としての考え方の宝庫であり，数学，物理学などとも密接に関係しています．
- 材料力学史．先人の苦悩やひらめきを知るとともに工学の今後の有り方の道標をみるという長期的な視点も重要です．
- その他，ユニークな意見，諸君より募集中です!!



■ 材料力学の歴史って古いね ■

Galileo Galilei (1564-1642)
Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuoue scienze.
Leiden: appresso gli Elsevirii, 1638.

Hammurabi's Code of Laws
[229] If a builder build a house for some one, and does not construct it properly, and the house which he built fall in and kill its owner, then that builder shall be put to death.
(ハムラビ法典, 第 229 条，B.C. 1770 ごろ)
製造物責任法 (PL 法) は 4000 年の歴史!!

1　不静定と静定は何が違うの？

2 エネルギー法とその応用 (1)

2.1 ひずみエネルギー密度

応力成分 (stress components) $\sigma_x, \sigma_y, \cdots, \tau_{xy}$ は，ある**基準状態** (reference state) からの**変形** (deformation) により生じた**ひずみ** (strain)$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \cdots, \gamma_{xy}$ の関数で一意に表されるとしよう．

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \sigma_x(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \cdots, \gamma_{xy}) \\
\sigma_y &= \sigma_y(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \cdots, \gamma_{xy}) \\
&\cdots \\
\tau_{xy} &= \tau_{xy}(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \cdots, \gamma_{xy})
\end{aligned} \tag{1}$$

考えている**物体点** (material point) の**ひずみエネルギー密度** (strain energy density; 単位体積あたりにたくわえられるひずみエネルギー) U_0 は，やはり，ひずみの関数で，

$$U_0(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \cdots, \gamma_{xy}) = \int_{(0,0,\cdots,0)}^{(\varepsilon_x,\varepsilon_y,\cdots,\gamma_{xy})} (\sigma_x \mathrm{d}\varepsilon_x + \sigma_y \mathrm{d}\varepsilon_y + \cdots + \tau_{xy} \mathrm{d}\gamma_{xy}) \tag{2}$$

この式の被積分関数の $\sigma_x, \cdots$ は，最終値 (定数) ではなく，負荷経路上で変化する途中のひずみに対応して変化することに注意しよう．なお，この式，物体点まわりに微小直方体を考え，その表面にはたらく応力がする仕事を考えれば導くことができるのだけれどわかるかな？

と書くことができます．弾性体の場合には，内部の状態は履歴に依存しないので，U_0 は**状態量** (state value) となり基準状態と最終の応力・ひずみ状態のみによって決まり，途中の負荷経路によりません．そのような場合，

$$U_0 = \int_{(0,0,\cdots,0)}^{(\varepsilon_x,\varepsilon_y,\cdots,\gamma_{xy})} \mathrm{d}U_0 = \int_{(0,0,\cdots,0)}^{(\varepsilon_x,\varepsilon_y,\cdots,\gamma_{xy})} \left\{ \left(\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_x}\right) \mathrm{d}\varepsilon_x + \left(\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_y}\right) \mathrm{d}\varepsilon_y + \cdots + \left(\frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{xy}}\right) \mathrm{d}\gamma_{xy} \right\} \tag{3}$$

であるので，

$$\sigma_x = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_x},\ \sigma_y = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_y},\ \cdots,\ \tau_{xy} = \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{xy}} \tag{4}$$

となります．

2.2 コンプリメンタリーひずみエネルギー密度

今度は，ひずみ成分 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \cdots, \gamma_{xy}$ が，応力 $\sigma_x, \sigma_y, \cdots, \tau_{xy}$ の関数として表されると考えよう．

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \varepsilon_x(\sigma_x, \sigma_y, \cdots, \tau_{xy}) \\
\varepsilon_y &= \varepsilon_y(\sigma_x, \sigma_y, \cdots, \tau_{xy}) \\
&\cdots \\
\gamma_{xy} &= \gamma_{xy}(\sigma_x, \sigma_y, \cdots, \tau_{xy})
\end{aligned} \tag{5}$$

コンプリメンタリーひずみエネルギー密度 (complementary strain energy density; 単位体積あたりにたくわえられるひずみエネルギー) U_{c0} は，やはり，応力の関数で，

$$U_{c0}(\sigma_x, \sigma_y, \cdots, \tau_{xy}) = \int_{(0,0,\cdots,0)}^{(\sigma_x,\sigma_y,\cdots,\tau_{xy})} (\varepsilon_x \mathrm{d}\sigma_x + \varepsilon_y \mathrm{d}\sigma_y + \cdots + \gamma_{xy} \mathrm{d}\tau_{xy}) \tag{6}$$

と書くことができる弾性体の場合には，内部の状態は履歴に依存しないので，U_{c0} は状態量となり，その値は，基準状態と最終の応力・ひずみ状態のみによって決まり，途中の負荷経路によらないことがわかります．

$$U_{c0} = \int_{(0,0,\cdots,0)}^{(\sigma_x,\sigma_y,\cdots,\tau_{xy})} \mathrm{d}U_{c0} = \int_{(0,0,\cdots,0)}^{(\sigma_x,\sigma_y,\cdots,\tau_{xy})} \left\{ \left(\frac{\partial U_{c0}}{\partial \sigma_x}\right) \mathrm{d}\sigma_x + \left(\frac{\partial U_{c0}}{\partial \sigma_y}\right) \mathrm{d}\sigma_y + \cdots + \left(\frac{\partial U_{c0}}{\partial \tau_{xy}}\right) \mathrm{d}\tau_{xy} \right\} \tag{7}$$

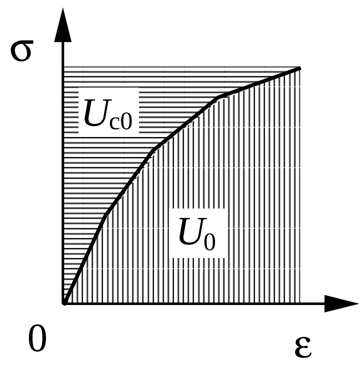


図 1: 応力ひずみ関係とひずみエネルギー密度，コンプリメンタリーひずみエネルギー密度

であるので，

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U_{c0}}{\partial \sigma_x},\ \varepsilon_y = \frac{\partial U_{c0}}{\partial \sigma_y},\ \cdots,\ \gamma_{xy} = \frac{\partial U_{c0}}{\partial \tau_{xy}} \tag{8}$$

となります．

$$U_0 + U_{c0} = \sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \cdots\tau_{xy}\gamma_{xy} \tag{9}$$

であることがわかります．図 2 に，U_0 と U_{c0} の関係を模式的に示します．

2.3 線形弾性体の場合

応力とひずみが線形関係にある**線形弾性体** (linear elastic body) ときを考え，ひずみエネルギー密度，コンプリメンタリーひずみエネルギー密度は共に状態量なので，負荷経路に依存しないので，簡単のために**比例負荷** (proportional loading) を考えてみよう．$(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \cdots, \gamma_{xy})$ がひずみの最終値を意味し，$(\sigma_x, \sigma_y, \cdots, \tau_{xy})$ が応力の最終値を意味するとすると，パラメーター λ(ただし，$0 \le \lambda \le 1$) を用いて，変形途中のひずみ成分と応力成分は，それぞれ，$(\lambda\varepsilon_x, \lambda\varepsilon_y, \cdots, \lambda\gamma_{xy})$, $(\lambda\sigma_x, \lambda\sigma_y, \cdots, \lambda\tau_{xy})$ と書くことができます．

$$\begin{aligned} U_0(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \cdots, \gamma_{xy}) &= (\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \cdots + \tau_{xy}\gamma_{xy}) \int_0^1 \lambda \mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \cdots + \tau_{xy}\gamma_{xy}) \end{aligned} \tag{10}$$

(11)

$$\begin{aligned} U_{c0}(\sigma_x, \sigma_y, \cdots, \tau_{xy}) &= (\varepsilon_x\sigma_x + \varepsilon_y\sigma_y + \cdots + \gamma_{xy}\tau_{xy}) \int_0^1 \lambda \mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{2}(\varepsilon_x\sigma_x + \varepsilon_y\sigma_y + \cdots + \gamma_{xy}\tau_{xy}) \end{aligned} \tag{12}$$

(13)

となり，

$$U_0 = U_{c0} \tag{14}$$

となります[*1]

具体的に**縦弾性係数**; **ヤング率** (modulus of longitudinal elasticity; Young's modulus)E, **ポアソン比** (Poisson's ratio)ν で表される等方弾性体に対しては，**一般化されたフックの法則** (generalized Hooke's law) を代入すると, E, ν および**横弾性係数;せん断弾性率** (modulus of transverse elasticity; shear modulus) を用いて，以下のように表現することができます．これらの導出は諸君の腕力にまかせます.

$$U_0 = \frac{E\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)^2 + G(\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2+\varepsilon_z^2) + \frac{G}{2}(\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2+\gamma_{xy}^2) \tag{15}$$

$$U_{c0} = \frac{1}{2E}\left\{(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)^2 + 2(1+\nu)(\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2+\tau_{xy}^2-\sigma_y\sigma_z-\sigma_z\sigma_x-\sigma_x\sigma_y)\right\} \tag{16}$$

2.4 ひずみエネルギーとコンプリメンタリーひずみエネルギー

物体点のひずみエネルギー密度 U_0(単位体積あたりのひずみエネルギー) は，位置の関数 (場の量) でです．これを構造全体 (領域 Ω とする) にわたって積分 (体積積分) すると**ひずみエネルギー** (strain energy) が得られます.

$$U = \int_\Omega U_0 \mathrm{d}V \tag{17}$$

コンプリメンタリーひずみエネルギー (complementary strain energy) についても同様に,

$$U_c = \int_\Omega U_{c0} \mathrm{d}V \tag{18}$$

と書き表すことができます.

2.5 棒・軸・はりのひずみエネルギー

材料力学で扱う **棒** (bar)，**軸** (shaft)，**はり** (beam) の変形体力学は，軸線の力学であり，解析では軸線に沿った座標位置 x のみの関数として扱います.

さて，軸方向の引張または圧縮荷重，はりの曲げ，はりのせん断に対してひずみエネルギーは次のように簡単になります.

$$\begin{aligned} U &= \iiint_\Omega (\sigma_x\varepsilon_x + \tau_{xy}\gamma_{xy})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \iiint_\Omega \frac{{\sigma_x}^2}{2E}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint_\Omega \frac{{\tau_{xy}}^2}{2G}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= (\text{はりの曲げや軸荷重に対するもの}) + (\text{はりのせん断に対するもの}) \end{aligned} \tag{19}$$

[*1] このように，ひずみエネルギー密度とコンプリメンタリーひずみエネルギー密度が線形弾性体において等しいことがわかります．しかしながら，数式上で両者を同じものとして扱うと見掛け上簡単になったように見えますが，たとえば，色のついた物体をモノクロで撮影して元の色は何色？という問いをイメージしてもらえればわかりますが，正しい理解が難しくなってしまう場合が多々あるのではないでしょうか．つまり背景となっている独立変数が，幾何学量であるひずみと力学量である応力では両者は全く異なっている点に注意する必要があります．**非線形弾性体** (nonlinear elastic body) では両者は異なるので区別して扱う必要がでてくるのは容易に理解できますが，線形弾性体でもエネルギー原理を詳細に議論する場合にはこのようなことに注意する必要がでてくることを覚えておこう.

■ 材料力学（軸線の力学）は基礎それとも応用？ ■

軸線の力学では，適切な仮定を持ち込んで，断面の形状など様々な三次元の情報を実に巧妙なやりかたで一次元に圧縮して取り込んでいます．そのため材料力学のモデルは数理的な難しさを伴っているのです．だから，**一般化力** (generalized force) と**一般化変位** (generalized displacement) というような扱いが必要となるのです．一般の**固体力学** (solid mechanics)(例えば**弾性力学** (theory of elasticity) もその一つ) では，物体は三次元として直接モデル化されます．そのような問題では数学的な厳密解を得ることは困難になりますが，物体点の数学的な構造はむしろ材料力学に比べてはるかに単純です．なので中谷彰宏の個人的主観ではありますが，材料力学は本来奥が深く理解が難しくてあたりまえなのです．例えば，最近，ナノテクなどで再び注目されている**一般化連続体力学** (generalized continuum mechanics) はこのような材料力学で先人の英知として体系化されている軸線の力学における高次の数理理論を再び三次元に展開したものと解釈することができるのです．

■軸方向荷重を受ける棒のひずみエネルギー　軸線上の座標 x の断面積 $A(x) \equiv \iint \mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 長さ l の棒が，軸力 $P(x)$ のみを受けている場合を考えます．このとき，軸方向応力は $\sigma_x(x) = P(x)/A(x)$, 軸方向ひずみは $\varepsilon_x(x) = \sigma_x(x)/E(x) = P(x)/\{E(x)A(x)\}$ となります．以下，簡単のため関数の引数 “(x)” は省略して表記します．

ひずみエネルギーと書いているがじつはコンプリメンタリーひずみエネルギーと考えるべきです．

$$U = \int \frac{{\sigma_x}^2}{2E}\mathrm{d}V = \int \frac{P^2}{2EA^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^l \frac{P^2}{2EA^2}\left[\iint \mathrm{d}y\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x = \int_0^l \frac{P^2}{2EA}\mathrm{d}x \tag{20}$$

$x = 0$ で固定されているとすると，棒ののび (すなわち $x = l$ での変位)u は,

ひずみは変位のこう配, ひずみを積分して変位を得るためにはどこを固定するかを決めないと積分定数の値が決まらない.

$$u = \int_0^l \varepsilon_x dx = \int_0^l \frac{P}{EA}\mathrm{d}x \tag{21}$$

となります．次に，もし外力として，引張荷重 P が $x = l$ のみに作用している場合には，軸力は $P(x) = P$ でいたるところ一定であり，

← P が $x = l$ のみに作用

$$U = \int_0^l \frac{P^2}{2EA}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}P\int_0^l \frac{P}{EA}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}Pu \tag{22}$$

です．加えて，断面積，ヤング率もそれぞれ一定，$A(x) = A, E(x) = E$ であるとき，

← P が $x = l$ のみに作用し，さらに，E, A も一定

$$U = \frac{P^2 l}{2EA} \tag{23}$$

となります．この場合にも，当然，式 (22) の最後の関係 $U = Pu/2$ が成立します．

■曲げを受けるはりのひずみエネルギー 軸線上の座標 x の断面二次モーメント $I(x) \equiv \iint y^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 長さ l の棒が，曲げモーメント $M(x)$ のみを受けている場合を考えよう．このとき，断面内の軸方向応力は $\sigma_x(x, y) = M(x)y/I(x)$ で分布しています．軸方向ひずみは $\varepsilon_x(x) = \sigma_x(x)/E(x) = M(x)y/\{E(x)I(x)\}$ となります．以下，簡単のため関数の引数 "(x)" は省略して表記します．

$$
\begin{aligned}
U &= \int \frac{{\sigma_x}^2}{2E}\mathrm{d}V = \int \frac{M^2y^2}{2EI^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \int_0^l \frac{M^2}{2EI^2}\left[\iint y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x = \int_0^l \frac{M^2}{2EI}\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{24}
$$

$x = 0$ でたわみ角零で固定されている片持ちはりとすると，はりの自由端 $(x = l)$ でのたわみ角 θ は,

$$
\theta = -\int_0^l \frac{1}{\rho}dx = \int_0^l \frac{M}{EI}\mathrm{d}x \tag{25}
$$

となります．次に，もし外力として，曲げモーメント M が $x = l$ のみに作用している場合には，はりの曲げモーメントは $M(x) = M$ でいたるところ一定であり，

← M が $x = l$ のみに作用

$$
U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}M\int_0^l \frac{M}{EI}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}M\theta \tag{26}
$$

です．加えて，断面二次モーメント，ヤング率もそれぞれ一定，$I(x) = I, E(x) = E$ であるとき，

← M が $x = l$ のみに作用し，さらに，E, I も一定

$$
U = \frac{M^2 l}{2EI} \tag{27}
$$

となります．この場合にも，当然，式 (26) の最後の関係 $U = M\theta/2$ が成立します．

■ねじりを受ける棒のひずみエネルギー 軸線上の座標 x で中実の直径 $a(x)$ の円形断面を有する棒のの断面二次極モーメント $I_\mathrm{p}(x) \equiv \int_0^{a(x)} r^2(2\pi r)\mathrm{d}r$ 長さ l の棒が，ねじりモーメント $T(x)$ のみを受けている場合を考えよう．このとき，中心軸から r の位置でのせん断応力は $\tau(x, r) = T(x)r/I_\mathrm{p}(x)$ で分布しています．対応するせん断ひずみは $\gamma(x, r) = \tau(x, r)/G(x) = T(x)r/\{G(x)I_\mathrm{p}(x)\}$ となります．以下，簡単のため関数の引数 "(x)" は省略して表記しています．

$$
\begin{aligned}
U &= \int \frac{\tau^2}{2G}\mathrm{d}V = \int_0^l \int_0^{a(x)} \frac{T^2r^2}{2G{I_\mathrm{p}}^2}(2\pi r)\mathrm{d}r\mathrm{d}x \\
&= \int_0^l \frac{T^2}{2G{I_\mathrm{p}}^2}\left[\int r^2(2\pi r)\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}x = \int_0^l \frac{T^2}{2GI_\mathrm{p}}\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{28}
$$

棒が $x = 0$ でねじれ角零で固定されているとすると，棒の自由端 $(x = l)$ でのねじれ角 ϕ は，比ねじれ角 (単位長さあたりのねじれ角)θ の積分として，

$$
\phi = \int_0^l \theta\mathrm{d}x = \int_0^l \frac{T}{GI_\mathrm{p}}\mathrm{d}x \tag{29}
$$

となります．次に，もし外力として，ねじりモーメント T が $x = l$ のみに作用している場合には，棒のねじりモーメントは $T(x) = T$ でいたるところ一定であり，

← T が $x = l$ のみに作用

$$
U = \int_0^l \frac{T^2}{2GI_\mathrm{p}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}T\int_0^l \frac{T}{GI_\mathrm{p}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}T\phi \tag{30}
$$

です．加えて，断面二次極モーメント，せん断弾性率もそれぞれ一定，$I_\mathrm{p}(x) = I_\mathrm{p}, G(x) = G$ であるとき，

$$U = \frac{T^2 l}{2GI_\mathrm{p}} \tag{31}$$

← T が $x = l$ のみに作用し，さらに，G, I_p も一定

となります．この場合にも，当然，式 (30) の最後の関係 $U = T\phi/2$ が成立します．

2.5.1 エネルギー保存則 (クラペイロンの定理)

式 (22)，式 (26)，式 (30) を見ると

$$U = \int_0^l \frac{P^{*2}}{2E^*A^*}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}P^*u^* \tag{32}$$

のように形式的に似た形をしていることに気がつくでしょう．そして，下表のように考えれば，式 (32) の形で記述できることがわかります．

一般化力 P^*	一般化変位 u^*	一般化剛性 E^*A^*
軸力 P	のび u	引張剛性 EA
曲げモーメント M	たわみ角 θ	曲げ剛性 EI
ねじりモーメント T	ねじれ角 ϕ	ねじり剛性 GI_p

式 (32) の $\int_0^l P^{*2}/(2E^*A^*)\mathrm{d}x$ は内部仕事，$(1/2)P^*u^*$ は外力による仕事を表しており，両者の等価性は次の定理によってまとめられます．

ここで，一般化力 P^* と一般化変位 u^* は最終値を意味し，無ひずみからの変化では，共に零からこの値まで線形関係を保ちながら変化するため 1/2 がつきます．

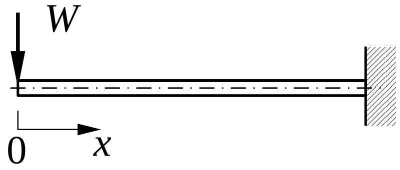
クラペイロンの定理 (Clapayron's theorem)

外力とその着力点の外力の方向の変位成分との積の総和は，ひずみエネルギーの 2 倍に等しい．言い換えると，弾性体に加えられる仕事は，たくわえられるひずみエネルギーに等しい．

これは，断熱過程における熱力学第一法則 (エネルギー保存則) を意味します．

[例題 1.1]

図のような自由端に集中荷重 W を受ける，長さ l，曲げ剛性 EI の片持ちはりの荷重作用点でのたわみ値をクラペイロンの定理 (エネルギー保存則) を利用して求めてみよう．



.... (解) ....

曲げモーメント分布は，

$$M(x) = -Wx \tag{33}$$

式 (26) に代入して，ひずみエネルギー U を求めると，

$$U = \frac{1}{2EI}\int_0^l (-Wx)^2 \mathrm{d}x = \frac{W^2 l^3}{6EI} \tag{34}$$

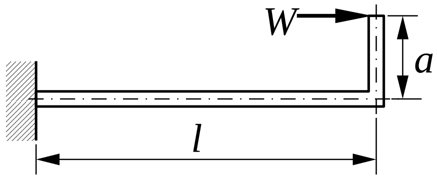
荷重作用点のたわみを δ とし，クラペイロンの定理 (エネルギー保存則) により，外力のする仕事 $(1/2)W\delta$ と等しいと置くと，

$$\delta = \frac{Wl^3}{3EI} \tag{35}$$

を得ます． ⊠

[例題 1.2]

図のように鉛直面内で直角に折れ曲がった片持の棒の自由端に水平荷重 W が作用するとき，自由端の水平変位量をクラペイロンの定理 (エネルギー保存則) を利用して求めよう．ただし棒の水平部材と鉛直部材の曲げ剛性はともに EI とし，両部材の曲げ変形の影響のみを考慮して，のび変形およびせん断変形の影響は無視するものとします．



……(解)……

鉛直部材のひずみエネルギー U_1 は [例題 1.1] の結果を用いて，

$$U_1 = \frac{W^2 a^3}{6EI} \tag{36}$$

です．また，水平部材はのモーメント分布は一様で $M = Wa$ であるので，式 (27) を用いることにより，

$$U_2 = \frac{(Wa)^2 l}{2EI} \tag{37}$$

となります．そこで，自由端の水平変位量を u とすると，クラペイロンの定理 (エネルギー保存則) より，

$$\frac{1}{2}Wu = \frac{W^2 a^3}{6EI} + \frac{(Wa)^2 l}{2EI} \tag{38}$$

ゆえに，

$$u = \frac{Pa^2}{3EI}(a + 3l) \tag{39}$$

となります． ⊠

【演習 1.1】

段付き棒の引っ張り，静定トラス，任意点に集中荷重を受ける片持はりなどの静定問題を考えて，それぞれの問題について，ひずみエネルギーを一般化力で表現してみよう．また，エネルギー保存則を用いて荷重作用点の変位を求めることができるかどうか考えて，求めることができる場合にはその値を求めてみよう．

■ ルジャンドル変換 ■

Legendre
(1752-1833)

固体力学で最も大切な数学の知識といえば,「ガウスの発散定理」だと思うけれども,「ルジャンドル変換」も同じくらい大切です (中谷の個人的主観ですが). 数学者 Legendre(1752-1833) は, 微分方程式の解法にとって重要な変数変換法を見つけました. この変換法は, 優れた性質を持っていることから多くの問題に適用されています. 諸君の知っている身近なところでは, 解析力学でオイラー・ラグランジェの微分方程式をハミルトンの正準方程式に変換するときに使った方法です. 熱力学でもこの変換を意識無意識に関わらずやってるはずです.

n 個の変数の関数

$$F = F(u_1, \cdots, u_n) \tag{40}$$

を考えよう. いま変換,

$$v_i = \frac{\partial F}{\partial u_i}, \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{41}$$

によって, 新しい変数の組 $v_1, \cdots, v_n$ を定義しよう. さらに, 新しい関数 G を,

$$G(u_1, \cdots, u_n, v_1, \cdots, v_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i - F(u_1, \cdots, u_n) \tag{42}$$

により定義します. この全微分は,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}G(u_1, \cdots, u_n, v_1, \cdots, v_n) &= \sum_{i=1}^{n}(u_i \mathrm{d}v_i + v_i \mathrm{d}u_i) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial u_i}\mathrm{d}u_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left\{u_i \mathrm{d}v_i + \left(v_i - \frac{\partial F}{\partial u_i}\right)\mathrm{d}u_i\right\} && (43) \\ & && (44) \end{aligned}$$

いま, v_i の定義から $\mathrm{d}u_i$ の係数は恒等的に零になることがわかります. したがって, G の独立変数は実は $v_1, \cdots, v_n$ のみであり,

$$G = G(v_1, \cdots, v_n) \tag{45}$$

として表されます. 一方,

$$\mathrm{d}G = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial v_i}\mathrm{d}v_i \tag{46}$$

と式 (43) との比較から,

$$u_i = \frac{\partial G}{\partial v_i}, \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{47}$$

なる関係があることがわかります.

ひずみエネルギー密度 U_0 とコンプリメンタリーひずみエネルギー密度 U_{c0} の関係について考えると, 実は, 両者の変換はルジャンドル変換であることがわかります. 以下に結果だけ書いておきます. 面倒なのでテンソル表記とアインシュタインの総和規約を使いますね.

$$\begin{array}{lll} \text{変　数：} & \varepsilon_{ij} & \sigma_{ij} \\ \text{関　数：} & U_0 = U_0(\boldsymbol{\varepsilon}) & U_{c0} = U_{c0}(\boldsymbol{\sigma}) \\ \text{変換則：} & \sigma_{ij} = \dfrac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} & \varepsilon_{ij} = \dfrac{\partial U_{c0}}{\partial \sigma_{ij}} \\ & U_{c0} = \sigma_{ij}\epsilon_{ij} - U_0 & U_0 = \epsilon_{ij}\sigma_{ij} - U_{c0} \end{array} \tag{48}$$

⊠

3 エネルギー法とその応用 (2)

式 (32) の左辺はひずみエネルギーを表しているけれど，ひずみエネルギーとコンプリメンタリーひずみエネルギーを厳密に区別して書くと，前者は u^* の関数，後者は P^* の関数であり，これらのエネルギーが外部仕事に等しいことを記述する関係式は，仕事，コンプリメンタリー仕事の定義にたちもどって考えてみると次のように表わされます．

この式は非線形弾性体でも成り立ちます．

$$U(u^*) = \int_0^{u^*} P^*(u^*)\mathrm{d}u^* \tag{49}$$

$$U_\mathrm{c}(P^*) = \int_0^{P^*} u^*(P^*)\mathrm{d}P^* \tag{50}$$

この問題を，弾性体の N 個の点に，複数の一般化力 P_i^* が作用し，一般化変位 u_i^* が生じている問題に拡張しよう．ここで，$i = 1, 2, \cdots, N$ です．これらの荷重，または，変位が独立であるとき，$P_i^* = P_i^*(u_1^*, u_2^*, \cdots, u_N^*)$，$u_i^* = u_i^*(P_1^*, P_2^*, \cdots, P_N^*)$ と表現できます．このとき，ひずみエネルギーとコンプリメンタリーひずみエネルギーは，

$$U(u_1^*, u_2^*, \cdots, u_N^*) = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{u_i^*} P_i^*(u_1^*, u_2^*, \cdots, u_N^*)\mathrm{d}u_i^* \tag{51}$$

$$U_\mathrm{c}(P_1^*, P_2^*, \cdots, P_N^*) = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{P_i^*} u_i^*(P_1^*, P_2^*, \cdots, P_N^*)\mathrm{d}P_i^* \tag{52}$$

ここで，ひずみエネルギー，コンプリメンタリーひずみエネルギーは状態量なので，$\int \mathrm{d}u_i^*, \int \mathrm{d}P_i^*$ で積分変数となる量以外は終点の値で固定されていると考えることができます．これらの全微分をとると，

この部分は少し丁寧に見ないとわかりにくいかもしれないね．

$$\mathrm{d}U(u_1^*, u_2^*, \cdots, u_N^*) = \sum_{i=1}^{N} P_i^*(u_1^*, u_2^*, \cdots, u_N^*)\mathrm{d}u_i^* \tag{53}$$

$$\mathrm{d}U_\mathrm{c}(P_1^*, P_2^*, \cdots, P_N^*) = \sum_{i=1}^{N} u_i^*(P_1^*, P_2^*, \cdots, P_N^*)\mathrm{d}P_i^* \tag{54}$$

一方，独立変数による偏微分と全微分の関係から，

$$\mathrm{d}U(u_1^*, u_2^*, \cdots, u_N^*) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial u_i^*}\mathrm{d}u_i^*, \qquad \mathrm{d}U_\mathrm{c}(P_1^*, P_2^*, \cdots, P_N^*) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U_\mathrm{c}}{\partial P_i^*}\mathrm{d}P_i^* \tag{55}$$

式 (53) と，式 (55) の第一式が，独立変数の任意の変化について恒等的に等しくなるためには， ← 辺々引き算し，$\mathrm{d}u_i^*$ の係数がゼロになる関係を導く．

$$P_i^* = \frac{\partial U}{\partial u_i^*}, \qquad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{56}$$

この関係を**カスチリアーノの第一定理** (Castigliano's first theorem) といいます．また，式 (54) と，式 (55) の第二式が，独立変数の任意の変化について恒等的に等しくなるためには， ← 辺々引き算し，$\mathrm{d}P_i^*$ の係数がゼロになる関係を導く．

$$u_i^* = \frac{\partial U_\mathrm{c}}{\partial P_i^*}, \qquad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{57}$$

を得ます．この関係を**エンゲッサーの第一定理** (Engesser's first theorem) といいます．線形弾性体では，先に述べたように，$U = U_c$ であるから，式 (57) はひずみエネルギーを用いて書き直すことができます．

$$u_i^* = \frac{\partial U}{\partial P_i^*}, \qquad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{58}$$

荷重変位関係は直線となり縦軸と横軸で囲まれる三角形の面積は等しいからね．

この関係を**カスチリアーノの第二定理** (Castigliano's second theorem) あるいは，単に**カスチリアーノの定理** (Castigliano's theorem) といいます．

■ エネルギー法小史 ■

「材料力学史」(S.P.Timoshenko) によれば，ひずみエネルギーを最初に解析に採り入れたのは変分法の創始者のオイラー (L. Euler, 1707-1783) であるといわれています．グリーン (G. Green, 1793-1841) はひずみエネルギーがひずみ成分の二次の同次関数を仮定し，ラメ (G. Lamé, 1795-1870) もエネルギー保存則 (クラペーロン (B.P.E. Clapeyron, 1799-1864) の定理) について著書で言及しています．メナブレア (L.F. Ménabréa) は，**最小仕事の原理** (principle of least work) によって不静定内力を求める方法を示した (最小仕事の原理は，過剰な不静定内力はひずみエネルギーを最小にすると主張します．カスチリアーノの定理から容易に導くことができます．後にカスチリアーノにより証明されました．)

カスチリアーノ (A. Castigliano, 1847-1884) の定理は，1873 年に提出された彼の学位論文に表されています．その後，1875 年にトリノの科学アカデミーから論文が出版されましたが，この論文の重要性は当時のエンジニアたちに理解されず，一般に広がったのは 1879 年のフランスでの出版だそうです．歴史的には，カスチリアーノの定理は，エンゲッサー (F. Engesser, 1848-1931) によってコンプリメンタリーエネルギーの概念を導入して一般化されました．

ところで，カスチリアーノの定理には第一定理と第二定理があるけど，機械系と土木・建築系，国内と国外で，どちらを第一，第二と呼ぶか異なっている場合があるらしい．ややこしいね．

3.1 相反定理

線形弾性体について考えよう．荷重と変位の間に線形関係が成立するので，もっとも一般的には，

$$P_i^*(u_1^*, u_2^*, \cdots, u_N^*) = \sum_{i=1}^{N} C_{ij} u_j^*, \qquad u_i^*(P_1^*, P_2^*, \cdots, P_N^*) = \sum_{i=1}^{N} D_{ij} P_j^* \tag{59}$$

と表すことができます．ここで，定数 C_{ij} は，剛性マトリクス (stiffness matrix), D_{ij} はコンプライアンスマトリクス (compliance matrix) またはたわみ性マトリクス (flexibility matrix) と呼ばれます．また，これらは共に影響係数 (influence factor) とも呼ばれます．

このとき，ひずみエネルギーとコンプリメンタリーひずみエネルギーは，

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} P_i^*(u_1^*, u_2^*, \cdots, u_N^*) u_i^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} C_{ij} u_i^* u_j^* \tag{60}$$

$$U_c = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} P_i^* u_i^*(P_1^*, P_2^*, \cdots, P_N^*) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} D_{ij} P_i^* P_j^* \tag{61}$$

式の形から，$C_{ij} = C_{ji}, D_{ij} = D_{ji}$ という対称性が成り立つことがわかります．さて，影響係数の物理的解釈について考えよう．影響係数は，式 (59) の第一式，第二式をそれぞれ u_j^*, P_j^* で偏微分したものになります．すなわち，

$$C_{ij} = \frac{\partial P_i^*}{\partial u_j^*}, \qquad D_{ij} = \frac{\partial u_i^*}{\partial P_j^*} \tag{62}$$

さらに，カスチリアーノの定理により，

← $\boxed{u_i^* = \frac{\partial U}{\partial P_i^*},\ P_i^* = \frac{\partial U}{\partial u_i^*} \text{ を使う}}$

$$C_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_i^* \partial u_j^*}, \qquad D_{ij} = \frac{\partial^2 U_c}{\partial P_i^* \partial P_j^*} \tag{63}$$

であることがわかります．

今，一般化力 $P_i^{(1)}$ が作用し，一般化変位 $u_i^{(1)}$ が生じる問題 1 と一般化力 $P_i^{(2)}$ が作用し，一般化変位 $u_i^{(2)}$ が生じる問題 2 という二つの問題を考えよう．(両問題の i 番目の荷重および変位の作用点や作用方向，種類は同じで，その値のみ異なるとします)．

一般化力 $P^{(1)}$ が一般化変位 $P^{(2)}$ にする仕事 U^{12} は，

$$U^{12} = \sum_{i=1}^{N} P_i^{(1)} u_i^{(2)} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} C_{ij} u_i^{(1)} u_j^{(2)} \tag{64}$$

一般化力 $P^{(2)}$ が一般化変位 $P^{(1)}$ にする仕事 U^{21} は，

$$U^{21} = \sum_{i=1}^{N} P_i^{(2)} u_i^{(1)} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} C_{ij} u_i^{(2)} u_j^{(1)} \tag{65}$$

いま，$C_{ij} = C_{ji}$ より，$U^{12} = U^{21}$ となります．このように「第一の組の外力が第二の組の変位に対してなす仕事は，第二の組の外力が第一の組の変位に対してなす仕事に等しい．」これを**ベッチの相反定理** (Betti's reciprocal theorem) といいます．

さらに，この定理から，「異なる 2 点 i, j に対して，独立した荷重 P_i^*, P_j^* が作用する場合，j 点の荷重 $P_j^* = 0$ のもとで i 点に単位力 $P_i^* = 1$ が作用たときの，j 点の P_j^* 方向の変位は，j 点 i 点の荷重 $P_i^* = 0$ のもとで j 点に単位力 $P_j^* = 1$ が作用たときの，i 点の P_i^* 方向の変位に等しい．」ことが容易にわかります．これを**マクスウェルの相反定理** (Maxwell's reciprocal theorem) といいます．

$N = 2, i = 1, j = 2$ として，実際に代入して確かめてみよう．

3.2 カスチリアーノの定理の応用

ここでは，一般化力でひずみエネルギーを表現した後，カスチリアーノの定理を使って一般化変位を求める公式をまとめておきます．すぐに導けるものばかりだが公式として覚えておこう．特に，

なお，一般化力と一般化変位の関係はちゃんと覚えておかないと使えない (以下にもう一度書いておくね)．また，のび u，たわみ角 i，ねじれ角 ϕ というのはどこかが固定されているから決まる量なので，その条件にも注意しよう．

エネルギー表現では (1/2) がつくが微分すると (1/2) はつかないあたり冷静に考えればなんでもないけど間違えやすいぞ！！

■ 相反定理 ■

相反定理は，最初マクスウェルによって発見された定理をベッチが一般化しました．相反定理 (reciprocal theorem) というとなんとなく響きがいいのですが，こう呼ばれるものでもうひとつ有名なものに，オンサーガーの相反定理 (Onsager's reciprocal theorem, 1931) があります．流束と場の勾配とを関係付ける輸送係数に関する行列の対称性について述べている重要な定理です．オンサーガーがこの相反定理を発見した時に，このような明白なことは誰かがすでに気付いているのではないかと数年間調べ，新規性が確認できた後に発表したらしいが，この定理，ベッチの相反定理，マクスウェルの相反定理は，**線形系** (linear system), **保存系** (conservative system) の**自己随伴性** (self-adjointness) というキーワードでくくれば，いずれも，いわば「あたりまえ」のことである (中谷彰宏の勝手な解釈かもしれないので要注意)．マクセルの説明は当初難解で難しかったらしい (確かに材料力学史を読んでも難しいです)，その 10 年後にモールが同じことを独立に発見して，応用に結び付けた貢献とともに評価されて，以後，マクスウェル-モールの方法として，トラス構造物の解析の有力な方法となったという話です．なお，線形系の最大の特徴は重ね合わせがきくことにあると思います．影響係数の考え方は，**グリーン関数** (Green function) や**基本解** (essential solution)，**境界要素法** (boundary element method) などにつながる重要な概念です．

一般化力 P^*	一般化変位 u^*	一般化剛性 E^*A^*
軸力 P	のび u	引張剛性 EA
曲げモーメント M	たわみ角 θ	曲げ剛性 EI
ねじりモーメント T	ねじれ角 ϕ	ねじり剛性 GI_p

■軸方向荷重を受ける棒のひずみエネルギーと一般化変位　軸線上の座標 x の断面積 $A(x) \equiv \iint \mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 長さ l の棒が，軸力 $P(x)$ のみを受けている場合を考えよう．外力を P^* とするとひずみエネルギーは，

$P(x)$ は，x の関数と同時に P^* の関数なのだ．

$$U = \int_0^l \frac{P^2}{2EA}\mathrm{d}x \tag{66}$$

$$u^* = \frac{\partial U}{\partial P^*} = \frac{\partial}{\partial P^*}\left(\int_0^l \frac{P^2}{2EA}\mathrm{d}x\right) = \int_0^l \frac{P}{EA}\left(\frac{\partial P}{\partial P^*}\right)\mathrm{d}x \tag{67}$$

■曲げを受けるはりのひずみエネルギーと一般化変位　軸線上の座標 x の断面二次モーメント $I(x) \equiv \iint y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 長さ l の棒が，曲げモーメント $M(x)$ のみを受けている場合を考えよう．外力を P^* とするとひずみエネルギーは，

$M(x)$ は，x の関数と同時に P^* の関数なのだ．

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI}\mathrm{d}x \tag{68}$$

$$u^* = \frac{\partial M}{\partial P^*} = \frac{\partial}{\partial P^*}\left(\int_0^l \frac{M^2}{2EI}\mathrm{d}x\right) = \int_0^l \frac{M}{EI}\left(\frac{\partial M}{\partial P^*}\right)\mathrm{d}x \tag{69}$$

■ねじりを受ける棒のひずみエネルギーと一般化変位　軸線上の座標 x で中実の直径 $a(x)$ の円形断面を有する棒のの断面二次極モーメント $I_\mathrm{p}(x) \equiv \int_0^{a(x)} r^2(2\pi r)\mathrm{d}r$ 長さ l の棒が，ねじりモーメント $T(x)$ のみを受けている場合を考えよう．外力を P^* とするとひずみエネルギーは，

$T(x)$ は，x の関数と同時に P^* の関数なのだ．

$$U = \int_0^l \frac{T^2}{2GI_\mathrm{p}} \mathrm{d}x \tag{70}$$

$$u^* = \frac{\partial U}{\partial P^*} = \frac{\partial}{\partial P^*}\left(\int_0^l \frac{T^2}{2GI_\mathrm{p}} \mathrm{d}x\right) = \int_0^l \frac{T}{GI_\mathrm{p}}\left(\frac{\partial T}{\partial P^*}\right)\mathrm{d}x \tag{71}$$

3.3 外力が作用していない点へのカスチリアーノの定理の応用

カスチリアーノの定理使って，一般化力が作用していない点の一般化変位を求めるためには，求めたい変位の方向に仮想的な外力 H を加えてひずみエネルギーを H を含む表現で記述し，

$$u_H^* = \left.\left(\frac{\partial U}{\partial H}\right)\right|_{H=0} \tag{72}$$

を計算します．つまり，軸荷重，曲げ，ねじりに対してそれぞれ，

$$u_H^* = \int_0^l \left.\frac{P}{EA}\right|_{H=0} \left.\left(\frac{\partial P}{\partial H}\right)\right|_{H=0} \mathrm{d}x \tag{73}$$

$$u_H^* = \int_0^l \left.\frac{M}{EI}\right|_{H=0} \left.\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)\right|_{H=0} \mathrm{d}x \tag{74}$$

$$u_H^* = \int_0^l \left.\frac{T}{GI_\mathrm{p}}\right|_{H=0} \left.\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)\right|_{H=0} \mathrm{d}x \tag{75}$$

となります. [*2]

3.4 エネルギー法を使う時の注意

(エネルギー/仕事)=(力) × (距離) という関係を最大限に利用して解析に応用するエネルギー法では，微分方程式が近傍の力の釣合 (平衡) とか，ひずみの適合条件とかに依っているのに対し，積分形で構造全体の議論に持ち込みます．これは非常に便利な方法であり，ただし，ともすれば公式丸暗記でブラックボックスになってしまう危険性を有しています．意味を良く考えることと，また，他の方法でもやってみること．また，できるだけ多くの問題を解いて勘を養うことが重要!!

[*2] ここでくどく書いたように，少しでも計算を楽にするために分布を計算し，H で偏微分したら，すかさず，

$$\frac{P}{EA}, \frac{M}{EI}, \frac{T}{GI_\mathrm{p}}, \frac{\partial P}{\partial H}, \frac{\partial M}{\partial H}, \frac{\partial T}{\partial H}$$

などの中の H をゼロにおいてしまえばよいのです．結局 H の多項式になっており，H のかかる部分はすべてゼロになり微分したときに現れる定数だけが効いてくることになるから．かけ算がだんぜん楽になるし，積分も当然楽．ただし，あたりまえだけれども微分する前にゼロにしちゃダメだよ．

4 不静定はりの曲げ問題

不静定はりに対する支持反力，せん断力および曲げモーメント分布の求め方，たわみの計算方法について学びます．また，平等強さのはり，組合せばりなどの取扱いを修得します．

4.1 はりにおける不静定

はりは，はりの横断面方向の力のつりあい (せん断力のつりあい) と曲げモーメントのつりあいという 2 つの独立な関係式を持っています．したがって，反力 (反モーメントを含む) の数が 2 個であれば，未知数の数と方程式の数が一致するから静定であり，反力が 3 個以上であれば，不静定となります．トラスの問題と同様に，不静定の場合には，足りない方程式を補うために適合条件をつりあい式で表現するために応力ひずみ関係（構成関係）を使う．

支点が 3 個以上存在する場合や, はりが他の部材と組み合わされている場合にはこのような単純な評価ではなくなります．その時でも，未知数と方程式の数を比べて残りを適合条件をつりあい式で表現するために応力ひずみ関係を使うという発想にかわりはないのです．

4.2 不静定はりの解法

不静定はりの解法の定石として代表的な 4 つを，以下に挙げます．

1. 直接積分法 (直接法)
2. 重ね合わせ法
3. エネルギー法
4. 面積モーメント法

実際には，個々の問題に応じて，

- 対称性を使って変数を減らす．
- はりの切断や，部材の分解，支点の除去などによって問題を単純化する．

などの操作を行ないます．また，これら 4 つのうち 1 つを選択して最後まで定石にしたがって解くという性質のものではなく，実際には，4 つのエッセンスを自在に組み合わせて問題を解けばよいことになります．*3

4.3 直接積分法 (直接法)

不静定 (余剰) 反力を未定のままで，たわみの微分方程式を解き，境界条件 (主に，支持部のたわみやたわみ角によって与えられる) によって不静定反力を積分ていすうとともに求めて問題を

*3 ひとこと：原理的にはどの方法を使っても問題は解けるので，短時間に問題を解くということのみを目的とするならば，一つだけ知っていれば良いのかもしれませんが，それだけでは，機械工学を志す諸君にとっては学問の深みがでません．実際には，問題に応じてそれぞれ得手不得手があります．4 つの方法は背景となる物理的な意味についての本質は同じものだが見掛け上の理論の数学的表現が異なっており，それぞれがそこから派生している方法が現在行なわれている最先端のあるいは将来の計算力学手法の基礎になっており，また他分野で用いられる方法との間で様々なアナロジーが成立します．なので教養として勉強しておくことは力学に対する発想を豊かにする上で極めて有意義です．いずれにしても先人の知恵からは学ぶべきものが多いのです．例えば，昔の時代のツールとしては役にたたず捨てられた方法がコンピューターの普及などによって突然脚光を浴びることになったりするのです．歴史は繰り返すのです．

■ 釣り合い方程式と構成関係式 ■

不静定問題と静定問題の違いは，連立方程式，

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y = 4x \end{cases} \tag{76}$$

と，

$$\begin{cases} x + 4 = 5 \\ y = 4x \end{cases} \tag{77}$$

の違いと良く似ていると思います．これら二つの問題はいずれも x, y を未知数とする連立方程式ですが，最初の問題は，x, y が連成した (coupled) 本当の意味での連立方程式なのに対して，第 2 の問題は，第 1 式のみで x を求めることができて，その結果を第 2 式に代入することにより，y の値を求めることができます．

釣り合い式のみ力を求めてから，力と変位の関係（もとはといえば応力とひずみの関係，すなわち，材料が何であるかを特徴づける式）を用いて，幾何学的な変形を求めるのが静定問題．一方，最初から，釣り合い式と力と変位の関係を連立して解くのが不静定問題という風に言えます．

大抵，物理法則というものは，釣り合い式（保存則）でかかれていますが，一般に，そのような関係だけでは，世の中の現象のモデル化はできません．未知数に対して式の数が足りないのです．応力ひずみ関係のように考えている問題の材料特性などを関係づける式は構成関係式または構成式 (constitutive equation) と呼ばれます．

流体力学，機械力学，熱力学，輸送現象などでも必ず物質系を規定している部分に構成式の考え方が入っています．また，制御工学を含め，広い意味でのシステムでも構成式に相当する概念が含まれています．いわゆるシステム同定という作業は，材料特性評価と同じ意味です．

高速道路の交通渋滞のモデルでは，料金所を通過する車の数により車の台数は一義に決まりますが，分布（つまり渋滞が発生するかどうか）は，車間距離とスピードの関係など（お国柄や人のマインド，天候，時刻などとも深く関わる）構成式を導入しなければ解けません．経済学でも収支計算，紙幣発行数などには釣り合い方程式を書くことができますが，人が持っているお金と購買意欲，貯蓄率などの関係など，何らかの構成式を持ち込む必要があります．これらは，世界のニュース，日々の事件と無関係ではないのですが. . .

最近，このような構成式をどんどん深くミクロな解析を通じて理解していこうとするマルチスケール理論などが注目されています．

ともかく，そういった身の回りにある広い意味での力学の不静定問題を探してみましょう．

解く方法です.

たわみの基礎式

$$EI\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -M(x) \tag{78}$$

は，基礎式という名前がついいますが，実際には，支持条件を考慮した上で成り立っている式です．支持条件とは無関係に成立するのは，

$$EI\frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4} = p(x) \tag{79}$$

であり，これが真の意味での基礎式です．式 (79) を用いずに，式 (78) からスタートするのが普通です.

弾性論における Navier の式に対応します．集中荷重が作用する時も Dirac の δ 関数を用いれば統一的に扱えます.

[例題 4.1]

式 (78) からスタートして直接積分法により一様分布荷重 w を受ける長さ l の一端固定他端支持はりの問題を解いてみよう.

....(解)..

左端の反力 R_0 を余剰反力に選ぶと，

$$M(x) = R_0x - \frac{wx^2}{2} \tag{80}$$

となるから，

$$EI\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{wx^2}{2} - R_0x \tag{81}$$

$$EI\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{wx^3}{6} - \frac{R_0x^2}{2} + C_1 \tag{82}$$

$$EIy = \frac{wx^4}{24} - \frac{R_0x^3}{6} + C_1x + C_2 \tag{83}$$

境界条件 $x = 0$ で $y = 0$ より，$C_2 = 0$, さらに，$x = l$ で $y = 0$，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$ より，

$$\frac{wl^4}{24} - \frac{R_0l^3}{6} + C_1l = 0, \quad \frac{wl^3}{6} - \frac{R_0l^2}{2} + C_1 = 0 \tag{84}$$

したがって，$C_1 = wl^3/48$, $R_0 = 3wl/8$.

$$y = \frac{wl^4}{48EI}\left(\frac{2x^4}{l^4} - \frac{3x^3}{l^3} + \frac{x}{l}\right) \tag{85}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{wl^3}{48EI}\left(\frac{8x^3}{l^3} - \frac{9x^2}{l^2} + 1\right) \tag{86}$$

[例題 4.2]

式 (79) から出発して，一様分布荷重 w を受ける長さ l の一端固定他端支持はりの問題を解いてみよう.

....(解)..

$$EI\frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4} = p \tag{87}$$
$$EI\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} = wx + C_1 \tag{88}$$
$$EI\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{wx^2}{2} + C_1x + C_2 \tag{89}$$
$$EI\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{wx^3}{6} - \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3 \tag{90}$$
$$EIy = \frac{wx^4}{24} + \frac{C_1x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4 \tag{91}$$

境界条件は,

$$x = 0; y = 0, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 0$$
$$x = l; y = 0, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

これらの条件を用いて，C_1, C_2, C_3, C_4 を求めると，

$\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = 0$ は，曲げモーメントゼロと等価です．

$$C_1 = \frac{-3wl}{8},\ C_2 = 0,\ C_3 = \frac{wl^3}{48},\ C_4 = 0 \tag{92}$$

これを上記の各式に代入すると，たわみ，たわみ角を得ます．

4.4 重ね合わせ法

静定問題の解を重ね合わせることにより，不静定の境界条件を満足させて問題を解く方法．一連の静定問題に対する解が手元にある場合，容易に求まる場合，あるいは暗記している場合にはこれは極めて有効な方法です．

[例題 4.3]

重ね合わせ法により，一様分布荷重 w を受ける長さ l の一端固定他端支持はりの問題を解きましょう．

..........(解)..........

与えられた問題を，(問題 a) 一様分布荷重を受ける片持ちはりの問題と，(問題 b) 自由端に集中荷重を受ける片持ちはりの問題にわけます．

(問題 a) の解は,

$$\begin{aligned} F(x) &= -wx \\ M(x) &= -\frac{wx^2}{2} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{wl^3}{6EI}\left(1 - \frac{x^3}{l^3}\right) \\ y &= \frac{Wl^4}{24EI}\left(3 - 4\frac{x}{l} + \frac{x^4}{l^4}\right) \end{aligned} \tag{93}$$

$x = 0$ におけるたわみ量は，

$$y_a(0) = \frac{wl^4}{8EI} \tag{94}$$

(問題 b) の解は，

$$\begin{aligned} F(x) &= -W \\ M(x) &= -Wx \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{Wl^2}{2EI}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \\ y &= \frac{Wl^3}{6EI}\left(2 - 3\frac{x}{l} + \frac{x^3}{l^3}\right) \end{aligned} \tag{95}$$

与えられた問題における反力を R とすると，$W = -R$ なので，$x = 0$ におけるたわみは，

$$y_b(0) = -\frac{Rl^3}{3EI} \tag{96}$$

(問題 a) と (問題 b) を重ね合わせると，$y_a(0) + y_b(0) = 0$ でなければならないから，

$$\frac{wl^4}{8EI} - \frac{Rl^3}{3EI} = 0 \tag{97}$$

したがって，

$$R = \frac{3wl}{8} \tag{98}$$

与えられた問題の解は，$W = -3wl/8$ として，重ね合わせにより，

$$\begin{aligned} F(x) &= F_\mathrm{a}(x) + F_\mathrm{b}(x) \\ M(x) &= M_\mathrm{a}(x) + M_\mathrm{b}(x) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}y_\mathrm{a}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}y_\mathrm{b}}{\mathrm{d}x} \\ y &= y_\mathrm{a} + y_\mathrm{b} \end{aligned}$$

で得られます．

4.5 エネルギー法

一般化力として，はり横断面にはたらく集中荷重，集中モーメントをとり，対応する一般化変位として，それぞれ，たわみ，たわみ角を考え，カスチリアーノの定理，単位荷重 (単位モーメント) の定理 (より一般的には，コンプリメンタリー仮想仕事の原理)，最小仕事の原理などを使って解く方法．

■カスチリアーノの定理による解法　不静定反力における幾何学的拘束をとりのぞきその拘束に対応する一般化力を負荷した問題を解いて，一般化力の作用点の一般化変位がもとの幾何学的拘束と一致するという条件から一般化力を決定する方法．

[例題 4.4]

カスチリアーノの定理を用いて，一様分布荷重 w を受ける長さ l の一端固定他端支持はりの問題を解きましょう．

. . . . (解) . . . .

与えられた問題を，自由端に集中荷重 W を受け，はり全体に一様分布荷重 w を受ける片持ちはりの問題として，

$$F(x) = -wx - W$$
$$M(x) = -\frac{wx^2}{2} - Wx$$

このとき，

$$\frac{\partial M}{\partial W} = -x \tag{99}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\delta_W = \frac{\partial U}{\partial W} &= \int_0^l \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial W}\mathrm{d}x = \frac{1}{EI}\int_0^l \left(\frac{wx^2}{2} + Wx\right)x\mathrm{d}x \\ &= \frac{wl^4}{8EI} + \frac{Wl^3}{3EI}\end{aligned} \tag{100}$$

条件より，$\delta_W = 0$ なので，

$$W = -\frac{3wl}{8} \tag{101}$$

を得ます．

■最小仕事の原理による解法　ひずみエネルギー U を不静定内力 X を変数として含む関数として表現し，

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0 \tag{102}$$

となるように X を決定します．

[例題 4.5]

最小仕事の原理を用いて，一様分布荷重 w を受ける長さ l の一端固定他端支持はりの問題を解きましょう．

. . . . (解) . . . .

問題の左端の支持端とはりの間に作用する力を不静定内力 X(この場合は不静定反力，余剰反力) とおきます．

$$F(x) = -wx + X$$
$$M(x) = -\frac{wx^2}{2} + Xx$$

このとき，

$$\frac{\partial M}{\partial X} = x \tag{103}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial X} &= \int_0^l \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial X}\mathrm{d}x = \frac{1}{EI}\int_0^l \left(\frac{wx^2}{2} - Xx\right)x\mathrm{d}x \\ &= \frac{wl^4}{8EI} - \frac{Xl^3}{3EI}\end{aligned} \tag{104}$$

最小仕事の原理より，$\partial U/\partial X = 0$ から，

$$X = \frac{3wl}{8} \tag{105}$$

を得ます.

■単位荷重の定理による解法　与えられた問題の真の解は，基本系としてもとの荷重条件で余剰拘束をとりのぞいた問題に対する解 (添字 0 で表す) と，仮想系としての未知の不静定力 X を受ける基本系の問題の解 (添字 1 で表す) の和で表されます．未知の不静定力 X を受ける問題の解は，不静定力と同じ方向の単位荷重 1 を自由端に受ける解 (バーをつけた変数の添字 1 で表す) の X 倍となります.

$$\begin{aligned} F &= F_0 + F_1 = F_0 + X\bar{F}_1 \\ M &= M_0 + M_1 = M_0 + X\bar{M}_1 \end{aligned} \tag{106}$$

外部コンプリメンタリー仮想仕事が零のときのコンプリメンタリー仮想仕事の原理から，

$$\int_0^l \frac{M\bar{M}_1}{EI}\mathrm{d}x = 0 \tag{107}$$

すなわち，

$$\int_0^l \frac{(M_0 + X\bar{M}_1)\bar{M}_1}{EI}\mathrm{d}x = 0 \tag{108}$$

したがって，

$$X = -\frac{\displaystyle\int_0^l \frac{M_0\bar{M}_1}{EI}\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^l \frac{(\bar{M}_1)^2}{EI}\mathrm{d}x} \tag{109}$$

を得ます.

[例題 4.6]

単位荷重の定理を用いて，一様分布荷重 w を受ける長さ l の一端固定他端支持はりの問題を解きましょう.

……………………………………(解)……………………………………

この問題では，与えられた問題の真の解は，基本系としてはり全体に一様分布荷重 w を受ける片持ちはりの問題については，

$$F_0(x) = -wx, \quad M_0(x) = -\frac{wx^2}{2} \tag{110}$$

仮想系としての未知の不静定力 X を自由端に受ける問題の解 (添字 1 で表す)

$$F_1(x) = X, \quad M_1(x) = Xx \tag{111}$$

不静定力と同じ方向の単位荷重 1 を自由端に受ける問題については，

$$\bar{F}_1(x) = 1, \quad \bar{M}_1(x) = x \tag{112}$$

したがって,

$$X = -\frac{\displaystyle\int_0^l \frac{(-wx^2)x}{2EI}\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^l \frac{x^2}{EI}\mathrm{d}x} = \frac{3wl}{8} \tag{113}$$

を得ます.

4.6 面積モーメント法

以下に述べる面積モーメント法 (あるいは, モーメント面積法とも呼ばれる) は, はりのたわみの基礎微分方程式の図式解法のひとつです. 特に, 連続ばり, 断面形状が位置によって変化する変断面のはりについて有効です. また, 不静定問題においても, 静定問題に対するモーメント分布を重ね合わせ, 面積モーメント法 (あるいは, モーメント面積法とも呼ばれる) を用いることにより. 容易に計算することができます.

はりのたわみ曲線上の任意の一点における接線が x 軸となす角を θ' とします.

この節 (面積モーメント法) では, θ' の定義では反時計方向が正であり, たわみ角 θ とは符号が逆であることに注意します.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\theta' \tag{114}$$

はり上の任意の 2 点 A, B ($x_A < x_B$) を考え, 以下の θ'_{BA}, t_{AB}, t_{BA} を定義します.

θ'_{BA}: 点 B の接線は, 点 A の接線を反時計方向に θ'_{BA} 回転させた直線に一致します.

t_{AB}: 点 A は, 点 B における接線より t_{AB} だけ鉛直上方にあります.

t_{BA}: 点 B は, 点 A における接線より t_{AB} だけ鉛直上方にあります.

たわみ y は x 軸からの変位であるから, t_{AB}, t_{BA} は, 一般には, 相対変位 $y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}}$ とは異なります. また, 一般には, $t_{\mathrm{AB}} \neq t_{\mathrm{BA}}$ です.

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}x} = -\frac{M}{EI}, \quad \frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}x} = \frac{M}{EI} \tag{115}$$

より,

$$\theta'_{\mathrm{BA}} \equiv \theta'_{\mathrm{B}} - \theta'_{\mathrm{A}} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{M}{EI}\mathrm{d}x \tag{116}$$

$$t_{AB} = \int_A^B (x - x_A)\mathrm{d}\theta' = \int_{x_A}^{x_B} (x - x_A)\frac{M}{EI}\mathrm{d}x \tag{117}$$

$$t_{BA} = \int_A^B (x_B - x)\mathrm{d}\theta' = \int_{x_A}^{x_B} (x_B - x)\frac{M}{EI}\mathrm{d}x \tag{118}$$

つまり, AB 間の任意断面で曲げモーメントを曲げ剛性で除した M/EI の線図を書き, その面積を $\mathcal{A}$ とし, その図心の x 座標を x_{G} とします. 距離 $\bar{x}_A \equiv x_{\mathrm{G}} - x_{\mathrm{A}}$, $\bar{x}_{\mathrm{B}} \equiv x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{G}}$ とすると, 面積モーメント法の第一定理,

M/EI と x 図を描く. この時, 曲げモーメント図 (BMD) ではなく EI で割った図を書くことに注意しましょう. EI が一定のときには, 形は相似になりますが, EI が場所によって異なる場合に威力を発揮します.

$$\theta'_{BA} = \mathcal{A} \tag{119}$$

面積モーメント法の第二定理,

$$t_{AB} = \bar{x}_A\mathcal{A} \tag{120}$$

$$t_{BA} = \bar{x}_B\mathcal{A} \tag{121}$$

を得ます. ここで, $M, \theta', \theta'_{\mathrm{BA}}, t_{\mathrm{AB}}, t_{\mathrm{BA}}, \mathcal{A}$ は, 正負の符号を持ち, $EI, \bar{x}_{\mathrm{A}}, \bar{x}_{\mathrm{B}}$ は常に正数です. [*4]

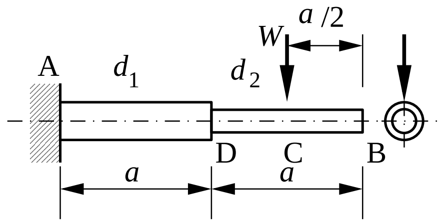
[*4] 公式というのはどこまで覚えるかは個人の問題. ただし導けることと覚えなくていいというのは別問題. 九九を

4.6.1 静定はりへの面積モーメント法の応用

公式にしたがって，求めたい相対たわみ角と，接線からのたわみ量を計算します．図心は積分計算により求めることができますが，図心に関していくつかの公式を覚えておくと便利です．

[例題 4.7]

図のような段付きの円形断面棒 ($d_2 < d_1$) に集中荷重 W が作用する場合に、自由端におけるたわみ角とたわみを求めよう．ただし材料の縦弾性係数 (ヤング率) は E で一定とします．



(解)

$$I_1 = \frac{\pi}{64}{d_1}^4, \quad I_2 = \frac{\pi}{64}{d_2}^4 \tag{122}$$

とおきます．

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\frac{Pa}{EI_1}\right)\left(\frac{3}{2}a\right) = -\frac{9}{8}\frac{Pa^2}{EI_1}, \quad \mathcal{A}_2 = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\frac{Pa}{E}\left(\frac{1}{I_2}-\frac{1}{I_1}\right)\right]\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{1}{8}\frac{Pa^2}{E}\left(\frac{1}{I_2}-\frac{1}{I_1}\right) \tag{123}$$

$$\bar{x}_{\mathrm{B1}} = \frac{3}{2}a, \quad \bar{x}_{\mathrm{B2}} = \frac{5}{6}a \tag{124}$$

$$\theta'_{\mathrm{BA}} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = -\frac{Pa^2}{E}\left(\frac{8}{I_1}+\frac{1}{I_2}\right) = -\frac{8Pa^2}{\pi E}(8{d_1}^4 + {d_2}^4) \tag{125}$$

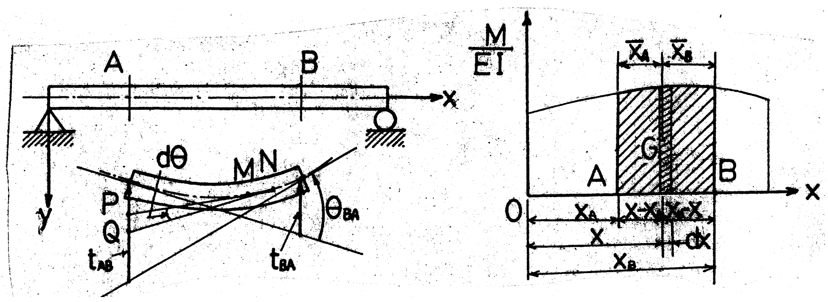


図 2: 図

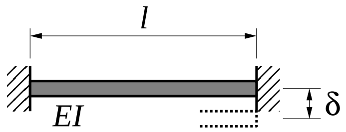
例に挙げると，9 × 9 = 81 を 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 81 で計算できるからといって覚えてない人はいないですよね．だけど普通の日本人は 9 × 9 までしか覚えないが，ある国では 2 桁どうしのかけ算は覚えると聞きました．覚えたから意味や導き方をわすれてもいいというのもまた困るけど．

$$t_{\mathrm{BA}} = \mathcal{A}_1\bar{x}_{\mathrm{B}1} + \mathcal{A}_2\bar{x}_{\mathrm{B}2} = -\frac{27}{16}\frac{Pa^3}{EI_1} - \frac{5}{48}\frac{Pa^3}{E}\left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right) = -\frac{Pa^3}{48E}\left(\frac{76}{I_1} + \frac{5}{I_2}\right)$$
$$= -\frac{4Pa^3}{3\pi E}(76{d_1}^4 + 5{d_2}^4) \tag{126}$$

$$\therefore \theta'_{\mathrm{B}} = -\theta'_{BA} = \frac{8Pa^2}{\pi E}(8{d_1}^4 + {d_2}^4), \quad y_{\mathrm{B}} = -t_{\mathrm{BA}} = \frac{4Pa^3}{3\pi E}(76{d_1}^4 + 5{d_2}^4) \tag{127}$$

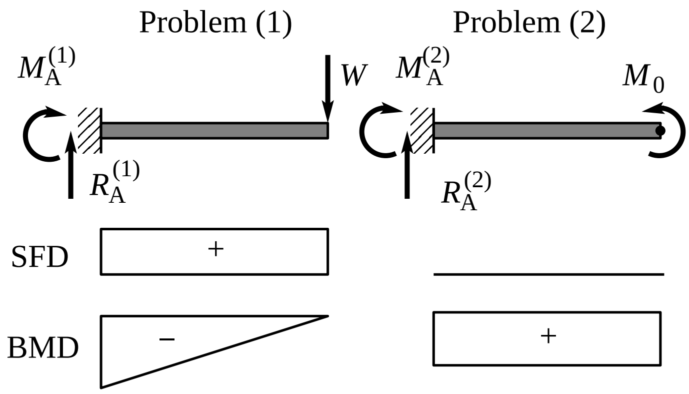
[例題 4.8]

両端固定はりを δ だけずらしたときの反力，反モーメントを求めなさい．さらに，せん断力図，曲げモーメント図を書きなさい．ただし，はりの曲げ剛性を EI とする．



(解)

例えば，B 端を自由端とした片持ちはりを考え，問題 (1)：自由端に集中荷重 W が加えられる問題と，問題 (2)：自由端に曲げモーメントが加えられる問題，とに分解してみましょう．



問題 (1) に対して，力の釣り合い，モーメントの釣り合いから，

$$R_A^{(1)} = W, \qquad M_A^{(1)} = -Wl \tag{128}$$

$$F^{(1)}(x) = W \tag{129}$$

$$M^{(1)}(x) = W(x-l) \tag{130}$$

問題 (2) に対して，力の釣り合い，モーメントの釣り合いから，

$$R_A^{(2)} = 0, \qquad M_A^{(1)} = M_0 \tag{131}$$

$$F^{(2)}(x) = 0 \tag{132}$$

$$M^{(2)}(x) = M_0 \tag{133}$$

を得ます．したがって，問題 (1)，(2) の重ね合わせによる曲げモーメント分布は，

$$M(x) = M^{(1)} + M^{(2)} = W(x-l) + M_0 \tag{134}$$

となります．

$$\frac{\partial M}{\partial W} = x - l, \qquad \frac{\partial M}{\partial M_0} = 1 \tag{135}$$

以下で，B 端のたわみが δ，たわみ角が 0 となる W, M_0 を求めます．カスチリアーノの定理により，

$$\delta = \frac{\partial U_c}{\partial W} = \int_0^l \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial W}\mathrm{d}x = \frac{1}{6EI}(2Wl - 3M_0)l^2 \tag{136}$$

$$0 = \frac{\partial U_c}{\partial M_0} = \int_0^l \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_0}\mathrm{d}x = \frac{1}{2EI}(2M_0 - Wl)l \tag{137}$$

したがって，

$$W = \frac{12EI}{l^3}\delta \qquad , M_0 = \frac{6EI}{l^2}\delta \tag{138}$$

を得ます．反力，反モーメントは，

$$\begin{aligned} R_\mathrm{A} &= R_\mathrm{A}^{(1)} + R_\mathrm{A}^{(2)} = \frac{12EI}{l^3}\delta, \qquad R_\mathrm{B} = -R_\mathrm{A} = -\frac{12EI}{l^3}\delta \\ M_\mathrm{A} &= M_\mathrm{A}^{(1)} + M_\mathrm{A}^{(2)} = -\frac{6EI}{l^2}\delta, \qquad M_\mathrm{B} = -M_\mathrm{A} = \frac{6EI}{l^2}\delta \end{aligned} \tag{139}$$

せん断力分布，曲げモーメント分布は，

$$F(x) = \frac{12EI}{l^3}\delta, \qquad M(x) = \frac{6EI}{l^3}\delta(2x - l) \tag{140}$$

....(別解 1) ....

教科書に載っている式を使ってもいいので，できるだけ短時間で解を求めてください．という場合．

はりは $x = l/2$ で点対称なので，$[0, l/2]$ の区間と，$[l/2, l]$ の区間に切断してみよう．切断したはりの自由端にかかる集中荷重を W としましょう．

教科書 p.75 式 (4.74) の第 2 式で，$y_\mathrm{max} \to \delta/2, l \to l/2, I_z \to I$ とおくと，

$$W = \frac{12EI}{l^3}\delta \tag{141}$$

を得ます．

....(別解 2) ....

皆さんに提出してもらった用紙には，ユニークな発想に基づくものがありました．(別解 1) とは逆の発想で，原問題のはりが，別の問題のはりの一部になっているというものです．

教科書 p.97 の $y_\mathrm{max} = \cdots$ の式で，$l \to 2l$，$W \to 2W$，$a \to l$，$y_\mathrm{max} \to \delta$ とおくと，

$$W = \frac{12EI}{l^3}\delta \tag{142}$$

を得ます．

なるほど，これは中谷は思いつきませんでした．このような着想がいろいろな局面でできることが大切かもしれませんね．

4.7 連続はり

教科書 p.104 に基づいて議論する．ただし，このプリントでは，教科書の変数の定義などを一部変更する．

スパン l_{n-1}，l_n の部分を切り出して考えよう．連続したはりを切り出すことにより，これらのスパン l_{n-1} の左端と右端には，それぞれ，M_{n-1}，M_n のモーメントが，スパン l_n の左端と右端には，それぞれ，M_n，M_{n+1} のモーメントが，作用する問題に帰着されます．

まず，スパン l_{n-1} の両端支持はりについて，4.6 節の面積モーメント法で，点 A，点 B をそれぞれ，支点 $n-1$，n に対応付けると，左端に M_{n-1} のみが作用するときの，支点 n でのたわみ角は，

$$\theta_n^{(-)}|_{M_{n-1}} = -\frac{t_\mathrm{AB}}{l_{n-1}} = -\frac{1}{l_{n-1}}\bar{x}_\mathrm{A}\mathcal{A} = -\frac{1}{3}l_{n-1}\frac{1}{2}\frac{M_{n-1}}{EI}l_{n-1} = -\frac{1}{6EI}M_{n-1}l_{n-1} \tag{143}$$

右端に M_n のみが作用するときの，支点 n でのたわみ角は，

$$\theta_n^{(-)}|_{M_n} = -\frac{t_{\mathrm{AB}}}{l_{n-1}} = -\frac{1}{l_{n-1}}\bar{x}_{\mathrm{A}}\mathcal{A} = -\frac{2}{3}l_{n-1}\frac{1}{2}\frac{M_n}{EI}l_{n-1} = -\frac{1}{3EI}M_n l_{n-1} \tag{144}$$

となり，結局，スパン l_{n-1} の両端支持はりについて評価した，支点 n でのたわみ角 $\Theta_n^{(-)}$ は，$\theta_n^{(-)}|_{M_{n-1}} + \theta_n^{(-)}|_{M_n}$ に，集中荷重や分布荷重などのみが作用するとした場合のスパン l_n の両端支持はりの支点 n でのたわみ角 $\theta_n^{(-)}$ を加えた

$$\Theta_n^{(-)} = -\frac{1}{6EI}(M_{n-1} + 2M_n)l_{n-1} + \theta_n^{(-)} \tag{145}$$

となる．

次に，スパン l_n の両端支持はりについて，4.6 節の面積モーメント法で，点 A，点 B をそれぞれ，支点 n，$n+1$ に対応付けると，左端に M_n のみが作用するときの，支点 n でのたわみ角は，

$$\theta_n^{(+)}|_{M_n} = -\frac{t_{\mathrm{BA}}}{l_n} = \frac{1}{l_n}\bar{x}_{\mathrm{B}}\mathcal{A} = \frac{2}{3}l_n\frac{1}{2}\frac{M_n}{EI}l_n = \frac{1}{3EI}M_n l_n \tag{146}$$

スパン l_n の両端支持はりの右端に M_{n+1} のみが作用するときの，支点 n でのたわみ角は，

$$\theta_n^{(+)}|_{M_{n+1}} = -\frac{t_{\mathrm{BA}}}{l_n} = \frac{1}{l_n}\bar{x}_{\mathrm{B}}\mathcal{A} = \frac{1}{3}l_n\frac{1}{2}\frac{M_{n+1}}{EI}l_n = \frac{1}{6EI}M_{n+1}l_n \tag{147}$$

となり，結局，スパン l_n の両端支持はりについて評価した，支点 n でのたわみ角 $\Theta_n^{(+)}$ は，$\theta_n^{(+)}|_{M_n} + \theta_n^{(+)}|_{M_{n+1}}$ に，集中荷重や分布荷重などのみが作用するとした場合のスパン l_n の両端支持はりの支点 n でのたわみ角 $\theta_n^{(+)}$ を加えた

$$\Theta_n^{(+)} = \frac{1}{6EI}(2M_n + M_{n+1})l_n + \theta_n^{(+)} \tag{148}$$

となる．

切断した，スパン l_{n-1} のはりと，スパン l_n のはりが，連続してつながるためには，

$$\Theta_n^{(-)} = \Theta_n^{(+)} \tag{149}$$

が成立しなければならない．

したがって，

$$(M_{n-1} + 2M_n)l_{n-1} + (2M_n + M_{n+1})l_n = 6EI(\theta_n^{(+)} - \theta_n^{(-)}) \tag{150}$$

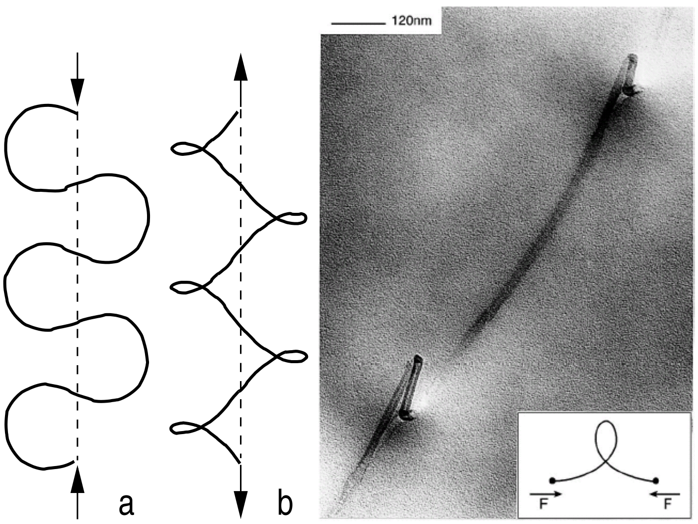
$$l_{n-1}M_{n-1} + 2(l_{n-1} + l_n)M_n + l_n M_{n+1} = 6EI(\theta_n^{(+)} - \theta_n^{(-)}) \tag{151}$$

となる．この式をクラペイロンの 3 連モーメントの式 (Clapeylon's 3 moments equation) といいます．教科書 p.105 の表 5.3 に示すように，スパン長さ l の両端支持はりに，集中荷重や分布荷重などのみが作用するとした場合の支点でのたわみ角は静定問題の解として求めることができるので，N 支点からなる連続はりの場合，$M_1, M_2, \cdots, M_N$ に対する連立方程式を導くことができます．これは連立一次方程式であり，行列で表現すると，三重対角行列，対角三項行列 (tri-diagonal matrix) となります．適切な境界条件を考慮すると，解くことができます．

支点 n の変位は，左右のスパンとも零であるので，たわみ $y^{(-)} = y^{(+)} = 0$ で連続であり，支点 n でのモーメントを M_n としているので，たわみの 2 階微分 $(d^2y/dx^2)^{(-)} = (d^2y/dx^2)^{(+)} = -M_n/EI$ も左右のスパンで一致するという条件を暗に仮定して議論を進めています．残るは，たわみ角（つまり，たわみの 1 階微分）です．このような問題の場合，何を最終的な未知数と考えて定式化するかによって表現方法がかわってきます．現在，計算力学で広く用いられる有限要素法という方法では，変位を基準に考えることが多いです．これに対して，一般化力のひとつであるモーメントを未知数としていますので，応力法と呼ばれます．

■ 連続はりとスプライン補間 ■

連続はりのたわみ曲線は，多数の点を通るなめらかな曲線として知られる 3 次スプライン曲線 (spline curve) と数学的に同じです．スプライン曲線は，与えられた複数の点を通る滑らかな曲線で，これらの点での適当次数の導関数の連続性までを保持した区分多項式です．製図で雲型定規を使って点をなめらかに結ぶときに得られる曲線です．
ここで示したとおり，はりでは通常は支点でのたわみを零としていますが，曲線の補間では，ある種の座標値をもっているので，少し表現は違ってきますが，本質はおなじです．
特に，自然スプライン曲線では端点の 2 階導関数を 0 とすることにより解を得ますが，これは，はりでいうと，端点が支持点，すなわち，曲げモーメントが零に対応します．また，端点の 1 階導関数を 0 とすることもできます．その場合には，端点は固定端，すなわちたわみ角 0 です．
弾性体の変形では，ポテンシャルエネルギーを最小にする形状が静力学的な釣り合いに相当します．つまり，モーメント（たわみの 2 階微分）までを考えたときに，エネルギー的にもっとも無駄のない曲線がたわみ曲線なのです．
モーメント分布とか，たわみ曲線とかのイメージとは一見関係がなさそうな，曲線のあてはめなどの手法との間で，言い過ぎかもしれませんが，「自由曲線」≈「人が美しいと思う形」という対応で，アナロジーが成立するのは，興味深くありませんか？
最近，スプライン関数等を利用した逆形状モデリングなるものがはじまっています．
同じような話で，昔，Euler はピアノ線のような弾性線に関する研究を行いました．このような問題は，エラスティカ問題 (左図，例えば，文献 [1]) と言われますが，問題自身は古典的ですが，現在もカーボンナノチューブ (右図，文献 [2] より）の制御やマニュピュレーションなどの研究とも関連しています．

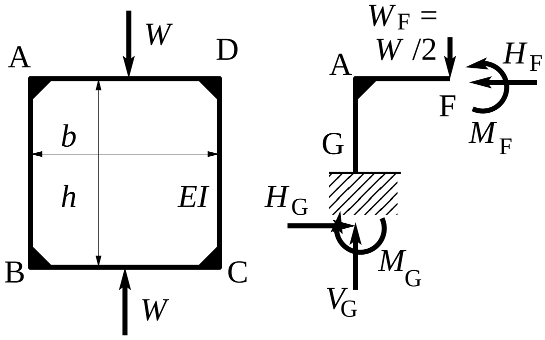


[1]Love, A.E.H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elast icity, 4th Eds.*, (1946), Dover Edition.)
[2]Lourie, O. et al., *Phys. Rev. Lett.*, **81**-8 (1998), 1638.）

4.8 ラーメン構造

[例題 4.9]

教科書 p.122 5.10 で，$I_1 = I$ と簡単化して，曲げモーメント分布を求めなさい．



(解)

右のように 1/4 領域について考えてみよう．区間 AF で,

$$M(x) = M_F - \frac{W}{2}x \qquad (0 < x < \frac{b}{2}) \tag{152}$$

区間 AG で,

$$M(y) = M_F - \frac{W}{2}\frac{b}{2} \qquad (0 < y < \frac{h}{2}) \tag{153}$$

コンプリメンタリーひずみエネルギーは,

$$\frac{1}{4}U_c = \int_0^{b/2} \frac{M(x)^2}{2EI}\mathrm{d}x + \int_0^{h/2} \frac{M(y)^2}{2EI}\mathrm{d}y \tag{154}$$

断面 F のたわみ角を θ_F は，カスチリアーノの定理より,

$$\begin{aligned}\theta_F &= \frac{\partial U_c}{\partial M_F} \\ &= 4\int_0^{b/2} \frac{M(x)}{EI}\frac{\partial M(x)}{\partial M_F}\mathrm{d}x + 4\int_0^{h/2} \frac{M(y)}{EI}\frac{\partial M(y)}{\partial M_F}\mathrm{d}y \\ &= 2(b+h)M_F - \frac{Wb}{4}(b+2h)\end{aligned} \tag{155}$$

となります．$\theta_F = 0$ より,

$$M_F = \frac{Wb}{8}\frac{b+2h}{b+h} \tag{156}$$

を得ます．これを，$M(x)$，$M(y)$ に代入すれば，モーメント分布が得られます．

荷重作用点 (AD の中点と BC の中点) の相対的な変位と，AB の中点と DC の中点との相対変位を評価してみてください．どのようにしても求められるでしょう．

5 弾性論の初歩

5.1 内力

「力」は目に見えません．なので理解しにくいのは当然です．

われわれは地球上（重力の場）に生活していますので，経験的に物体におもりが乗っかっていると力のイメージができます．工学単位系が質量の単位である kg と，力の単位である kgf, kgw, kg 重などと数値的に同じであることが長い歴史の一端を物語っています．

そして，具体的なイメージは個々の人によって違いはあるかもしれませんが，たいてい，物体の上面をおもりの下面が押していると認識することにより，物体にはたらく外力 (external force) がイメージできていると思います．これは，表面力 (surface force, traction) のイメージです．

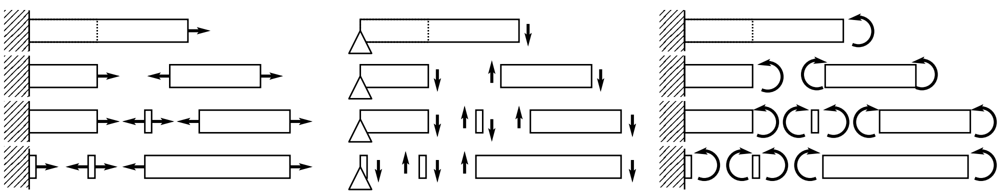
あるいは，ばねによる復元力をイメージする人もいるでしょう．いずれも，持って生まれたものではなく，経験を通じて獲得したものではないでしょうか．

では，物体力 (body force) はどうでしょうか？運動会の組体操のファイナルである大きな人間ピラミッドのイメージがこれに近いかもしれませんね．荒っぽくいうと個人個人の体重が物体力に相当します．途中の人は上に乗っているは人の体重を受けて，自分の体重を加えて下の人に伝達していますね．このように物体力といえども身体どうしの接触力として伝達されています．下の人に伝える接触力（上に乗っている人の体重＋自分の体重）は，次に述べる内力になります．

もう少し精密には，人体を構成する生体組織の重さ，さらには，それを構成する原子分子の重さ

内力 (internal force) はどういう風にイメージするとよいのでしょうか？，あるいは，反力 (反モーメント）はどうでしょうか？これらは，材料力学の根幹ですので，初回からすでに学んできて，みなさんの大半は理解していると思いますが，この章で扱う応力の勉強に入る前に少し復習しておきましょう．

内と外との間には境目があります．だから，内力というのは界面 (interface) があってはじめて定義されるものです．材料力学では切断法と呼ばれる方法を使います．「斬る」ことによって，内力が見えるのです．



図は，棒の軸力，はりのせん断力，はりの曲げモーメントについて，正の符号を持つ内力が一様に分布している様を示しています．

(a) 外力を示しています．内力は見えていません．ですので，内力を見えるようにするために，内力を求めたい断面（切る場所）を決めます．

(b)2 つに切ります．この段階で，見たかった内力が切断面の外力となって見えます．

(c)(b) では正負が定義しづらいので，内力を求めたい断面で薄くスライスします．そうすることによって，スライスした断面の両面にはたらく力の向きから正負の符号を定義できます．面の法線に対してどうだこうだという定義ができます．

(d) それでは反力はどうでしょうか，図では，いくらがんばっても，『端部の左側』を見ること

せん断力が作用する真ん中の構造は静力学的に安定な釣り合い状態にはないので，例として不適当かもしれませんが，ここでは簡単のため例としてあえて載せています．違和感を感じたらそれは皆さんの理解が進んでいる証拠です．せん断力が一様に分布する場では必ず曲げモーメント分布が現れるので，せん断力だけの分布というのは本来ありえません．せん断力と曲げモーメントが微分と積分の関係にあることからも明らかです．

ができません (特に，材料力学では，端部のややこしい応力分布を議論しません．問題にしません.)．そこで，左からみるのはあきらめて以下のように理解しましょう．反力というのは，限りなく支点に近づけたところで，(c) のスライス作業を行うことに対応します．切り取った左側の残りの部分は右向きの面が見えていますが，むしろ薄くスライスした面の左側にはたらく力を反力とみるのです．また，切り取った左側の残りの部分の右向きの面に「見えている」外力につりあうために，『端部の左側に』見えているであろう外力としての反力を想像できます.

5.2 応力

切り取った面にはたらく力は一様（断面のいたるところで同じ分布でしょうか？），実際には，応力ベクトル（単位面積あたりの分布荷重の意味です）は断面の位置によって値や方向が異なります．断面にはたらく軸力やせん断力や曲げモーメントは，その特徴を失わないように配慮しながら平均化することに相当します．統計学でいうと，軸力やせん断力は 0 次のモーメント，曲げモーメントは 1 次のモーメントに相当します.

応力ベクトルは，分布荷重の大きさと方向を持つ（文字通り）ベクトル量です．しかしながら，同じ点に対しても，切断面のとりかたに依存します.

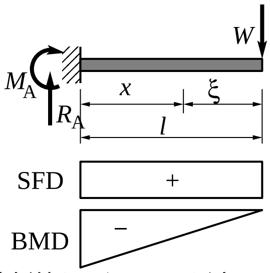
切断面 (法線ベクトル n) のとりかたによって，応力ベクトル $\boldsymbol{t}$ がどのように変化するかを考えてみよう.

■ 座標軸の向きと符号について ■

材料力学では，通常，x 軸を右向き，y 軸を下向きにとります（つまり，右手系の座標系ならば，z 軸は紙面の向こう側に向いています）．他の学問分野では，x 軸が右向き，そして，y 軸は上向きであり，z 軸が紙面垂直に手前に向いています．この違いが，初学者に混乱をきたすもとにもなっているように思います．

材料力学は歴史的に見て構造力学に端を緒しているので，重力の方向（下向き）と深く関係しています．この座標系を考えると荷重や変位（たわみ）が大抵の問題で「正」の値になることに由来しているのだと思います．

重力の方向の変位（たわみ）を正にとることが一般的です．また，モーメントを「水がたまる向き」を正にとることも一般的です．ただし，本によって微妙に定義が異なる場合があります．また，せん断力とたわみ角については，注意が必要です．以下に自明な例を一つ挙げます．



右向きの座標 x	左向きの座標 ξ
$\mathrm{d}F(x)/\mathrm{d}x = -w(x)$	$\mathrm{d}F(\xi)/\mathrm{d}\xi = w(\xi)$
$\mathrm{d}M(x)/\mathrm{d}x = F(x)$	$\mathrm{d}M(\xi)/\mathrm{d}\xi = -F(\xi)$
$\mathrm{d}\theta(x)/\mathrm{d}x = -M(x)/EI$	$\mathrm{d}\theta(\xi)/\mathrm{d}\xi = M(\xi)/EI$
$\mathrm{d}y(x)/\mathrm{d}x = \theta(x)$	$\mathrm{d}y(\xi)/\mathrm{d}\xi = -\theta(\xi)$

右向きに座標軸をとります．原点はどこでもいいのですがここでは A 端から x をとります．その場合，荒っぽく言えば，「せん断力→曲げモーメント→たわみ角→たわみ」は，積分「たわみ→たわみ角→曲げモーメント→せん断力」は，微分に相当します．[*a] 一方，左向きに座標軸をとります．この場合も原点はどこでもいいのですがここでは B 端から ξ をとります．$x + \xi = l$ ですから，形式的に $\mathrm{d}x + \mathrm{d}\xi = 0$ の関係がありますので，奇数回の微分では，符号が逆転します．もし，曲げモーメントとたわみとのみが定義される量で，せん断力およびたわみ角は，それぞれ，曲げモーメントおよびたわみの座標に対する変化率（座標値が増えると値が大きくなる方向を正）として定義されるとすると，せん断力およびたわみ角は座標のとりかたに依存して符号が変化することになります[*b]．ここでは，はりを右向きに座標軸 x をとった場合に，座標値が増えると値が大きくなる方向を正となるように考えることにします．そうすると，符号に対する曖昧さ，柔軟さは排除されます．そうして考えたのが，上の表の関係 (すなわち $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}\xi$ の関係を考慮) です．この関係を使って直接積分した結果を示します．

せん断力：	$F(x) = W,$	$F(\xi) = W$
曲げモーメント：	$M(x) = W(x - l),$	$M(\xi) = -W\xi$
たわみ角：	$\theta(x) = \dfrac{W}{2EI}x(2l - x),$	$\theta(\xi) = \dfrac{W}{2EI}W(l - \xi)(l + \xi)$
たわみ：	$y(x) = \dfrac{W}{6EI}x^2(3l - x),$	$y(\xi) = \dfrac{W}{6EI}W(2l + \xi)(l - \xi)^2$

となります．それぞれの ξ に対する関数に，$\xi = l - x$ を代入すれば，符号も含めて x に対する関数値と一致し，SFD, BMD については図のとおりであることがわかります．もし，上の表を使わずに，座標 ξ についても，座標 x と同じ微分積分の関係にあるとすると，奇数回の微分積分，すなわち，せん断力とたわみ角の符号が逆になることになります．

補足ですが，x と ξ のどちらがよいかは意見の分かれるところかもしれません．もしカスチリアーノの定理を使う場合には，曲げモーメントの式がなるべくなら単純な表現で書かれている方がうれしいので ξ に軍配があがるような気がしますし，直接積分で，たわみ，たわみ角が固定端 A で零という条件を考えやすいのは x のような気がしますね．

[*a] ただし，力を変形との換算で，ばね定数に相当する曲げ剛性 EI を考慮しなければなりませんが. . .

[*b] どのように定義しても本質は変わらないわけですが，他人に見てもらうことを前提とする設計書や報告書，論文，グループでの討論などの利便性を考えるとある程度は約束を決めておいた方がいいのも事実です．

5.3 応力テンソルと応力ベクトル

応力テンソル (stress tensor)

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \tag{157}$$

は，物体内のある点の内力の状態を表現する一つの指標と考えましょう．

応力テンソルは 2 階のテンソルなので, ベクトル (1 階のテンソル) とは違った座標変換規則に従います. この時点ではテンソルの性質には具体的に触れないことにします.

一方，**応力ベクトル** (stress vector) はすでに勉強したように，物体内の点 P を通る断面 (cross section) に，点 P の近傍に一様とみなせる程度に小さい面積素 (surface element) を考えたときに，その面積素にはたらく分布荷重のことです．単位面積あたりの力として定義されるベクトルです．一般に，応力ベクトルは断面に垂直とは限りません，力（ベクトル）ですので，断面に垂直な方向と断面に平行な方向に分解することができ，それぞれ，垂直応力 (normal stress)，せん断応力 (shear stress) と言います．せん断応力は断面内に設けた座標系に対してさらに分解することができます．

応力テンソルと，断面にはたらく**応力ベクトル** (stress vector) の関係をみていくことにし，理解を深めましょう．

応力テンソルの各成分は，x 軸に垂直な断面にはたらく応力ベクトル $\boldsymbol{t}^{(x)}$ の，x, y, z 方向成分を，それぞれ，$t_x^{(x)}, t_y^{(x)}, t_z^{(x)}$ とすると，$t_x^{(x)} = \sigma_x, t_y^{(x)} = \tau_{xy}, t_z^{(x)} = \tau_{xz}$ であり，y 軸に垂直な断面にはたらく応力ベクトル $\boldsymbol{t}^{(y)}$ の，x, y, z 方向成分を，それぞれ，$t_x^{(y)}, t_y^{(y)}, t_z^{(y)}$ とすると，$t_x^{(y)} = \tau_{yx}$, $t_y^{(y)} = \sigma_y, t_z^{(y)} = \tau_{yz}$ であり，z 軸に垂直な断面にはたらく応力ベクトル $\boldsymbol{t}^{(z)}$ の，x, y, z 方向成分を，それぞれ，$t_x^{(z)}, t_y^{(z)}, t_z^{(z)}$ とすると，$t_x^{(z)} = \tau_{zx}, t_y^{(z)} = \tau_{zy}, t_z^{(z)} = \sigma_z$ であるとして定義されていると考えてください．

応力の成分表記は，式 (176) のものとしますが，時と場合によって，以下のようにさまざまな表現方法があります．

$$\begin{aligned}
&\sigma_{xx} = \sigma_x = \tau_{xx} = \tau_x = \sigma_{11} = ... \\
&\sigma_{yy} = \sigma_y = \tau_{yy} = \tau_y = \sigma_{22} = ... \\
&\sigma_{zz} = \sigma_z = \tau_{zz} = \tau_z = \sigma_{33} = ... \\
&\sigma_{yz} = \tau_{yz} = \sigma_{23} = ... \\
&\sigma_{zx} = \tau_{zx} = \sigma_{31} = ... \\
&\sigma_{xy} = \tau_{xy} = \sigma_{12} = ... \\
&\sigma_{zy} = \tau_{zy} = \sigma_{32} = ... \\
&\sigma_{xz} = \tau_{xz} = \sigma_{13} = ... \\
&\sigma_{yx} = \tau_{yx} = \sigma_{21} = ...
\end{aligned}$$

なお，通常，せん断応力の成分には，

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \qquad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx} \tag{158}$$

という対称性があります．このことから，独立な成分は実質 6 つであるとみなせる場合には，

微小要素のモーメント (角運動量) の釣り合いから導かれます.

$$\begin{aligned}
&\sigma_x = \sigma_{11} \to \sigma_1 \\
&\sigma_y = \sigma_{22} \to \sigma_2 \\
&\sigma_z = \sigma_{33} \to \sigma_3 \\
&\tau_{yz} = \tau_{zy} = \sigma_{23} = \sigma_{32} \to \sigma_4 \\
&\tau_{zx} = \tau_{xz} = \sigma_{31} = \sigma_{13} \to \sigma_5 \\
&\tau_{xy} = \tau_{yx} = \sigma_{12} = \sigma_{21} \to \sigma_6
\end{aligned}$$

のような Voigt 記号として，表現されることがあります．

つまり，$11 \to 1$, $22 \to 2$, $33 \to 3$, $23, 32 \to 4$, $31, 13 \to 5$, $12, 21 \to 6$, とします.

5.4 2 次元の応力

簡単のため，$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zz} = \tau_{zy} = 0$ とし，2 次元 ($O - xy$ 座標系) を考えて，応力テンソル

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \tag{159}$$

で書かれる応力状態にある点 P を考えよう．

点 P を通る断面の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ とすると，断面にはたらく応力ベクトル $\boldsymbol{t}$ は,

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}; \qquad t_i = \sum_{i=1}^{2} \sigma_{ij} n_j \quad (i = 1, 2) \tag{160}$$

で与えられます．この関係を**コーシーの応力公式** (Cauchy's stress formula) といいます．

x 軸に垂直な面を θ だけ z 軸まわりに右ねじの方向（紙面反時計方向）に回転させた断面では，$\boldsymbol{n} = (\cos\theta, \sin\theta)$ となります．この断面を断面 $\boldsymbol{n}$ と呼ぶことにします．断面 $\boldsymbol{n}$ にはたらく応力ベクトルは,

$$\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \cos\theta + \tau_{xy} \sin\theta \\ \tau_{xy} \cos\theta + \sigma_y \sin\theta \end{bmatrix} \tag{161}$$

です．この応力ベクトルの成分 t_x, t_y は，それぞれ，$O - xy$ 座標系からみた x 方向，y 方向成分です．

一方，いま私たちが知りたいのは，応力ベクトルの断面 $\boldsymbol{n}$ に垂直な方向の成分（垂直応力）と平行な方向の成分（せん断応力）です．そこで，法線方向を x' として，$O - xy$ からの右手系での変換により，$O - x'y'$ を考えよう．$O - xy$ 座標系，および，$O - x'y'$ 座標系の基底ベクトルをそれぞれ，$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y$，および，$\boldsymbol{e}'_x, \boldsymbol{e}'_y$ とすると，応力ベクトル $\boldsymbol{t}$ の成分は，$\boldsymbol{t} = t_x \boldsymbol{e}_x + t_y \boldsymbol{e}_y = t'_x \boldsymbol{e}'_x + t_y \boldsymbol{e}'_y$ と変換されます．この，断面 $\boldsymbol{n}$ にはたらく応力ベクトル $\boldsymbol{t}$ の，$O - x'y'$ 系での，x', y' 方向の成分 t'_x と，t'_y は，それぞれ，垂直応力 σ_n と，τ に対応します（教科書でいう，σ_θ と $\tau_\theta = -\tau'_\theta$ です）．

応力テンソルに含まれる情報から，断面（の法線の向き）を指定することによって，その断面にはたらく応力ベクトルを取り出す公式です．みなさん (工学部 2 年生) の既に学んできた知識の範囲内でこの式が正しいことを証明するためには，材料力学の教科書に書かれている応力成分の変換を示す手順に依ることと同じになるので，中谷の話の進め方が少々おかしいのですが，ここでは，まずこの公式が成立すると仮定して一般的な教科書に載っているものと同様の応力に関する公式が導かれることを示し，結果として公式の正しさを示すことにします．

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \sigma_n \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t'_x \\ t'_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \cos\theta + \tau_{xy} \sin\theta \\ \tau_{xy} \cos\theta + \sigma_y \sin\theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy} \cos\theta \sin\theta \\ -(\sigma_x - \sigma_y) \cos\theta \sin\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{162}$$

と変換されます．

例えば，x 軸に垂直な平面では，$\theta = 0$ です．$\boldsymbol{n} = (1, 0)$ ですので,

$$\begin{bmatrix} \sigma_n \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \tag{163}$$

となります．同様に，y 軸に垂直な平面では，$\theta = \pi/2$ で，$\boldsymbol{n} = (0, 1)$ ですので,

$$\begin{bmatrix} \sigma_n \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_y \\ -\tau_{xy} \end{bmatrix} \tag{164}$$

です．せん断応力の符号にマイナスがついていることについては後で触れます．

さて，式 (162) を，注意深く観察すると，

$$\begin{bmatrix} \sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \tag{165}$$

であることがわかります．せん断応力について $\tau' = -\tau$, $\tau'_{xy} = -\tau_{xy}$ とプライム ($'$) をつけて逆の向きで定義すると，

$$\begin{bmatrix} \sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \\ \tau' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \\ \tau'_{xy} \end{bmatrix} \tag{166}$$

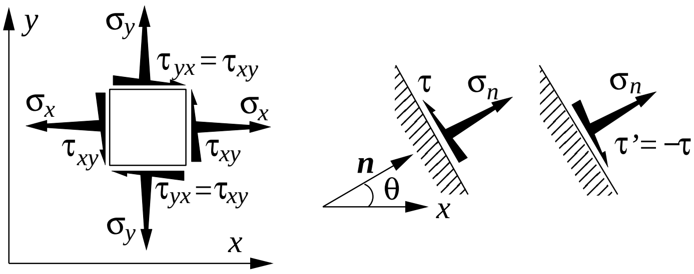
縦軸に τ', 横軸に σ_n の座標系を考えると，(σ_n, τ') は，

$$\begin{array}{ll} \text{中心} & \left(\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y), 0\right) \\ \text{半径} & \sqrt{\left(\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{array} \tag{167}$$

の円上の点であることがわかります．この円のことを**モールの応力円**といいます．

このようにせん断応力に逆の符号を考えた理由のひとつは，断面の傾き θ と，(σ_n, τ') 平面での応力円の位相角 2θ の回転方向（符号）を一致させたいからです．

ここで，おさらいもかねて，せん断応力に対する符号について考えましょう．3 次元応力の成分の定義から，2 次元応力状態においても，微小要素にはたらく応力の成分は下の図の矢印の方向が正と定義されています．



図から，x 軸に垂直な面を θ だけ z 軸まわりに右ねじの方向（紙面反時計方向）に回転させた断面 $\boldsymbol{n}$ にはたらく応力ベクトルを構成する垂直応力 σ_n と τ のせん断応力の方向は，x 軸に垂直な面のそれと同じであることがわかります．つまり，式 (163) では，$(\sigma_n, \tau) = (\sigma_x, \tau_{xy})$ でしたが，式 (164) では，$(\sigma_n, \tau) = (\sigma_y, -\tau_{yx})$ のようにせん断応力の符号に負号（マイナス）がついていた理由が，これらの定義からわかりますね．

モールの応力円の描き方

もういちど，応力テンソル

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \tag{168}$$

で書かれる応力状態にある点を考えよう．x 軸に垂直な面を θ だけ傾けた断面 $\boldsymbol{n} = (\cos\theta, \sin\theta)$ に対して，法線応力 σ_n とせん断応力 τ を求めましょう．これは，式 (162) に代入すると求まりますが，モールの応力円を使って図の助けを借りて求めてみましょう．

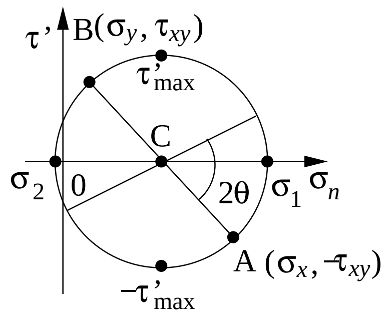
(0) 座標軸 σ_n, τ' を描きます．

(1) 与えられた $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ について，$\tau'_{xy} = -\tau_{xy}$ とし，点 A, B を (σ_x, τ'_{xy}) と $(\sigma_y, -\tau'_{xy})$ の位置にとります．すなわち，点 A, B は $(\sigma_x, -\tau_{xy})$ と (σ_y, τ_{xy}) の位置にとることになります．

(2) 点 A, B を結ぶ直線と σ_n 軸との交点 C とします．C はモールの応力円の中心であり，$(\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y), 0)$ です．

(3) 点 C を中心に，点 A, B を通る半径 $\sqrt{(\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y))^2 + \tau_{xy}^2}$ の円を描きます．

(4) 線分 CA を反時計まわりに角度 2θ だけ回転した円周上の点 D の座標が，求める (σ_n, τ') です．つまり，x 軸に垂直な面を θ だけ傾けた断面 $\boldsymbol{n} = (\cos\theta, \sin\theta)$ に対して，法線応力 σ_n とせん断応力 τ は，$\sigma_n, \tau = -\tau'$ です．



ここで，モールの応力円に関する性質と補足事項について述べておきます．

- x 軸に垂直な断面のせん断応力と，y 軸に垂直な断面のせん断応力の値はともに τ_{xy} となり等しいのですが，モールの応力円ではその定義から正負に注意してプロットしなければなりません．
- 垂直応力 σ_n の最大値 σ_1，最小値 σ_2 は，主応力と呼ばれ，主応力が作用する面を主応力面といいいます．これらの面は互いに直交しており，せん断応力 τ は零となります．
- せん断応力 τ の最大値 $\tau_{\max}$ は，最大せん断応力と呼ばれます．τ_{max} は円の半径に等しく $(\sigma_1 - \sigma_2)/2$ です．また最大せん断応力が作用する面は直交し，いずれにおいても，垂直応力 $\sigma_n = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$ が作用しています．
- $\sigma_1 = \sigma_2$ の時には，モールの応力円は一つの点となり，2 次元応力状態ではせん断応力は生じません．
- $\sigma_x + \sigma_y = 0$ であれば，モールの応力円の中心は $\sigma_n - \tau'$ 座標系の原点と一致し，純粋せん断状態（最大せん断応力が生じる面で垂直応力が零である状態）となります．
- 互いに垂直な任意の 2 つの面上 (モールの応力円では中心を通る直線と円との 2 つの交点に

相当する) での垂直応力 σ_n の和は不変量であり，その値は，$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_{x'} = \sigma_{y'}$ です．

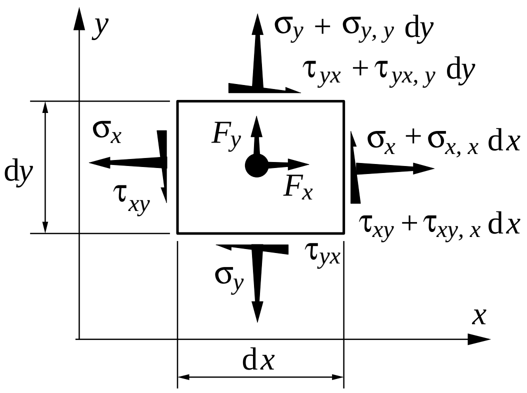
- 2 次元応力状態では，暗黙のうちに $\sigma_z = 0$ を仮定しています．$\tau_{zx} = \tau_{yz} = 0$ の時，σ_z は主応力のひとつです．もし，σ_z が中間主応力 ($\sigma_1 < \sigma_z < \sigma_2$) であれば，いま考えている z 軸まわりの回転で最大せん断応力，最大主応力などの危険断面の議論が完結しますが，σ_z が，最大主応力または最小主応力となる場合には，3 次元的な断面を考えた場合には，より大きな垂直応力やせん断応力が発生する断面が存在することになります．その場合には，σ_1, σ_2, σ_z から，最大主応力と最小主応力を選び出し，それを直径とする円を描いて，最大せん断応力を論じなければなりません．

例題 5.1

モールの応力円を使って，教科書 p.128 (a) 単純引張りの場合，(b) 等二軸引張りの場合，(c) 純粋せん断の場合について，x 軸に垂直な面を θ だけ傾けた断面 $\boldsymbol{n} = (\cos\theta, \sin\theta)$ のとりかたによって，法線応力 σ_n とせん断応力 τ はどのようになるか考えてみよう．また，主応力，最大せん断応力の作用する面とその値を求めてみよう．

5.5 応力の対称性と平衡方程式

微小要素における力のつりあいとモーメントのつりあいを考えよう（下図は z 方向に応力状態が変化しない 2 次元における例を示しています）．



単位体積あたりの物体力の x, y 方向成分を F_x, F_y, F_z とおくと，x 方向の力のつりあいは，

$$
\begin{aligned}
&\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \sigma_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&+ \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \tau_{yx}\mathrm{d}z\mathrm{d}x \\
&+ \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \tau_{zx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + F_x \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0
\end{aligned}
\tag{169}
$$

となります．これより，

$$
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0 \tag{170}
$$

を得ます．同様にして，

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y = 0 \tag{171}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0 \tag{172}$$

を得ます．これらの各方向の力のつりあいから得られる関係を応力の平衡方程式 (つりあい方程式）といいます．

一方，微小要素の中心を通る z 軸まわりのモーメントのつりあい，

$$\begin{aligned}&\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}x}{2} + \tau_{xy}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}x}{2}\\ &-\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}y}{2} - \tau_{yx}\mathrm{d}z\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}y}{2} = 0\end{aligned} \tag{173}$$

から，高次の項を無視すると，

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \tag{174}$$

を得ます．同様に，

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \qquad \tau_{zx} = \tau_{xz} \tag{175}$$

を得ます．これらの関係を，せん断応力の対称性，共役性といいます．

5.6 ひずみと変位

変形の状態を記述するために**ひずみテンソル** (strain tensor)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{176}$$

を導入しましょう．

ただし，各成分は，変位 u_x, u_y, u_z との間に以下の関係があるものとします．

$$\begin{aligned}&\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z},\\ &\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right), \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right), \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right)\end{aligned} \tag{177}$$

さて，ひずみテンソルの工学的意味を明かにするために，まず，x 軸方向の単軸引張変形を考えましょう．

原点が固定されていて長さ l の棒が，Δl だけ伸びたとき，座標 x の点での変位は，

$$u_x = \frac{\Delta l}{l}x \tag{178}$$

ゆえに，

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\Delta l}{l} \tag{179}$$

一方，これは，つまり，伸びを元の長さで除した値になります．

次に，高さ l のブロックが，せん断応力を受けて微小な角度 θ だけせん断変形を受ける場合を考えましょう．

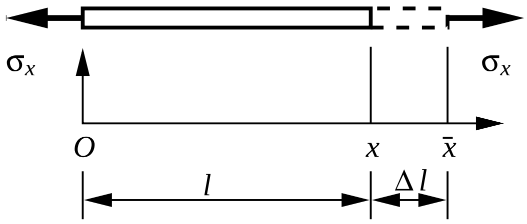


図 3: 棒の引張変形

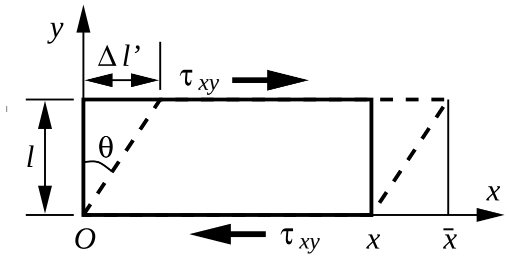


図 4: ブロックのせん断変形

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial(\Delta l'/l \cdot y)}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\Delta l'}{l} \tag{180}$$

となります．せん断変形に対しては，せん断量を角度で表して，

$$\gamma_{xy} = \theta \approx \tan\theta = \frac{\Delta l'}{l} \tag{181}$$

として定義していました．

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} \tag{182}$$

さらに一般的には，

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{yx}, \\ \varepsilon_{yz} &= \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2}\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{zy}, \\ \varepsilon_{zx} &= \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_{zx} = \frac{1}{2}\gamma_{xz} \end{aligned} \tag{183}$$

です．このように，ひずみテンソルのせん断成分は，角度の変化で表される**工学ひずみ** (engineering strain) の半分の値を持つことがわかります．

もういちど，工学ひずみに対する**ひずみ–変位関係** (strain–displacement relation) を示しておきます．

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right), \gamma_{yz} = \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right), \gamma_{zx} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) \tag{184}$$

工学ひずみにおいても明かに対称性があることがわかります．

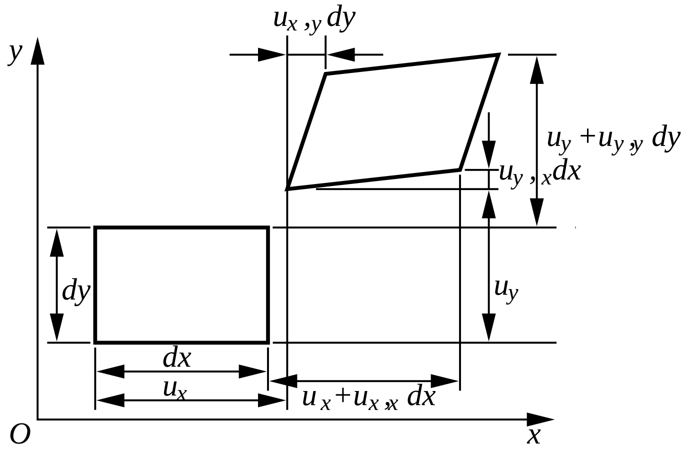


図 5: 微小直方体の変形

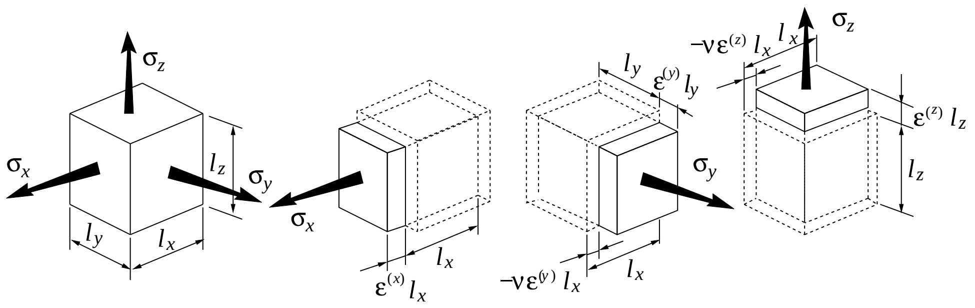
変形前に，dx, dy, dz の稜をもつ直方体が，図のように変形後平行六面体になった場合を考えて，工学ひずみ–変位関係を導きましょう．

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{(u_x + \partial u_x/\partial x \cdot dx) - u_x}{dx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \\
\varepsilon_y &= \frac{(u_y + \partial u_y/\partial y \cdot dy) - u_y}{dy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u_y/\partial x \cdot dx}{dx} + \frac{\partial u_x/\partial y \cdot dy}{dy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}
\end{aligned}
\tag{185}
$$

同様にして，$\varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ も得られます．

5.7 応力ひずみ関係

図のように l_x, l_y, l_z の直方体に $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ の垂直応力が同時にはたらいているとしましょう．



この問題の解は，重ね合わせの原理によれば，$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ のみが作用する 3 つの問題の解の重ね合わせとして求めることができます．等方弾性体を考えます．

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ のみが作用する 3 つの問題，それぞれの，x 軸，y 軸，z 軸方向の垂直ひずみは，ヤング率 (縦弾性係数)E を用いて，

$$
\varepsilon^{(x)} = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon^{(y)} = \frac{\sigma_y}{E}, \quad \varepsilon^{(z)} = \frac{\sigma_z}{E} \tag{186}
$$

と表すことができます．それぞれの伸びは，$\varepsilon^{(x)}l_x, \varepsilon^{(y)}l_y, \varepsilon^{(z)}l_z$ となります．一方，σ_y のみが作用する問題で，x 方向には，ポアソン比 ν の分だけ縮みます (ポアソン収縮と呼ばれます)．すなわち，伸びは $-\nu\varepsilon^{(y)}l_x$ です．同様に，σ_z のみが作用する問題では，x 方向の伸びは，$-\nu\varepsilon^{(z)}l_x$ です．

したがって，重ね合わせの原理により，元の問題の x 方向の垂直ひずみは，

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left\{\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right\} \tag{187}$$

となります．同様に，y，z 方向に対して，

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left\{\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\right\} \tag{188}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left\{\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right\} \tag{189}$$

となります．一方，せん断ひずみに対しては，せん断弾性係数 (横弾性係数)G により，

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}, \qquad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}, \qquad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx} \tag{190}$$

となります．この関係を一般化フックの法則といいます．

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_y + \varepsilon_z)\right\} \\
\sigma_y &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_z + \varepsilon_x)\right\} \\
\sigma_z &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\right\}
\end{aligned} \tag{191}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \qquad ,\tau_{zx} = G\gamma_{zx}, \qquad ,\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \tag{192}$$

5.8 モールのひずみ円

ひずみテンソルの成分は応力テンソルの成分とおなじ変換規則にしたがいます．したがって，$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ で表されるひずみ状態が，x 軸と反時計回りに θ の角度なす方向 x' の垂直ひずみ成分 ε_n とせん断ひずみ成分 γ を求めるには，せん断ひずみ成分を 1/2 として，ε_n を横軸に，$\gamma'/2 = -\gamma/2$ を縦軸にとり，モール円を描きます．この円のことをモールのひずみ円といいます．

工学ひずみ表記のせん断ひずみは，テンソル表記のせん断ひずみの 2 倍の値になります．プライム（つまりマイナス）をつけるところも応力円のときと同じです．

5.9 さまざまな弾性係数

せん断弾性係数 G は，縦弾性係数 E とポアソン比 ν を用いて，

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{193}$$

のように表されます（次の例題）．

例題 5.1

$\sigma_x = \sigma, \sigma_y = -\sigma, \tau_{xy} = 0$ という応力状態を考える．

(1) ヤング率 E とポアソン比 ν で表される材料に対して，ひずみ成分 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ を一般化フックの法則より求め，応力値 σ, ヤング率 E，ポアソン比 ν を用いて表しなさい．

(2) モールの応力円を用いて，x 軸から 45 度傾いた断面にはたらく垂直応力 σ_n とせん断応力 τ を応力値 σ で表しなさい．垂直応力 σ_n が零であることを確認しなさい．

(3) (1) で求めたひずみ成分に対して，モールのひずみ円を用いて，x 軸から 45 度傾いた方向の垂直ひずみ ε_n と，せん断ひずみ γ をそれぞれ求め，応力値 σ, ヤング率 E，ポアソン比 ν を用いて表しなさい．垂直ひずみ ε_n が零であることを確認しなさい．

(4) せん断弾性係数 G の定義が $\tau = G\gamma$ であることと，(2) で求めた τ，(3) で求めた γ から，G を E と ν とを用いて表しなさい．

変形における体積 V の変化 ΔV は近似的に, 体積ひずみ $\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ で $\Delta V = \varepsilon V$ で表されます．**体積弾性係数** (bulk modulus) K は, 体積ひずみ ε と平均応力（静水圧応力）$\sigma = (\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)/3$ ととを関係づける弾性定数であり,

$$\sigma = K\varepsilon \tag{194}$$

で定義されます．一般化フックの法則から,

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{195}$$

であることが容易にわかります．

一般には，応力テンソルとひずみテンソルの関係は,

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{196}$$

と書くことができます．C_{ijkl} は弾性テンソルと呼ばれる 4 階のテンソルで，81 個の成分を持っています．一方，等方性が仮定できる場合には，座標変換に対する不変性から,

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{197}$$

という，λ と μ という 2 つのパラメーターで記述されます．ここで，δ_{ij} は，クロネッカーのデルタと呼ばれ，$i = j$ のとき 1，$i \neq j$ のとき 0 となります．

λ, μ は，**ラーメの定数** (Lamé's constants) と呼ばれます．このように等方弾性体の独立な弾性定数は 2 つになります．ラーメ定数のひとつ μ はせん断弾性係数 G と同じ意味になります．

以上のように，様々な弾性係数が定義されていますが，それらは，以下のように，互いに独立な 2 つの量で記述することができます．

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} = \frac{\mu(E-2\mu)}{3\mu-E} = K - \frac{2}{3}\mu = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ &= \frac{3K\nu}{1+\nu} = \frac{3K(3K-E)}{9K-E}\end{aligned} \tag{198}$$

$$\mu(=G) = \frac{\lambda(1-2\nu)}{2\nu} = \frac{3}{2}(K-\lambda) = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)} = \frac{3KE}{9K-E} \tag{199}$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} = \frac{\lambda}{3K-\lambda} = \frac{E}{2\mu} - 1 = \frac{3K-2\mu}{2(3K+\mu)} = \frac{3K-E}{6K} \tag{200}$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu} = \frac{9K(K-\lambda)}{3K-\lambda} = 2\mu(1+\nu) \\ &= \frac{9K\mu}{3K+\mu} = 3K(1-2\nu) \end{aligned} \tag{201}$$

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{\lambda(1+\nu)}{3\nu} = \frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)} = \frac{\mu E}{3(3\mu-E)} = \frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{202}$$

ポアソン比が 1/4 という特殊な値の時には，$\lambda = \mu$ となり，弾性体の方程式はかなり簡単化される．また，$\nu = 1/2$ は，**非圧縮性** (uncompressibility) を示します．G, K が正であるという条件から，ポアソン比は

$$-1 < \nu < \frac{1}{2} \tag{203}$$

でなければならないという性質が導かれます．

負のポアソン比を持つ材料をイメージしてみよう．何か面白い使い方があるか考えてみよう．

5.10 平面ひずみと平面応力

直角座標系 x, y, z において，変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ の成分のうち，たとえば u_z がいたるところ 0 であり，他の成分 u_x, u_y が，座標 x, y のみの関数であるとき，**平面ひずみ** (plane strain) の状態にあるといいます．すなわち，

$$u_x = u_x(x,y), \quad u_y = u_y(x,y), \quad u_z = 0 \tag{204}$$

です．このとき，ひずみが零でないものは，

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \tag{205}$$

であり，これらは，z に無関係となります．

このとき，応力ひずみ関係は，

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon_y\right) \\ \sigma_y &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon_x\right) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \end{aligned} \tag{206}$$

となります．これをひずみ $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ について解くと，ひずみと応力の関係は，

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y\right) \\ \varepsilon_y &= \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x\right) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \end{aligned} \tag{207}$$

となります．

平面ひずみのときは，z 座標に関連するひずみ成分が零になります．なので，応力をひずみの関数としてみたときの式で z 座標に関連するひずみ成分を零とします．逆に，ひずみを応力の関数としてみるときには，それをひずみ成分に対して解きます (逆関係を求めます)．

また，z 方向の変位は零ですが，その方向の応力 σ_z は零でなく，

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \tag{208}$$

となります．

一方，応力成分のうち，

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \tag{209}$$

が成り立つとき，その物体は**平面応力** (plane stress) の状態にあるといいます．一般化フックの法則より，

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \tag{210}$$

です．これを，$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ について解くと，応力とひずみの関係が，

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \tag{211}$$

となります．

また，z 方向の応力は零ですが，その方向のひずみ ε_z は零でなく，

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \tag{212}$$

となります．

平面応力のときは，z 座標に関連する応力成分が零になります．なので, 平面ひずみとは逆に, ひずみを応力の関数としてみたときの式で z 座標に関連する応力成分を零とします．応力をひずみの関数としてみるときには，それを応力成分に対して解きます（逆関係を求めます)．

6 設計にかかわるねじり問題

6.1 伝動軸の問題

6.1.1 伝動軸

伝動軸とは回転によってトルク (ねじりモーメントと同義) を伝達する軸のことです．トルク T Nm をうけて毎分 N 回転 (N r.p.m. という) している伝動軸が伝える動力 H W は，この軸が毎秒 $N/60$ 回転することから，

$$H = \frac{2\pi NT}{60} \tag{213}$$

で与えられます．動力 (仕事率 ; 単位時間当たりの仕事) の SI 単位は W(ワット) で，1W = 1J/s = 1Nm/s であるが，伝動軸が伝える動力の単位としては，従来からの慣習でいまでも馬力で表示することがしばしばあり，1PS=735.5W(仏馬力)，1HP=745.7W(英馬力) です．

英国の馬の方が力があったのかなぁ．

この関係から，回転数 N rpm と伝達動力 H 馬力が与えられているとねじりモーメント T が計算できます．

中実丸棒の伝動軸の設計では，こうして与えられたトルク T から計算される，最大せん断応力と，ねじれ角に対して，

- 最大せん断応力に比べてが材料の許容応力に比べて十分小さいか？
- ねじれ角が所定の値に比べ小さいか？ (剛性は十分か？)

という観点から検討する必要があります．

さらには，キー溝の応力集中などの問題もあるね．

伝動軸にトルクを伝える機械要素のうち代表的なものとして，

1. プーリー (ベルト車)
2. 歯車
3. クランクシャフト

があります．

【演習 3.1】

内外径の比が 1 : 2 である中空丸軸が毎分 100 回転して 8000 馬力 (PS) を伝達しうるように内外径を定めよう．ただし，材料の許容せん断応力を 30MPa とします．

【演習 3.2】

図に示す伝動軸において，プーリー B が毎分 175 回転で 100PS を受け，それぞれ 40PS および 60PS をプーリー A と C へ伝えるとき，軸の直径を定めよう．また，プーリーの厚さを無視できるとして，この軸のねじれ角 ϕ を求めよう．ただし，材料の許容せん断応力を $\tau_{\mathrm{a}} = 10$MPa, 横弾性係数を $G = 100$GPa とします．

6.2 コイルばね

コイルばねは，コイル半径 R，素線の直径 d，らせん角 α で特徴づけられます．ばねがコイルの中心軸に沿う力 W による引張を受けるとき，素線の任意断面において

引張軸力	$N = W\sin\alpha$
せん断力	$F = W\cos\alpha$
曲げモーメント	$M = WR\sin\alpha$
ねじりモーメント	$T = WR\cos\alpha$

6.2.1 密巻コイルばね

らせん角 α の小さいコイルばねで，$\sin\alpha \approx 0, \cos\alpha \approx 1$ と考えることができるので，せん断力 $F = W$ と，ねじりモーメント $T = WR$ のみを考えれば十分です．変形と考えることができます．

d/R が大きくない場合を考えよう．このとき，素線の曲率の影響を無視することができるとします．

まず，素線にはたらく応力について，検討します．ねじりモーメント T によるせん断応力の最大値は表面に生じ，

$$\tau_1 = \frac{T}{I_p}\frac{d}{2} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16WR}{\pi d^3} \tag{214}$$

また，せん断力 F によるせん断応力の最大値は,

$$\tau_1 = \frac{F}{A}\frac{4}{3} = \frac{16F}{3\pi d^2} = \frac{16W}{3\pi d^2} \tag{215}$$

$\tau_{\mathrm{mean}} = F/A$ に乗じる係数は円形断面では 4/3，長方形断面では 3/2 になります．

せん断応力は，素線の内側で同じ方向にはたらき，外側で反対方向にはたらくから，せん断応力の最大値は，素線の内側

$$\tau_{\max} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{16WR}{\pi d^3}\left(1 + \frac{d}{3R}\right) \tag{216}$$

となります．この式から，d/R が十分小さければせん断力 F の効果は無視できることがわかります．

次に変形を考えよう．簡単のためねじりモーメント T のみの効果を考えます．ねじりモーメント T による素線の単位長さあたりのねじれ角 (比ねじれ角) θ は,

$$\theta = \frac{T}{GI_p} = \frac{32T}{G\pi d^4} \tag{217}$$

長さ $R\mathrm{d}\phi$ に対するねじれ角は $\theta R\mathrm{d}\phi$ であり，コイルの中心の軸方向変位 $\mathrm{d}\delta$ は,

$$\mathrm{d}\delta = R\theta R\mathrm{d}\phi = \frac{T}{GI_p}R^2\mathrm{d}\phi = \frac{32WR^3}{G\phi d^4}\mathrm{d}\phi \tag{218}$$

となります．巻数 n のコイル全体の伸び δ は,

$$\delta = \int_0^{2\pi n}\frac{32WR^3}{G\phi d^4}\mathrm{d}\phi = \frac{64nWR^3}{Gd^4} \tag{219}$$

6.2.2 疎巻コイルばね

らせん角 α の大きいコイルばねでは，曲げモーメント $M = WR\sin\alpha$ と，ねじりモーメント $T = WR\cos\alpha$ の寄与が支配的です．

疎巻コイルばねでは，せん断力 F による変形は一般に無視できるが，材料の性質によっては考慮する必要があります．

曲げモーメント M により発生する最大応力は,

$$\sigma_1 = \frac{M}{I}\frac{d}{2} = \frac{32M}{\pi d^3} = \frac{32WR\sin\alpha}{\pi d^3} \tag{220}$$

ねじりモーメント T により発生する最大せん断応力は,

$$\tau_1 = \frac{T}{I_\mathrm{p}}\frac{d}{2} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16WR\cos\alpha}{\pi d^3} \tag{221}$$

ここから，設計に必要な最大主応力と，最大せん断応力,

$$\sigma_\mathrm{max} = \frac{16WR}{\pi d^3}(1+\sin\alpha), \quad \tau_\mathrm{max} = \frac{16WR}{\pi d^3} \tag{222}$$

を得ます.

一方，変形については，素線の線素 $\mathrm{d}s$ に対して，$T = WR\cos\alpha$ による回転角は $T\mathrm{d}s/GI_\mathrm{p}$, $M = WR\sin\alpha$ によるたわみ角は，$M\mathrm{d}s/EI$ で与えられるから，コイル軸方向移動量は,

$$\mathrm{d}\delta = R\left\{\left(\frac{T\mathrm{d}s}{GI_\mathrm{p}}\right)\cos\alpha + \left(\frac{M\mathrm{d}s}{EI}\right)\sin\alpha\right\} \tag{223}$$

コイルの軸まわりの回転角は,

$$\mathrm{d}\psi = \left(\frac{T\mathrm{d}s}{GI_\mathrm{p}}\right)\sin\alpha - \left(\frac{M\mathrm{d}s}{EI}\right)\cos\alpha \tag{224}$$

となります.

巻数 n の素線の全長は，$2\pi Rn/\cos\alpha$ であるので,

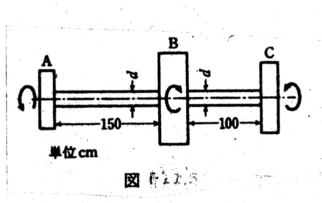
$$\delta = \frac{2\pi nR^3}{\cos\alpha}\left(\frac{\cos^2\alpha}{GI_\mathrm{p}} + \frac{\sin^2\alpha}{EI}\right)W \tag{225}$$

$$\psi = 2\pi nR^2\sin\alpha\left(\frac{1}{GI_\mathrm{p}} - \frac{1}{EI}\right)W \tag{226}$$

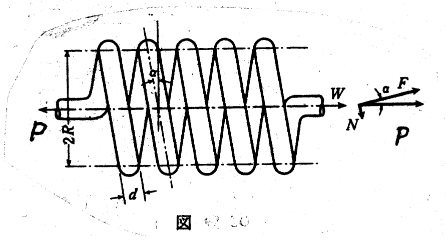
【演習 3.3】 上の疎巻コイルばねの δ をカスチリアーノの定理を用いて求めよう.

【演習 3.4】 上の疎巻コイルばねの一端を固定し，他端にねじりモーメント T_0 を加えるとき，素線の垂直応力とせん断応力の最大値を求めよう．カスチリアーノの定理を用いて，さらに δ と ψ を求めよう．また，W と T_0 を両方加える時，$T_0 = 0$ とすることにより得られた ψ が上の結果と一致することを示そう.

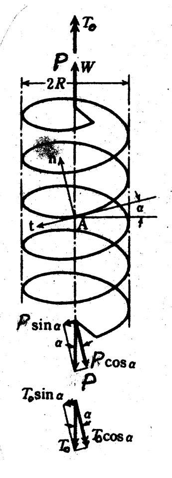
【演習 3.5】 上の疎巻コイルばねの一端を固定し，他端を引張る時，両端における軸まわりの相対回転を拘束した時の伸びを求めよう.



図



図



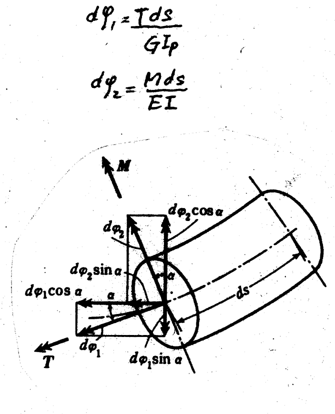


図 12.8

7 柱の圧縮

7.1 剛体棒の圧縮

下端 O が回転支持された長さ L の剛体棒に対して，上端 A から鉛直荷重 P を受ける問題を考えましょう．下端から a の位置 C に水平に 2 本のばねをとりつけたで固定されているとき，A 点の水平変位を u とすると，回転角 θ は,

$$\sin\theta = \frac{u}{L}, \qquad \cos\theta = \sqrt{1-\left(\frac{u}{L}\right)^2} \tag{227}$$

となります．また，A 点の垂直変位 v は

$$v = L(1-\cos\theta) = L - \sqrt{L^2-u^2} \tag{228}$$

となります．C 点での水平方向の変位 δ は,

$$\delta = \frac{a}{L}u \tag{229}$$

です．ばねにによる復元力 F は,

$$F = k\delta = \frac{a}{L}ku \tag{230}$$

となります．O 点まわりのモーメントの釣り合い

$$(F\cos\theta)a - (P\sin\theta)L = 0 \tag{231}$$

から,

$$P = \frac{Fa\cos\theta}{L\sin\theta} = \left(\frac{a}{L}\right)^2 k\frac{\cos\theta}{\sin\theta}u = \left(\frac{a}{L}\right)^2 k\sqrt{L^2-u^2} \tag{232}$$

を得ます．一方，エネルギー的な考え方から考えてみましょう．ばねに蓄えられるひずみエネルギー U_1 は

$$U_1 = \frac{1}{2}k\delta^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{a}{L}\right)^2 u^2 \tag{233}$$

です．一方，荷重 P による外力のポテンシャルエネルギー U_2 は,

$$U_2 = -PL(1-\cos\theta) = -P(L-\sqrt{L^2-u^2}) \tag{234}$$

です．

$$U = U_1 + U_2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{a}{L}\right)^2 u^2 - P(L-\sqrt{L^2-u^2}) \tag{235}$$

つりあい位置はポテンシャルエネルギーが極値をとる必要がありますから,

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}u} = u\left(k\left(\frac{a}{L}\right)^2 - \frac{P}{\sqrt{L^2-u^2}}\right) = 0 \tag{236}$$

すなわち,

$$u = 0, \qquad P = k\left(\frac{a}{L}\right)^2\sqrt{L^2-u^2} \tag{237}$$

となります．2 階微分を $\mathrm{d}^2U/\mathrm{d}u^2$ を考えてみましょう．

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}u^2} = \left(k\left(\frac{a}{L}\right)^2 - \frac{P}{\sqrt{L^2-u^2}}\right) + \frac{1}{2}Pu(L^2-u^2)^{-\frac{3}{2}} \tag{238}$$

となります．$u = 0$ の時の符号を考えると，

$$\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}u^2} > 0, \qquad \text{if} P < P_{\mathrm{cr}} \tag{239}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}u^2} = 0, \qquad \text{if} P = P_{\mathrm{cr}} \tag{240}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}u^2} < 0, \qquad \text{if} P > P_{\mathrm{cr}} \tag{241}$$

(242)

であることがわかります．すなわち，P が，臨界値 (critical value)

$$P_{\mathrm{cr}} = k\left(\frac{a}{L}\right)^2 L \tag{243}$$

未満であれば，安定なつりあい，$P \geq P$ であれば，不安定なつりあいであることがわかります．

【演習 7.1】荷重と変位の関係 $P(u)$ を考えてみよう．荷重 P を増大させていくと，変位 u はどうなるか？何か，幾何的な拘束があればどうなるか考えてみよう．

【演習 7.2】$U(P, u)$ の曲面の形を考えて，つりあいの安定，不安定性を考えてみよう．

【演習 7.3】荷重 $P = 0$ の時のばねの釣り合い位置での u が，$u = u_0$ のような初期不整 (initial imperfection) があるときの，釣り合いについて論じてみよう．