

材料力学2025 シーズン2

第13話 柱の座屈

2025年7月18日（金）

中谷 彰宏

教科書「渋谷陽二，中谷彰宏，材料力学，(2017)，コロナ社」
1, 2, 3, 4, 10, 11章（春学期の授業）を学習し終えて、
5, 6, 7, 8, 9, 12, 13章（夏学期の授業）をこれから学ぶ諸君のために

はりのたわみ：問題の前提・考え方と用語 (復習・再掲)

無負荷時に軸線が直線である**真直はり** (straight beam) が、負荷 (横荷重やモーメント) を受ける場合を考える。慣例として、自重等についても無負荷時には 0 とみなし、横荷重やモーメントなどの負荷を受ける時にあわせて考慮するものとする。また軸線 (中面上の直線) は紙面右方向を正に x 軸 ($y = 0$) とし、鉛直方向に (紙面下方向を正に) y 軸をとることを慣例とする。

運動 (motion) : 座標 $(x, 0)$ の点が、負荷などによって座標 (x_1, y) に移ること

変位 (displacement) : 運動によって定義される相対位置ベクトル $(x_1 - x, y)$ のこと

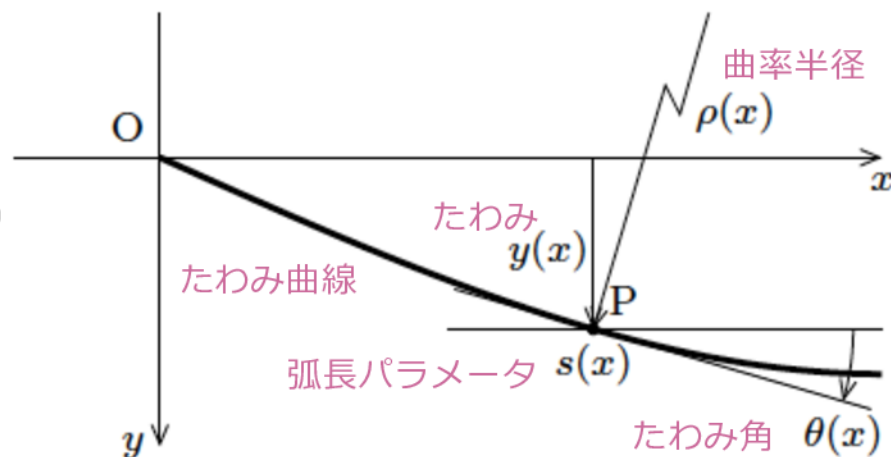
たわみ (deflection) : はりの問題における変位の鉛直方向成分 y のこと (材料力学では、微小変形が仮定できて $x_1 \cong x$ とみなすことができ、変位は y 方向成分 (鉛直方向成分) のみと考える)

たわみ曲線 (deflection curve) : たわみ y を x の関数とみなして表した曲線 $y(x)$ のこと
(弾性曲線 (elastic curve) とよばれる)

たわみ角 (deflection angle) : たわみ曲線上の点 $P(x, y)$ における接線と x 軸のなす角 $\theta(x) = \tan^{-1}(dy/dx)$ のこと

以下では、たわみ曲線上の点 $P(x, y)$ の

曲率 $\kappa(x)$ 、**曲率半径** $\rho(x)$ を議論の起点に、たわみ角、たわみと力学状態との関係性を考えていく。



たわみ曲線の曲率 (復習, 再掲)

曲率 $\kappa(x)$ は、弧長パラメータ $s(x)$ に関するたわみ角の変化と定義される。

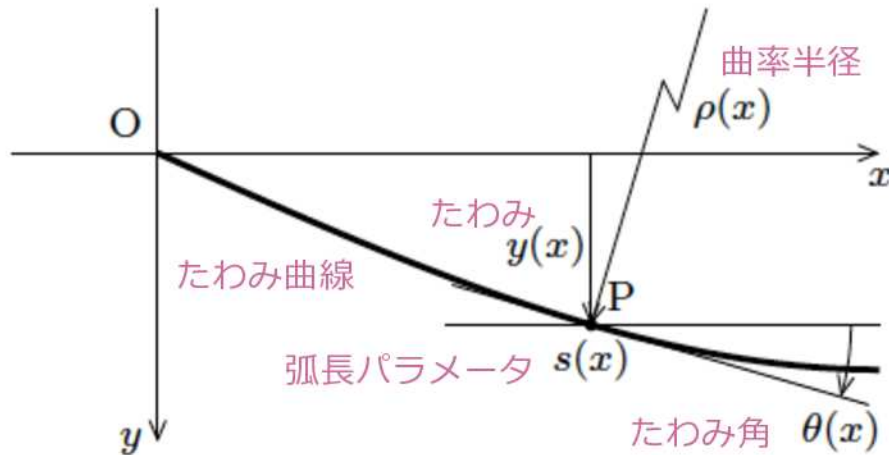
$$\kappa = \frac{d\theta}{ds}$$

一方、

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} \quad \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \cos \theta$$

の関係があるので、曲率は、たわみ曲線の導関数を用いて以下のように表現できる

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \frac{dx}{ds} \\ &= \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}} \end{aligned}$$



たわみ $y(x)$ は、たわみ角 $\theta(x)$ は微小であり、 $y(x) \ll l$ (スパン長など), $dy/dx \ll 1$, $\theta(x) \ll 1$ が仮定できるとき、

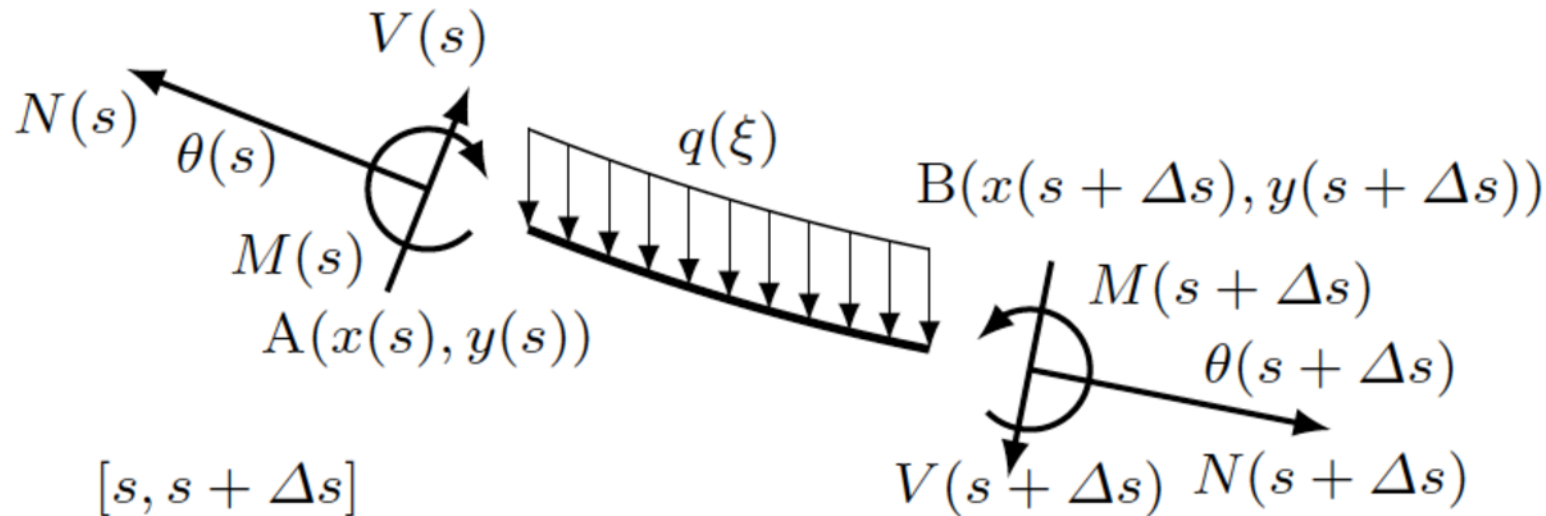
$$\sin \theta \simeq \theta \quad \tan \theta \simeq \theta \quad \cos \theta \simeq 1$$

$$1 + (dy/dx)^2 \simeq 1$$

などに (線形化) 近似でき、以下を得る

$$\kappa = \frac{d^2y}{dx^2}$$

変形後のつりあいを考える（大たわみ問題）



諸量を弧長パラメータ s の関数とし，区間 $[s, s + \Delta s]$ を考える（図）．

簡単のため関数 $f(s)$ とその微分 $df(s)/ds$ を，とくに断らずそれぞれ f, f' などと表記する．

この区間に作用する外力は $q(s)$ のみで，ある種の保存力であり，その作用方向は常に y 方向とする（例えば，重力加速度が y 方向に一定下での単位体積あたりの密度 ρ ，断面積 $A(s)$ の自重 $q(s) = \rho g A(s)$ など）．

変形後のつりあいを考える（大たわみ問題）

軸力について $E(s)A(s)$ は, 十分に大きく, 伸び $\int_s^{s+\Delta s} \sqrt{x'(\xi)^2 + y'(\xi)^2} d\xi - \Delta s$ は 0

曲げについて Bernoulli-Eulerの仮説が成立し

曲率は曲げモーメントに比例

$$\kappa(s) = -\frac{M}{E(s)I(s)}$$

水平 (x) 方向, 鉛直 (y) 方向, モーメントのつり合い

$$N(s + \Delta s) \cos \theta(s + \Delta s) - V(s + \Delta s) \sin \theta(s + \Delta s) - N(s) \cos \theta(s) + V(s) \sin \theta(s) = 0$$

$$N(s + \Delta s) \sin \theta(s + \Delta s) + V(s + \Delta s) \cos \theta(s + \Delta s)$$

$$+ \int_s^{s+\Delta s} q(\xi) d\xi - N(s) \cos \theta(s) - V(s) \sin \theta(s) = 0$$

$$M(s + \Delta s) + \int_s^{s+\Delta s} q(\xi) \{x(s + \Delta s) - x(\xi)\} d\xi - M(s)$$

$$+ \{-N(s) \sin \theta(s) - V(s) \cos \theta(s)\} \{x(s + \Delta s) - x(s)\}$$

$$+ \{N(s) \cos \theta(s) - V(s) \sin \theta(s)\} \{y(s + \Delta s) - y(s)\} = 0$$

変形後のつりあいを考える（大たわみ問題）

積分の平均値の定理

$$\int_s^{s+\Delta s} q(\xi) d\xi = q(\xi_1) \Delta s, \quad \exists \xi_1 \in [s, s + \Delta s]$$

$$\int_s^{s+\Delta s} q(\xi) \{x(s + \Delta s) - x(\xi)\} d\xi = q(\xi_2) \{x(s + \Delta s) - x(\xi_2)\} \Delta s, \quad \exists \xi_2 \in [s, s + \Delta s]$$

Δs で除したあと, 極限 $\Delta s \rightarrow 0$ をとると, 微分の定義から

$$\frac{d}{ds} [N(s) \cos \theta(s) - V(s) \sin \theta(s)] = 0$$

$$\frac{d}{ds} [N(s) \sin \theta(s) + V(s) \cos \theta(s)] + q(s) = 0$$

$$\frac{dM(s)}{ds} + \{-N(s) \sin \theta(s) - V(s) \cos \theta(s)\} \frac{dx(s)}{ds} + \{N(s) \cos \theta(s) - V(s) \sin \theta(s)\} \frac{dy(s)}{ds} = 0$$

変形後のつりあいを考える（大たわみ問題）

すなわち,

$$N' \cos \theta - N \theta' \sin \theta - V' \sin \theta - V \theta' \cos \theta = 0$$

$$N' \sin \theta + N \theta' \cos \theta + V' \cos \theta - V \theta' \sin \theta + q = 0$$

$$M' - (N \sin \theta + V \cos \theta)x' + (N \cos \theta - V \sin \theta)y' = 0$$

$x' = \cos \theta$, $y' = \sin \theta$ を考慮して整理すると

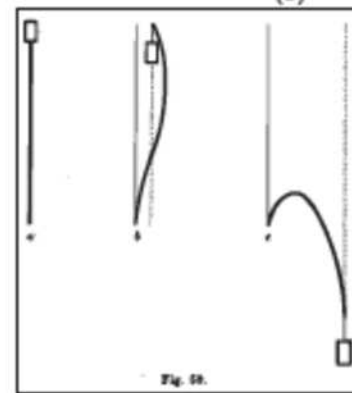
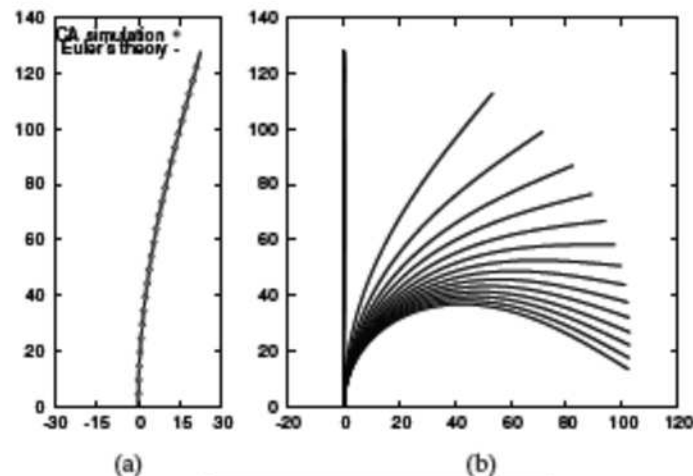
軸線 s の関数として考えた

軸力, せん断力, 曲げモーメントに関する
連立微分方程式（弾性線の方程式）を得る.

$$N' - V \theta' + q \sin \theta = 0$$

$$N \theta' + V' + q \cos \theta = 0$$

$$M' - V = 0$$



Euler の elastica 問題
などにも適用可

Fig. 18.

(c)

AN 2018.11

角度 θ が十分小さい場合の近似の考え方の基本 (復習, 再掲)

テイラー展開 (マクローリン展開)

近似

$$\sin \theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 + \dots$$


$$\sin \theta \simeq \theta$$

$$\tan \theta = \theta + \frac{1}{3}\theta^3 + \frac{2}{15}\theta^5 + \frac{17}{315}\theta^7 + \dots$$


$$\tan \theta \simeq \theta$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \frac{1}{6!}\theta^6 + \dots$$


$$\cos \theta \simeq 1$$

近似が妥当とみなせる範囲の感覚的理解 角度 θ が十分小さい場合に妥当 (復習, 再掲)

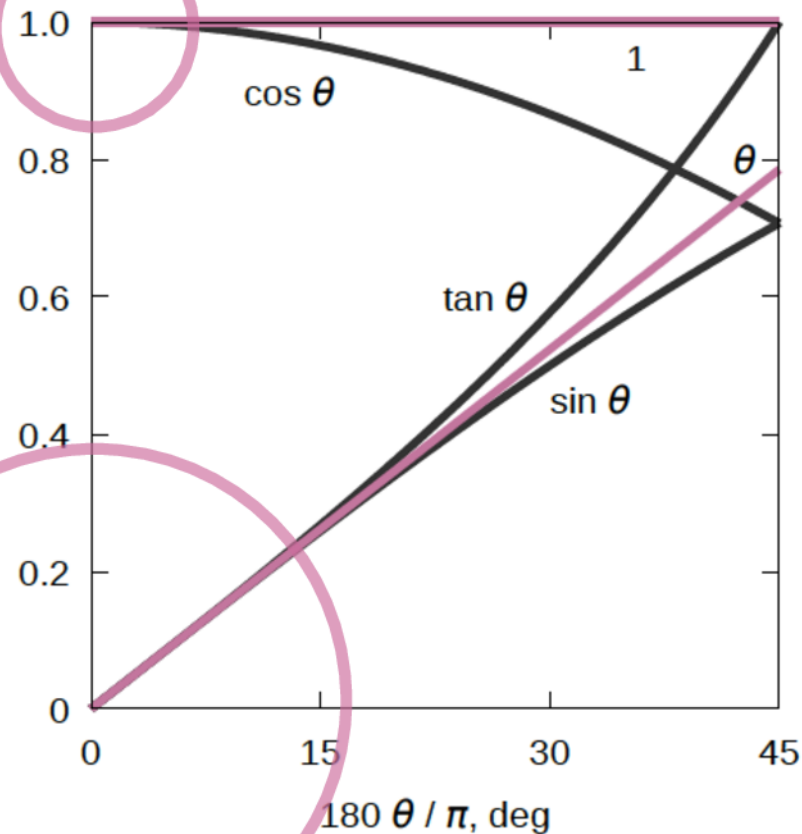
近似 (線形化)

$$\sin \theta \simeq \theta$$

$$\tan \theta \simeq \theta$$

$$\cos \theta \simeq 1$$

感覚的理解にはなるが、この近似は
小さい角度なら概ね妥当である
と考えてよさそうである



放物線による円弧の近似

頂点において、共通の接線を有し、曲率が等しい場合 (復習, 再掲)

曲率 $\kappa(x)$ の厳密な表現

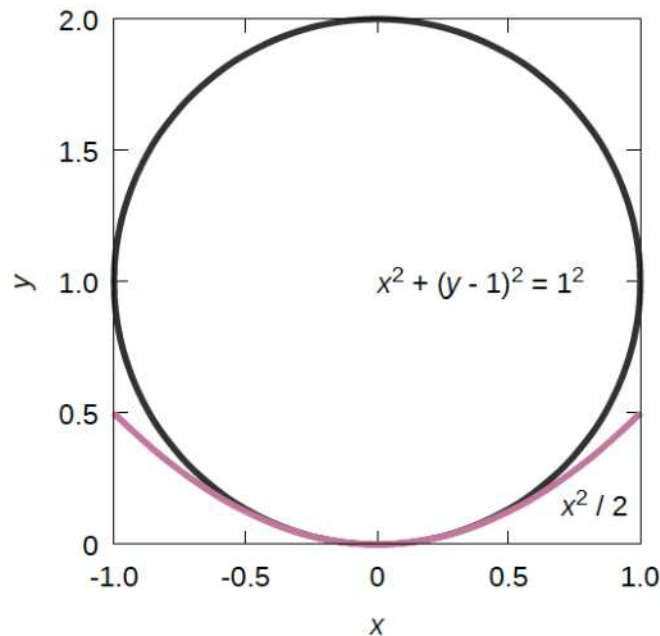
$$\kappa = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{3/2}}$$

に、円の方程式を代入すれば、座標に依らず一定となることを確認できる。

放物線は座標によって曲率は異なるはずだが、近似式

$$\kappa = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

で評価した曲率は、座標によらず一定値になる。このことは、逆に、曲率一定の曲線を近似式で考えると、円ではなく放物線になってしまうことを意味する



しかしながら、図から、たわみ、たわみ角が微小な区間であれば、円弧と放物線の違いは顕著ではなく、微小変形の条件下で、曲率の近似式を用いることは妥当であることがわかる。

変形後のつりあいの線形化近似

たわみ角 θ が微小であるとき, 弧長パラメータ s を座標 x と同等とみなし, $f(s)$, $f'(s) = df/ds$ を $f(x)$, $f'(x) = df/dx$ と考える. また, $\sin \theta \approx \tan \theta (= dy/dx) \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$ とみなせる.

$$N'(x) - V(x)\theta'(x) + q(x)\theta(x) = 0$$

$$N(x)\theta'(x) + V'(x) + q(x) = 0$$

$$M'(x) - V(x) = 0$$

すなわち,

$$\frac{dN}{dx} = V \frac{d\theta}{dx} - q\theta$$

$$\frac{dV}{dx} = -N \frac{d\theta}{dx} - q$$

$$\frac{dM}{dx} = V$$

$N(x) = -H$ とおくと

材料力学 p.255 式(13.3), (13.5)

$$\frac{dV}{dx} = H \frac{d\theta}{dx} - q$$

$$\frac{dM}{dx} = V$$

ゆえに, 式(13.6)

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + \lambda^2 M = -q, \quad \lambda^2 = \frac{H}{EI}$$

はり柱の非線形な変形 材料力学 p.257 例題13.1

たわみの基礎方程式
$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \lambda^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \quad \lambda^2 = \frac{H}{EI}$$

一般解
$$y(x) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x + C_3 x + C_4$$

境界条件
$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0, \quad M(0) = \frac{d^2 y(0)}{dx^2} = M_0, \quad M(l) = \frac{d^2 y(l)}{dx^2} = M_0$$

具体的に
$$y(0) = C_2 + C_4 = 0$$

$$y(l) = C_1 \sin \lambda l + C_2 \cos \lambda l + C_3 l + C_4$$

C_1, C_2, C_3, C_4 について解くと
$$C_1 = \frac{M_0}{H} \frac{1 - \cos \lambda l}{\sin \lambda l}, \quad C_2 = \frac{M_0}{H}, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = -\frac{M_0}{H}$$

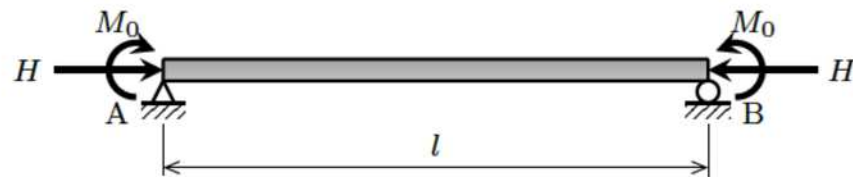
$$y(x) = \frac{M_0}{H} \left(\frac{1 - \cos \lambda l}{\sin \lambda l} \sin \lambda x + \cos \lambda x - 1 \right)$$

最大たわみ

$$y_{\max} = y(l/2) = \frac{M_0}{H} \left(\frac{1 - \cos \lambda l}{\sin \lambda l} \sin \frac{\lambda l}{2} + \cos \frac{\lambda l}{2} - 1 \right) = \frac{M_0}{H} \left(\frac{\sin^2 \frac{\lambda l}{2}}{\cos \frac{\lambda l}{2}} + \cos \frac{\lambda l}{2} - 1 \right) = \frac{M_0}{H} \left(\sec \frac{\lambda l}{2} - 1 \right)$$

最大曲げモーメント

$$M_{\max} = M_0 + H y_{\max} = M_0 \sec \frac{\lambda l}{2}$$



$$M(0) = C_2 EI \lambda^2 = M_0$$

$$M(l) = C_1 EI \lambda^2 \sin \lambda l + C_2 EI \lambda^2 \cos \lambda l = M_0$$

ただし、下記公式などを利用

$$\sin^2 \frac{\lambda l}{2} = \frac{1 - \cos \lambda l}{2}, \quad \sin \lambda l = 2 \sin \frac{\lambda l}{2} \cos \frac{\lambda l}{2}$$

動力学・静力学的つりあい (力学の復習)

一定力 $mg (= P)$ が作用するばね k と質点 m の系を考える.

総ポテンシャルエネルギー $\Pi(x)$ は, ひずみエネルギー $U = kx^2/2$ と

保存力として作用する外力 $P (= mg)$ のポテンシャル $\Omega = -Px = -mgx$ の和

$$\Pi(x) = U + \Omega = \frac{1}{2}kx^2 - Px$$

動力学

運動エネルギー $K(\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

総エネルギー (Hamilton 関数) $H(x, \dot{x}) = \Pi(x) + K(\dot{x})$

Lagrange 関数

$$L(x, \dot{x}) = K(\dot{x}) - \Pi(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \left(\frac{1}{2}kx^2 - Px \right)$$

Hamiltonの原理 (運動方程式の導出)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \text{ (Euler-Lagrange の方程式)}$$

$$m\ddot{x} + kx - P = 0 \text{ (Newton の運動方程式)}$$

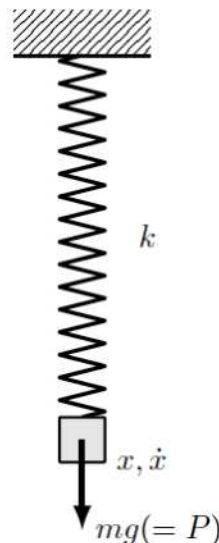
慣性項
(時間依存項)
 $m\ddot{x} = 0$

静力学

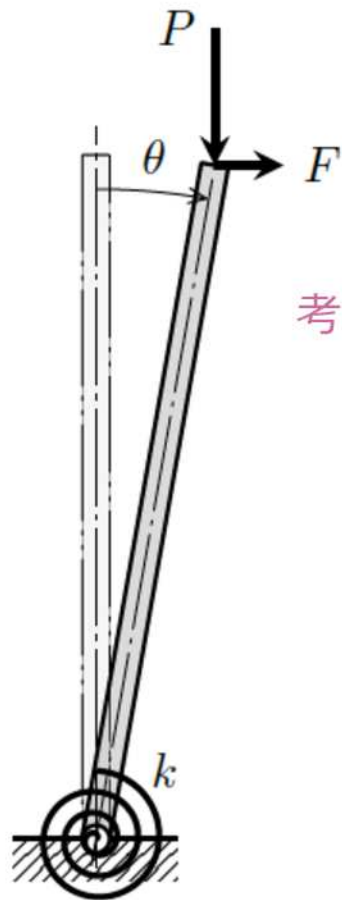
最小ポテンシャルエネルギーの原理
(静力学的平衡)

$$\frac{d\Pi(x)}{dx} = kx - P = 0$$

$$\frac{d^2\Pi(x)}{dx^2} = k \begin{cases} > 0 & \text{(安定)} \\ = 0 & \text{(臨界)} \\ < 0 & \text{(不安定)} \end{cases}$$

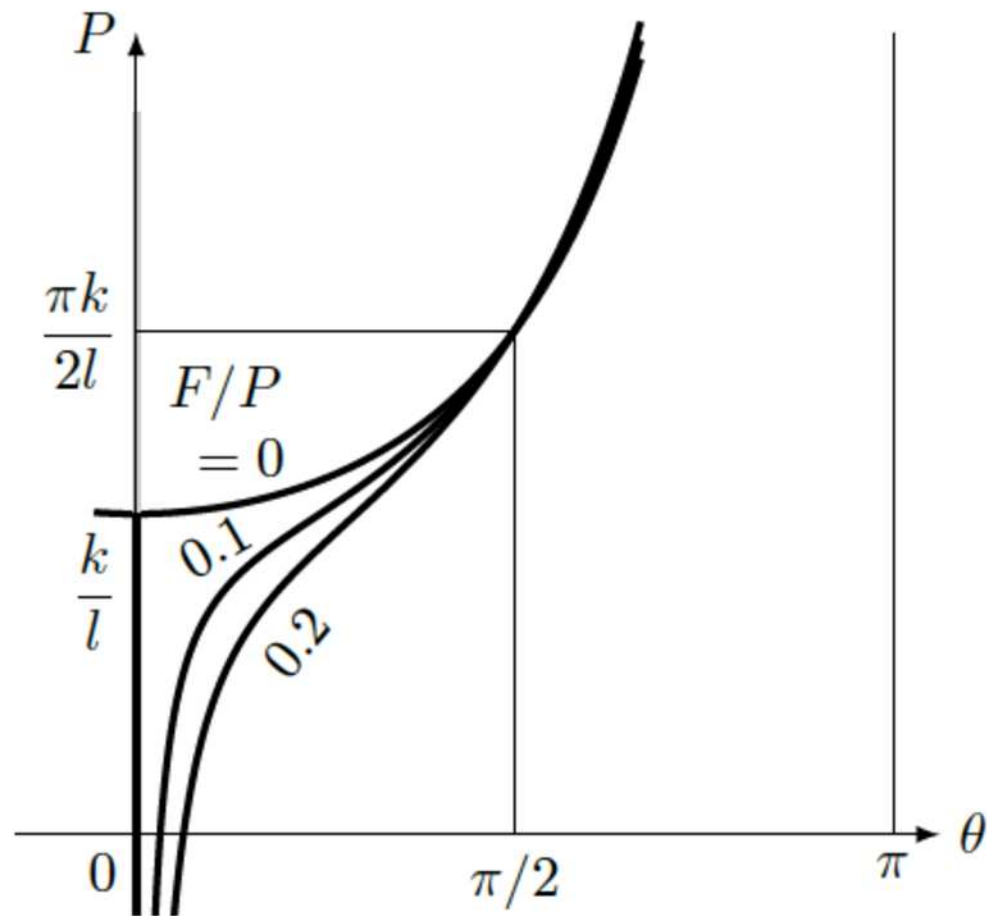


柱の座屈



考えてみよう！

P が小さい時・大きい時
 F があるとき・ないとき
 l が大きいとき・小さい時
 k が大きいとき・小さい時



柱の座屈の解析

ポテンシャルエネルギー

$$\Pi(\theta) = U + \Omega = \frac{1}{2}k\theta^2 - Pl(1 - \cos \theta) - Fl \sin \theta$$

ポテンシャルエネルギーの停留条件

$$\frac{d\Pi(\theta)}{d\theta} = k\theta - Pl \sin \theta - Fl \cos \theta = 0$$

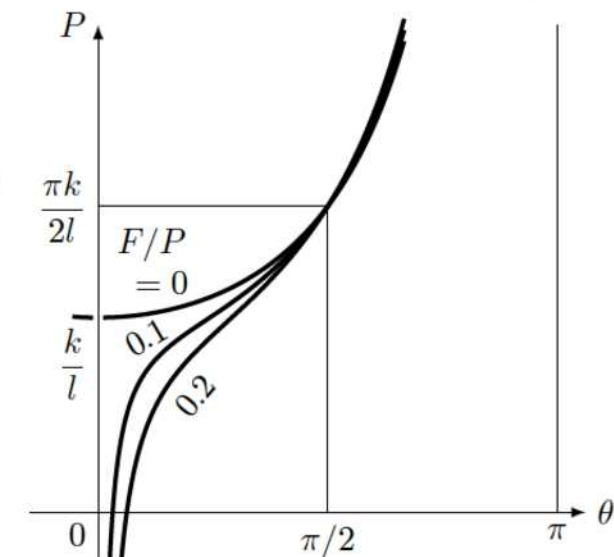
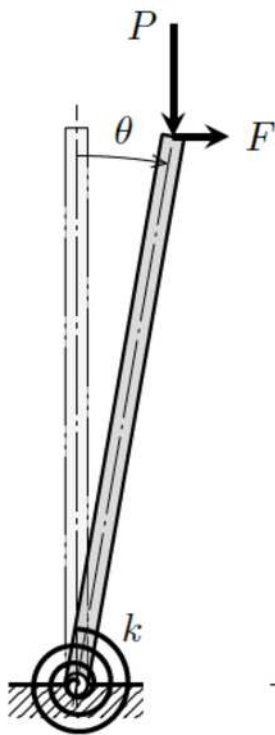
力のつりあい

$$P = \frac{k\theta - Fl \cos \theta}{l \sin \theta}$$

安定性

$$\frac{d^2\Pi(\theta)}{d\theta^2} = k - Pl \cos \theta + Fl \sin \theta$$

$$\begin{cases} > 0 & (\text{安定}) \\ = 0 & (\text{臨界点}) \\ < 0 & (\text{不安定}) \end{cases}$$

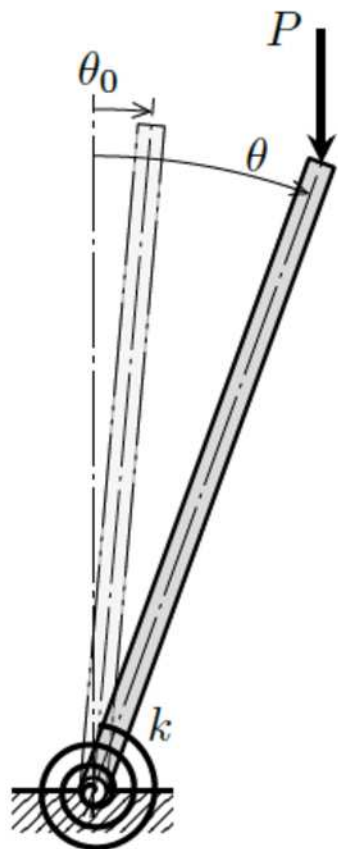


$F = 0$ のとき,

$$P = \frac{k\theta}{l \sin \theta} \quad (\text{静力学的平衡})$$

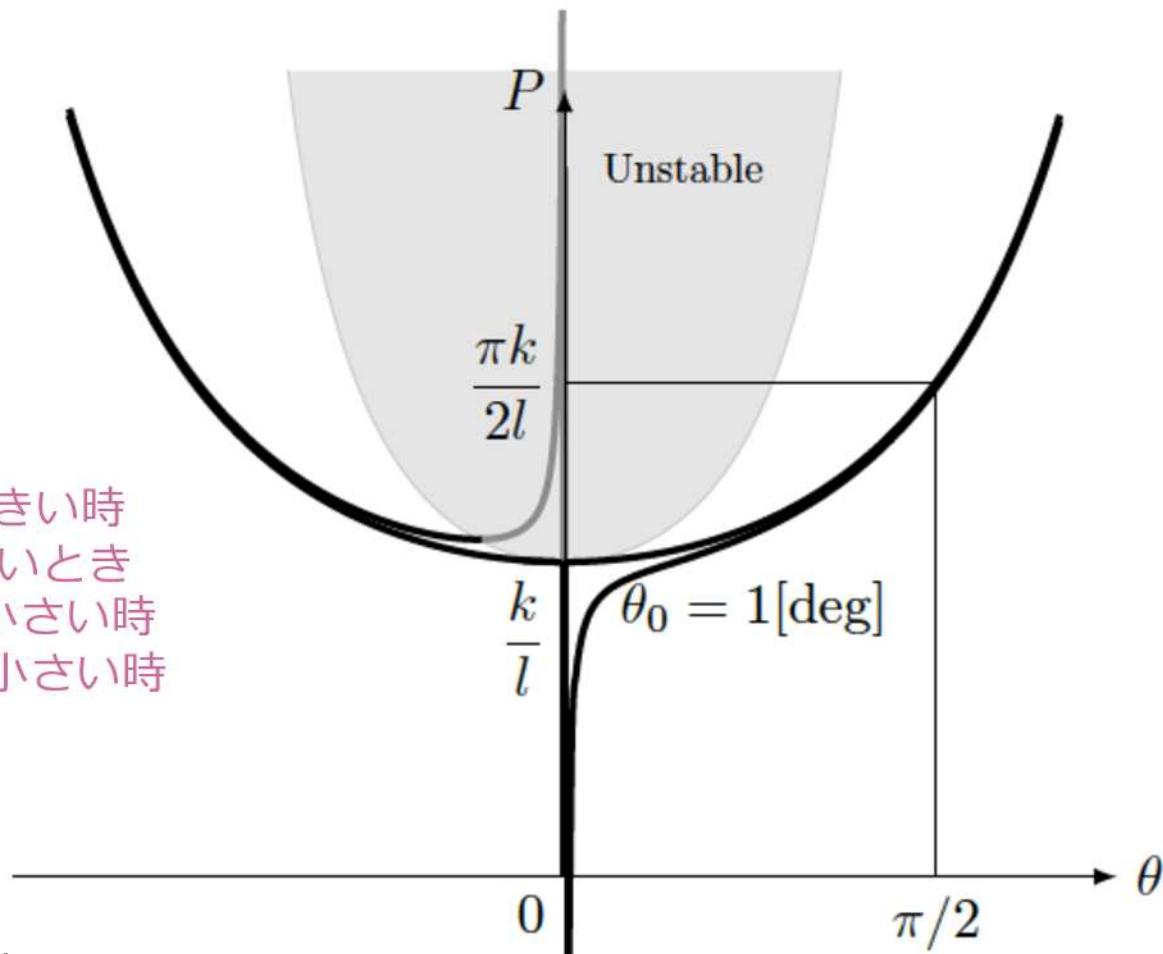
$$\begin{cases} P < \frac{k}{l} \frac{1}{\cos \theta} & (\text{安定}) \\ P = \frac{k}{l} \frac{1}{\cos \theta} & (\text{臨界点}) \\ P > \frac{k}{l} \frac{1}{\cos \theta} & (\text{不安定}) \end{cases}$$

柱の座屈（初期不整 θ_0 がある場合）



考えてみよう！

P が小さい時・大きい時
 θ_0 があるとき・ないとき
 l が大きいとき・小さい時
 k が大きいとき・小さい時



柱の座屈の解析（初期不整 θ_0 がある場合）

ポテンシャルエネルギー

$$\Pi(\theta) = U + \Omega = \frac{1}{2}k(\theta - \theta_0)^2 - Pl(1 - \cos \theta)$$

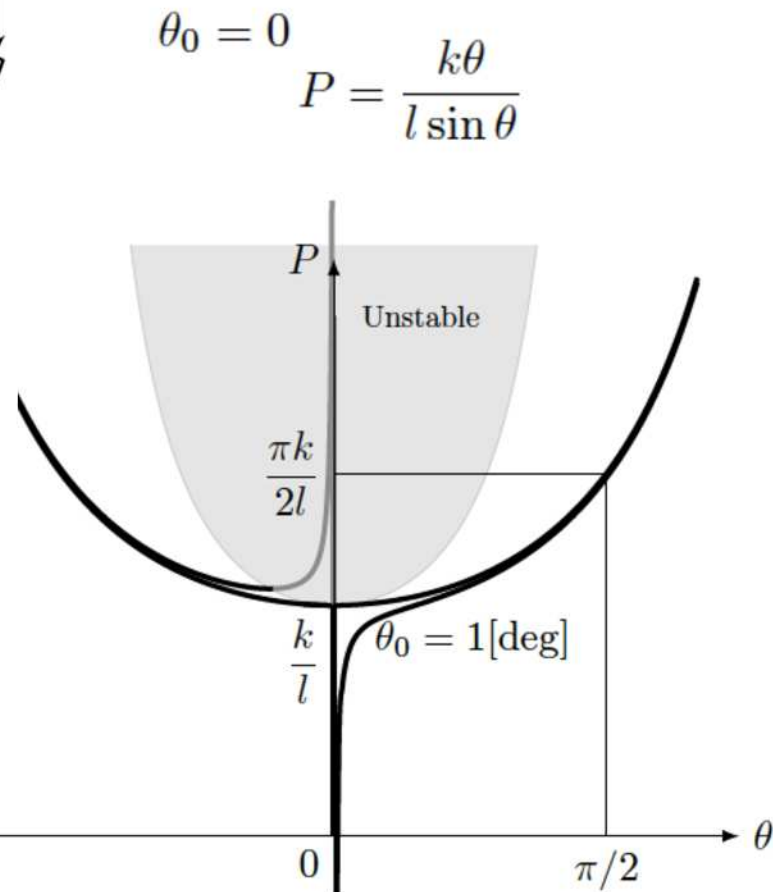
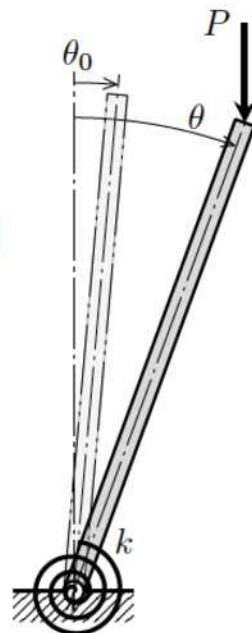
ポテンシャルエネルギーの停留条件

$$\frac{d\Pi(\theta)}{d\theta} = k(\theta - \theta_0) - Pl \sin \theta = 0$$

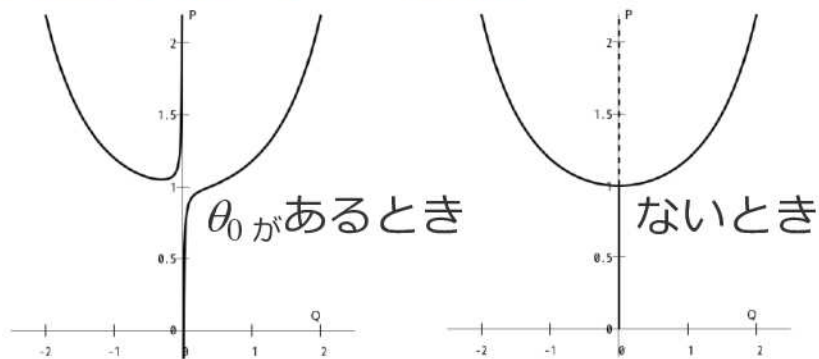
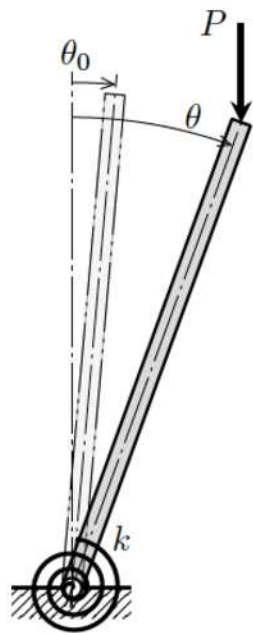
力のつりあい $P = \frac{k(\theta - \theta_0)}{l \sin \theta}$

安定性 $\frac{d^2\Pi(\theta)}{d\theta^2} = k - Pl \cos \theta$

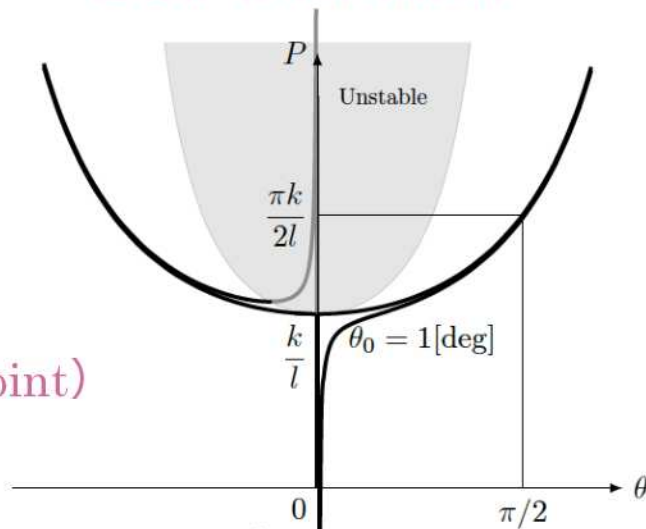
$$\begin{cases} P < \frac{k}{l} \frac{1}{\cos \theta} & (\text{安定}) \\ P = \frac{k}{l} \frac{1}{\cos \theta} & (\text{臨界点}) \\ P > \frac{k}{l} \frac{1}{\cos \theta} & (\text{不安定}) \end{cases}$$



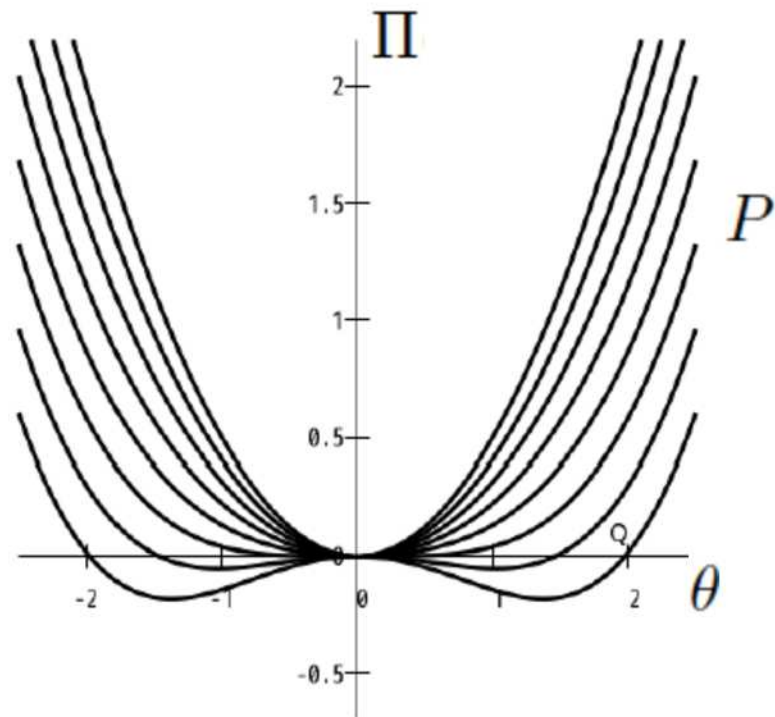
柱の座屈：エネルギー地形



自明解 (trivial solution)



分岐 (bifurcation)
分岐点 (bifurcation point)



エネルギー地形 (energy landscape)

角度 θ が十分小さい場合の近似の妥当性

(復習, 再掲)

$\cos \theta \simeq 1$ は、妥当な近似である

$$\cos \theta = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \frac{1}{6!}\theta^6 + \dots \quad \text{テイラー展開}$$

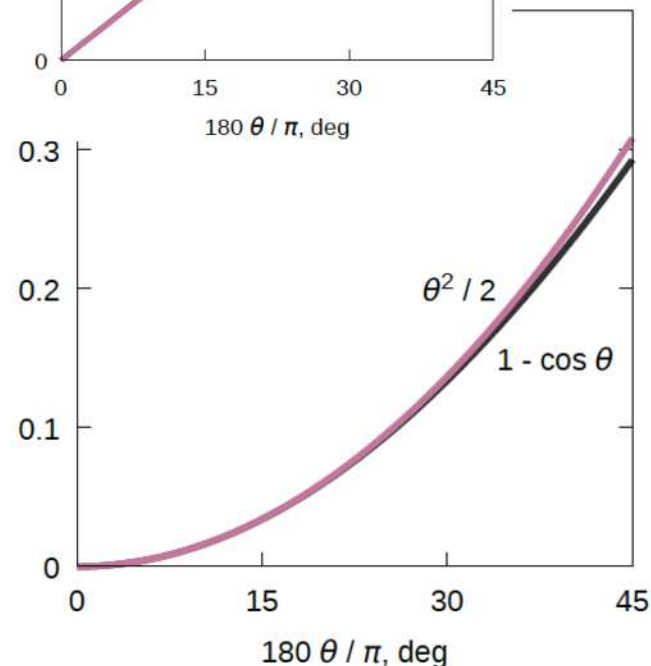
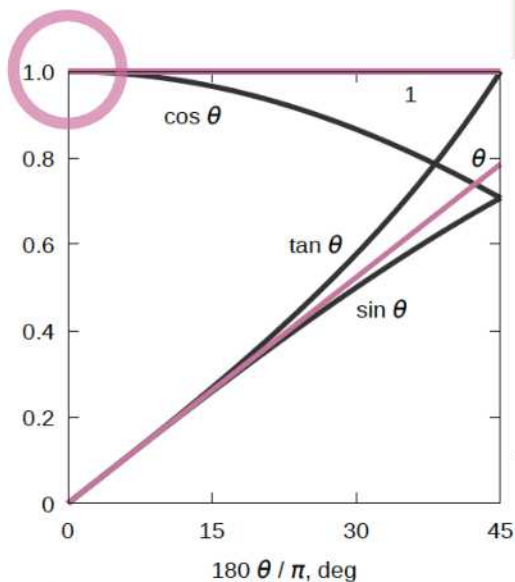
$$\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \simeq 1 - \frac{1}{2}\theta^2 \simeq 1 \quad \text{半角の公式}$$

しかしながら、 $1 - \cos \theta \neq 0$ である (0としてはいけない)

$1 - \cos \theta \simeq \frac{1}{2}\theta^2$ として、近似値を表現するのが妥当である

$$1 - \cos \theta = \frac{1}{2!}\theta^2 - \frac{1}{4!}\theta^4 + \frac{1}{6!}\theta^6 - \frac{1}{8!}\theta^8 + \dots \quad \text{テイラー展開}$$

$$1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \simeq \frac{1}{2}\theta^2 \quad \text{半角の公式}$$



たわみ（最小ポテンシャルエネルギーの原理）

ポテンシャルエネルギー

$$\begin{aligned}
 \Pi &= U + \Omega = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} ds - Pu - \int_0^l qy \, ds && \text{荷重作用点変位} \\
 & && u = l - \int_0^l x'(s) \, ds = \int_0^l (1 - \cos \theta) \, ds \\
 \Pi &= EI \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx - P \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx - \int_0^l qy \, dx \\
 \delta \Pi &= EI \int_0^l \frac{d^2 y}{dx^2} \delta \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) dx - P \int_0^l \frac{dy}{dx} \delta \left(\frac{dy}{dx} \right) dx - \int_0^l q \delta y \, dx \\
 &= EI \left[\frac{d^2 y}{dx^2} \delta \left(\frac{dy}{dx} \right) \right]_0^l - EI \int_0^l \left(\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{P}{EI} \frac{dy}{dx} \right) \delta \left(\frac{dy}{dx} \right) dx - \int_0^l q \delta y \, dx \\
 &= EI \left[\frac{d^2 y}{dx^2} \delta \left(\frac{dy}{dx} \right) \right]_0^l + EI \left[- \left(\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{P}{EI} \frac{dy}{dx} \right) \delta y \right]_0^l + EI \int_0^l \left(\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{P}{EI} \frac{d^2 y}{dx^2} - q \right) \delta y \, dx
 \end{aligned}$$

ポテンシャルエネルギーの停留の原理 $\delta \Pi = 0$

たわみの基礎式と境界条件，同次方程式の一般解

たわみの基礎式

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{P}{EI} \frac{d^2 y}{dx^2} - q = 0$$

境界条件 $x = 0, x = l$ において

自然境界条件

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \text{ すなわち } M = 0$$

自然境界条件

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{P}{EI} \frac{dy}{dx} = 0 \text{ すなわち } V - P\theta = 0$$

同次方程式 ($q = 0$ の場合) の一般解

$$y = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x + C_3 x + C_4$$

ポテンシャルエネルギーの停留条件 $\delta \Pi = 0$ が意味すること

たわみの基礎式が区間で成立，かつ，両端それぞれにおいて，自然境界条件または基本境界条件のどちらかが必ず満足されること。

基本境界条件

$$\frac{dy}{dx} = \bar{\theta}$$

基本境界条件

$$y = \bar{y}$$

一端移動・他端回転支持（単純支持）

$x=0$ の境界条件から

$$y(0) = 0, \quad y''(0) = 0 \quad C_2 + C_4 = 0, \quad -C_2 = 0 \quad C_2 = C_4 = 0$$

たわみ曲線 $y = C_1 \sin \lambda x + C_3 x$

$x=l$ の境界条件から

$$y(l) = 0, \quad y''(l) = 0 \quad C_1 \sin \lambda l + C_3 l = 0, \quad -C_1 \lambda^2 \sin \lambda l = 0$$

非自明解を持つためには

$$\begin{vmatrix} \sin \lambda l & l \\ -\lambda^2 \sin \lambda l & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\sin \lambda l = 0$$

$$\lambda l = n\pi$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots)$$

すなわち

$$\left(\frac{P}{EI} \right) l^2 = n^2 \pi^2$$

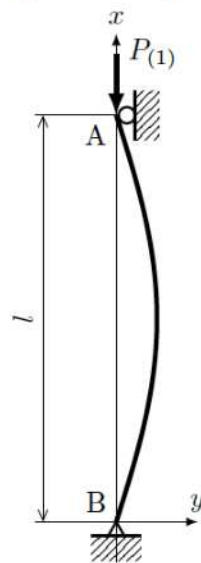
$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

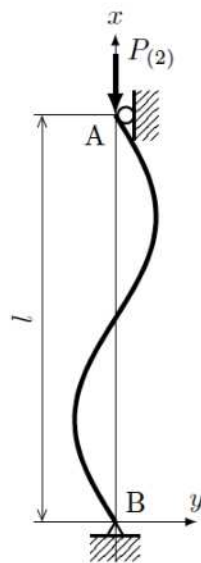
座屈荷重（buckling load）

座屈モードは $C_1 \neq 0, \quad C_3 = 0$ より

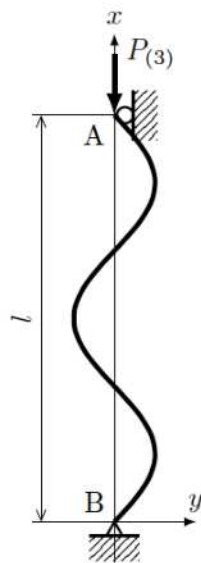
$$y = C_1 \sin \lambda x$$



(a) $n = 1$
 $P_{(1)} = P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$



(b) $n = 2$
 $P_{(1)} = 4P_{cr}$



(c) $n = 3$
 $P_{(3)} = 9P_{cr}$

一端自由，他端固定支持

$x=0$ の境界条件から

$$y''(0) = 0 \quad C_2 = 0 \quad \frac{dy^3(0)}{dx^3} + \lambda^2 y'(0) = 0 \quad C_3 = 0$$

たわみ曲線

$$y = C_1 \sin \lambda x + C_4$$

$x=l$ の境界条件から

$$y(l) = 0, \quad y'(l) = 0 \quad C_1 \sin \lambda l + C_4 = 0, \quad C_1 \lambda \cos \lambda l = 0$$

非自明解を持つためには

$$\begin{vmatrix} \sin \lambda l & 1 \\ \lambda \cos \lambda l & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} \cos \lambda l = 0 \\ \lambda l = (2n+1) \frac{\pi}{2} \\ (n = 0, 1, 2, \dots) \end{matrix}$$

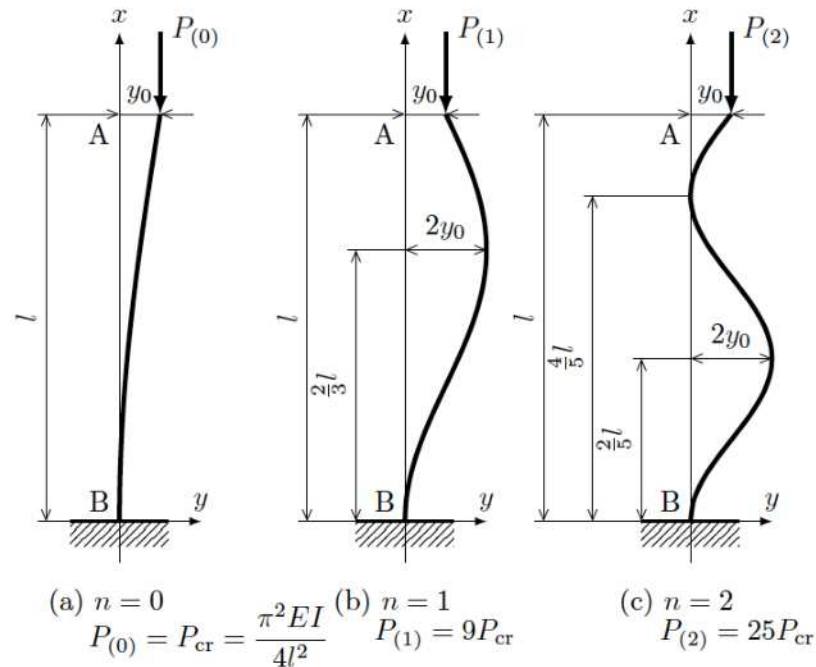
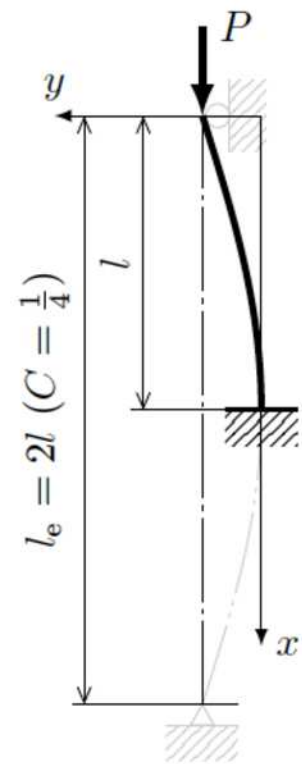
すなわち

$$P = (2n+1)^2 \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

座屈荷重 (buckling load) $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$

座屈モードは $C_1 + C_4 = 0$ より

$$y = C_1 (\sin \lambda x - 1)$$



一端移動・他端固定支持

$x=0$ の境界条件から

$$y(0) = 0, y''(0) = 0 \quad C_2 = C_4 = 0$$

たわみ曲線 $y = C_1 \sin \lambda x + C_3 x$

$x=l$ の境界条件から

$$y(l) = 0 \quad C_1 \sin \lambda l + C_3 l = 0$$

$$y'(l) = 0 \quad C_1 \lambda \cos \lambda l + C_3 = 0$$

非自明解を持つためには

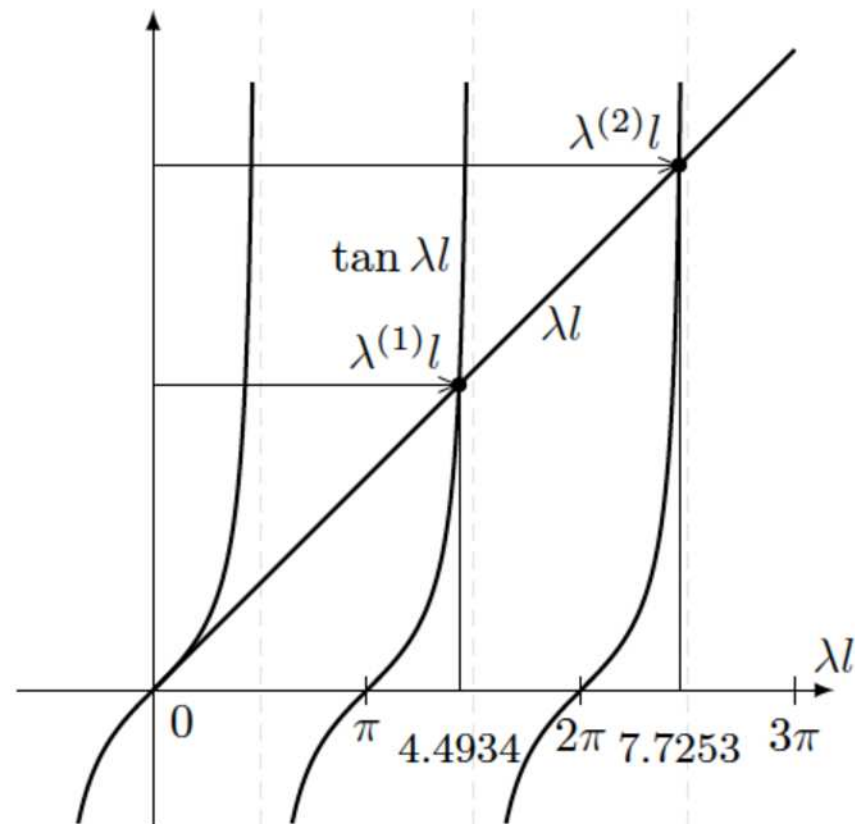
$$\begin{vmatrix} \sin \lambda l & l \\ \lambda \cos \lambda l & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{aligned} \tan \lambda l &= \lambda l \\ \lambda l &= 4.4934 \end{aligned}$$

座屈荷重 (buckling load)

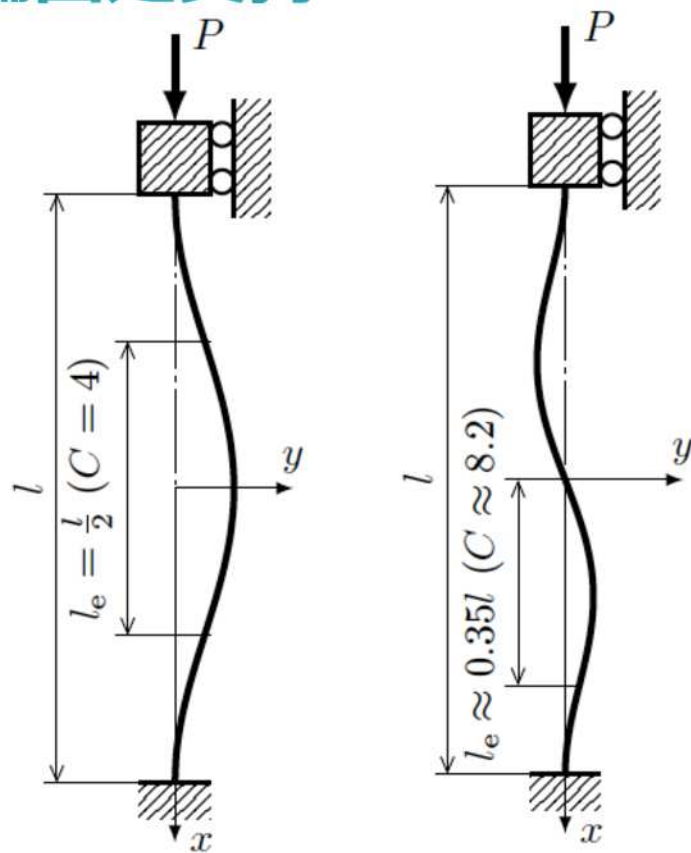
$$P_{cr} = \frac{2.0457 \pi^2 EI}{l^2}$$

座屈モード

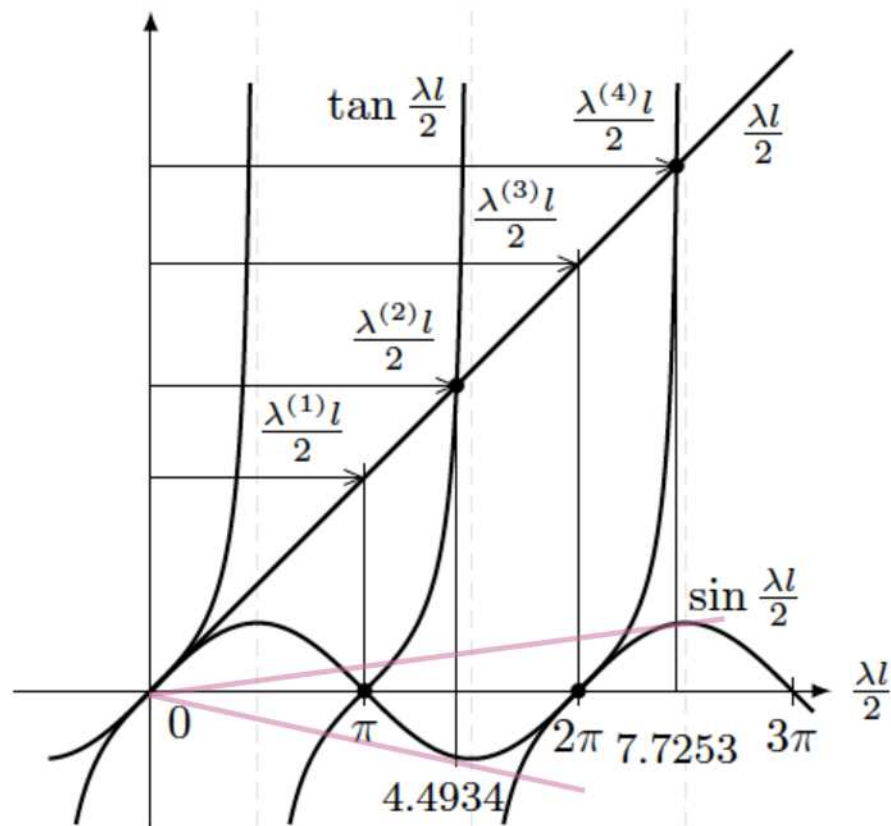
$$y = C_1 \left\{ \sin \left(\frac{4.4934}{l} x \right) - \frac{4.4934}{l} x \cos(4.4934) \right\}$$



両端固定支持



$$y(\pm \frac{l}{2}) = 0, y'(\pm \frac{l}{2}) = 0$$



奇関数モードの波長は、 $\tan x$ と $\sin(x)$ が接する点に対応して決まる

両端固定支持（偶関数モード）

境界条件から

$$C_2 \cos \frac{\lambda l}{2} + C_4 = 0$$

$$-C_2 \lambda \sin \frac{\lambda l}{2} = 0$$

非自明解を持つためには

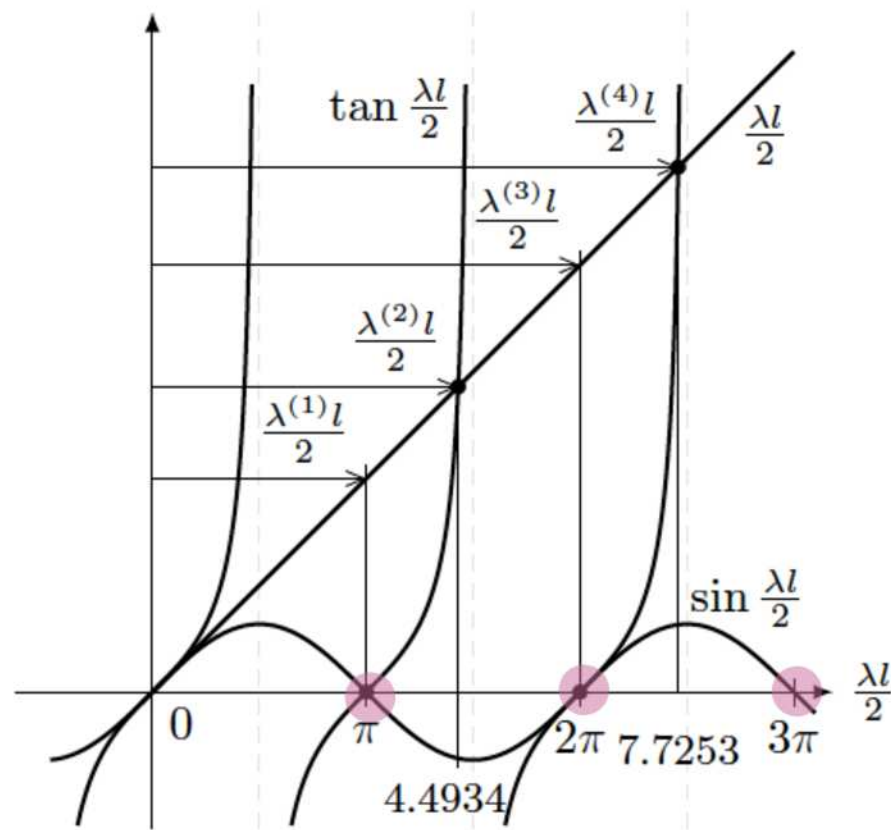
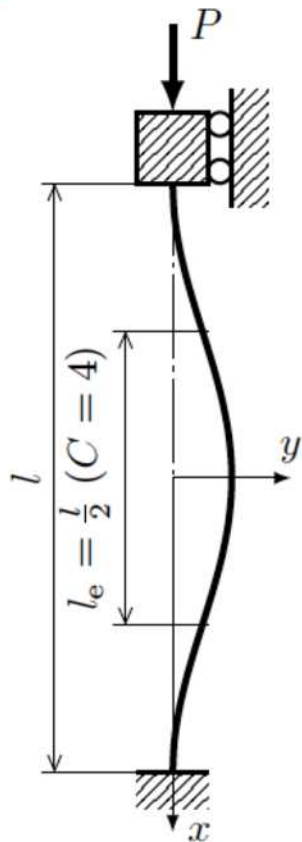
$$\sin \frac{\lambda l}{2} = 0 \quad \lambda = \frac{2\pi}{l}$$

座屈荷重 (buckling load)

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$

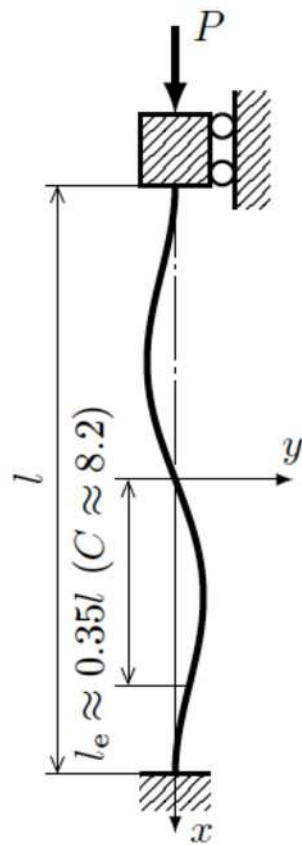
座屈モード

$$y = C_2 \left(1 + \cos \frac{2\pi}{l} x \right)$$



偶関数モードが座屈荷重（最小の荷重）を与える

両端固定支持（奇関数モード）



境界条件から

$$C_1 \sin \frac{\lambda l}{2} + C_3 \frac{l}{2} = 0$$

$$C_1 \lambda \cos \frac{\lambda l}{2} + C_3 = 0$$

非自明解を持つためには

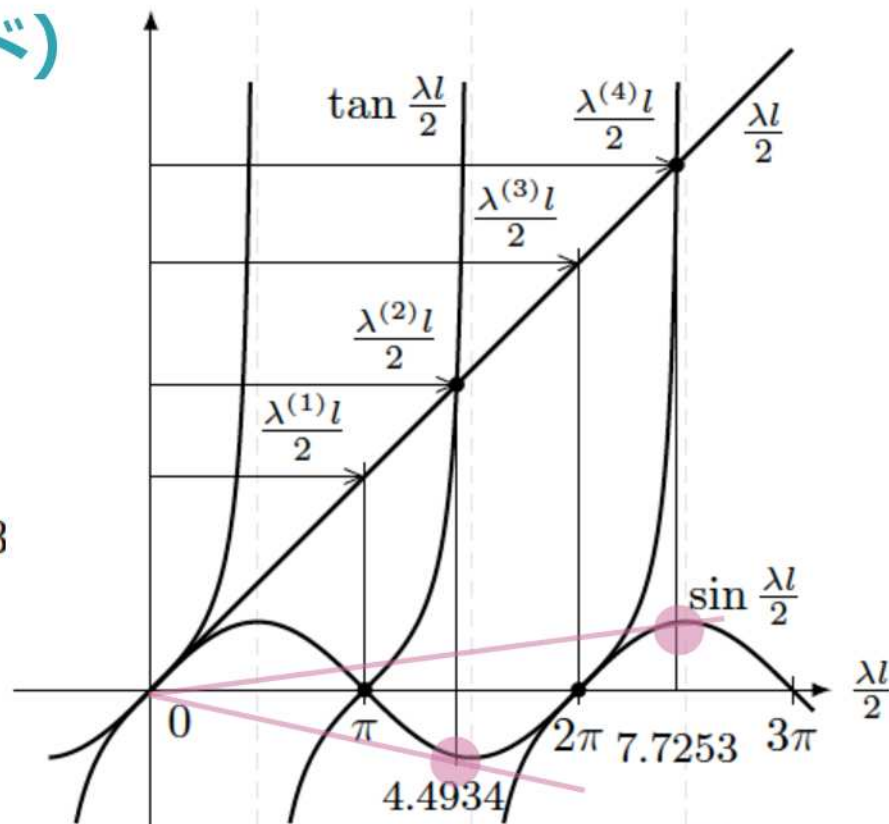
$$\tan \frac{\lambda l}{2} = \frac{\lambda l}{2} \quad \frac{\lambda l}{2} = 4.493$$

座屈荷重 (buckling load)

$$P_{cr} = \frac{4 \times 2.0457 \pi^2 EI}{l^2}$$

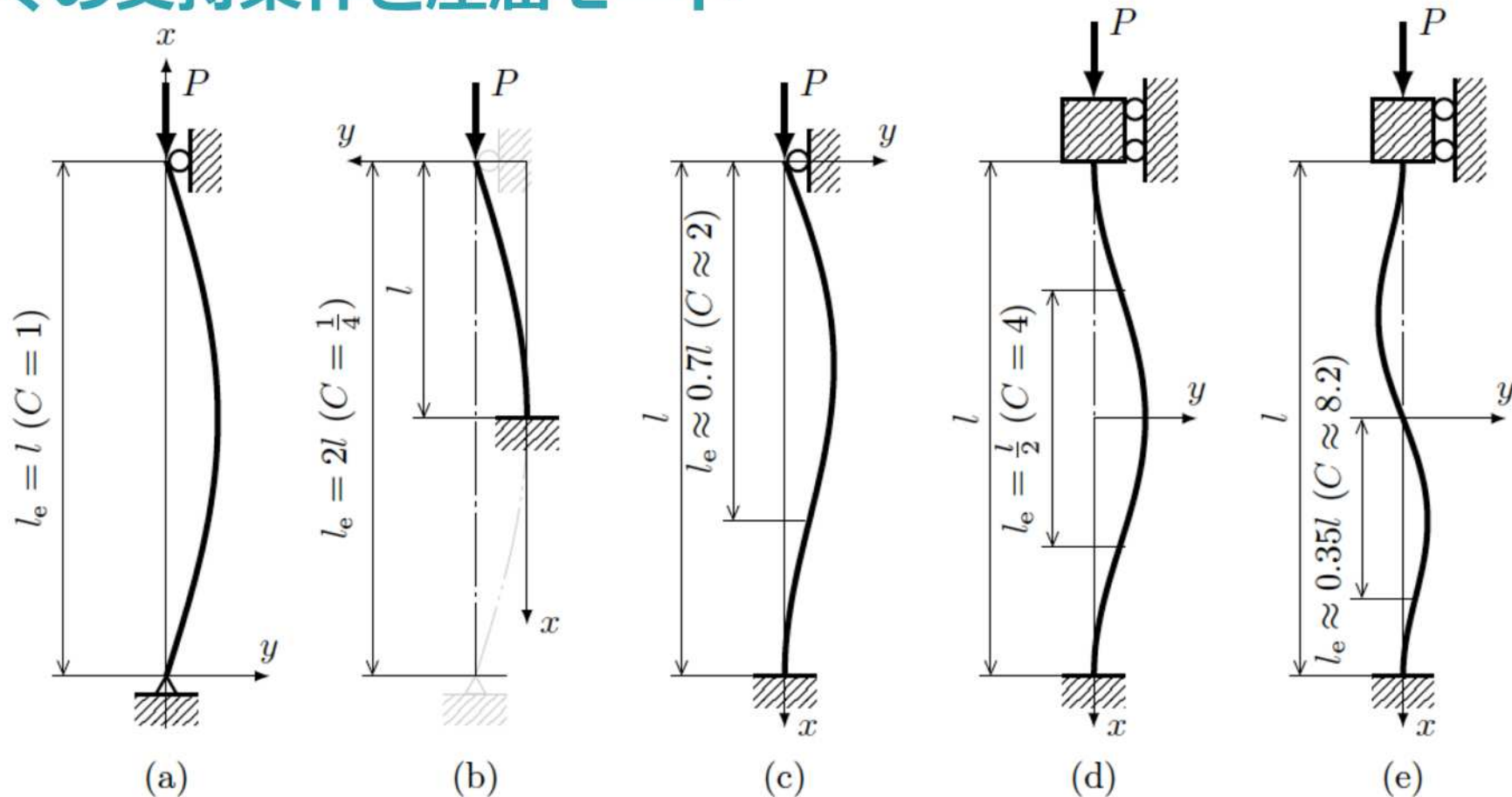
座屈モード

$$y = C_1 \left\{ \sin \left(\frac{2 \times 4.4934}{l} x \right) - \frac{2 \times 4.4934}{l} x \cos(4.4934) \right\}$$



奇関数モードの波長は、 $\sin(x)$ と x が接する点に対応して決まる

種々の支持条件と座屈モード



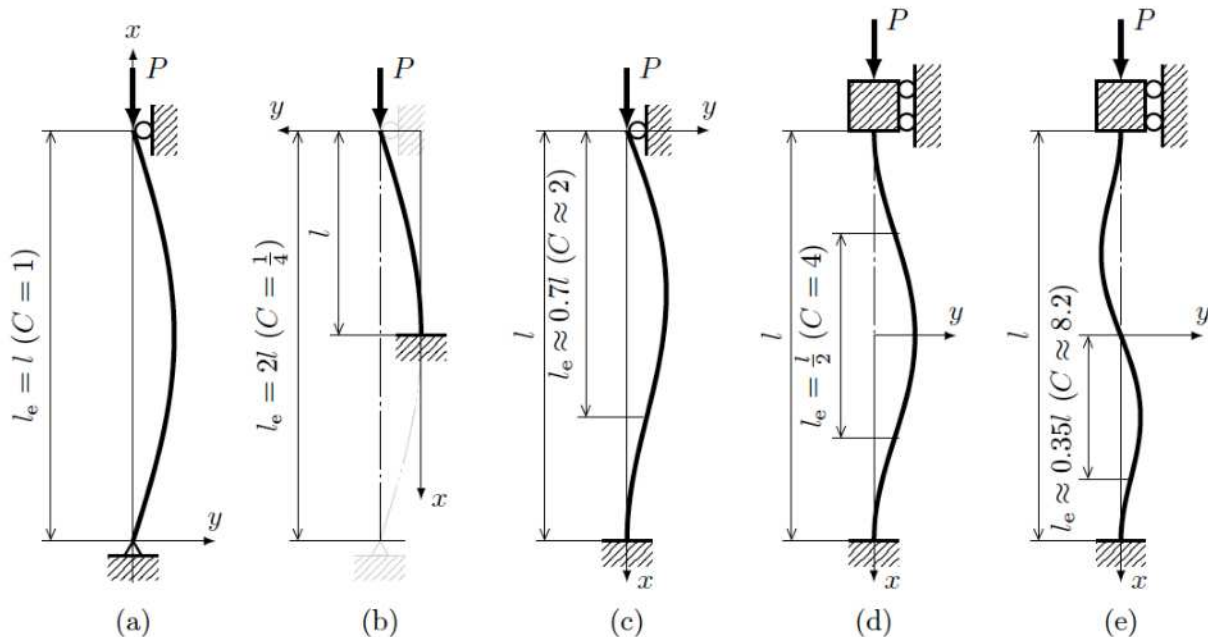
座屈荷重は隣接する変曲点間の距離で決まる。

座屈荷重

座屈荷重 (buckling load)

$$P_{cr} = C \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{l_e^2}$$

$$l_e = Kl$$



C : 端末条件係数 (fixity coefficient)

l_e : 有効長さ (effective length)

K : 有効長さ係数 (effective length coefficient)

現在公開可能な情報

種々の支持条件における
座屈荷重まとめ

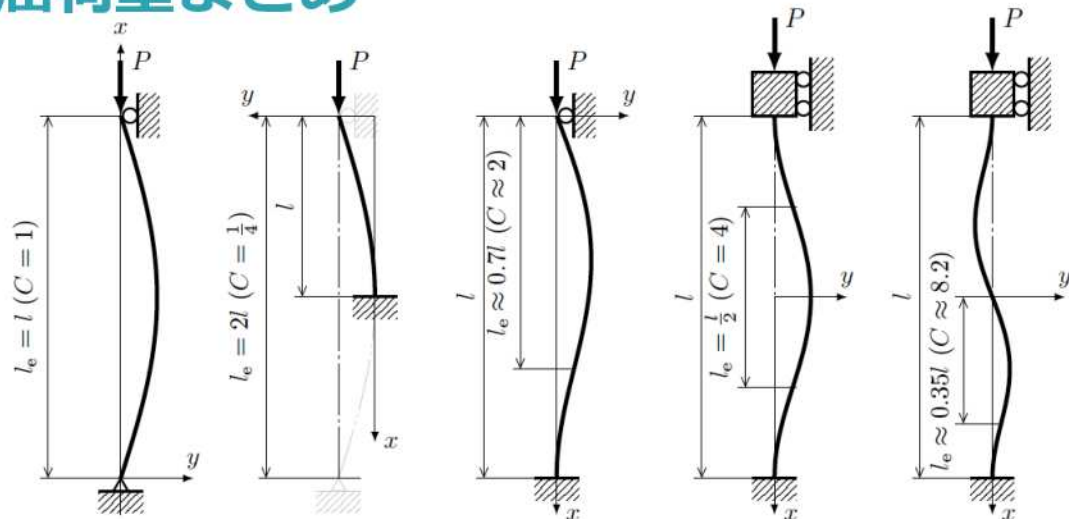
$$P_{cr} = C \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{l_e^2}$$

$$l_e = Kl$$

C : 端末条件係数

l_e : 有効長さ

K : 有効長さ係数



単純支持が基準 ($K = 1$, $C = 1$)

$l_e = Kl$ という定義と、座屈モード (buckling mode) の図から、変曲点間の距離で見当がつく。

座屈荷重 P_{cr} は長さ l , l_e の二乗に反比例する次元なので、 C は $1/K^2$ である。

支持条件	K	$C = 1/K^2$
一端移動・他端回転支持 単純支持	1	1
一端自由, 他端固定支持	2	$\frac{1}{4}$
一端移動・他端固定支持	0.6992	2.046
両端固定支持 (偶関数モード)	$\frac{1}{2}$	4
両端固定支持 (奇関数モード)	0.3496	8.182

座屈応力

座屈応力 (buckling stress)

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(l_e/r)^2}$$

r : 断面二次半径 $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$

l/r : 細長比 (slenderness ratio)

l_e/r : 有効細長比 (effective slenderness ratio)

座屈応力は、有効細長比とヤング率で整理できる。

長柱ではオイラー座屈，中間柱，短柱では，各種の公式が提案されている。

ランキン (Rankine) の式

修正されたランキンの式

ジョンソン (Johnson) の式

テトマイヤー (Tetmajer) の式

さらに短くなると，座屈は生じず，降伏など別の破損が生じる。

柱の座屈関連の用語の補足

分岐 (bifurcation) : 解の一意性がなくなる点, 自明解が不安定解となり, 新たな解が現れる.

分岐点 (bifurcation point) : 分岐が生じる (荷重・変位などの) 状態空間における点

分岐モード (bifurcation mode) : 分岐点での変形形状

弾性座屈 (elastic buckling) : 降伏応力よりも小さな応力で座屈する

缶容器, ラチェット機構などに利用

飛び移り座屈 (snap buckling) : ラチェット機構, 座屈ばねなど積極的に利用

塑性座屈 (plastic buckling) : 塑性変形の状態で座屈

中間柱 (intermediate column) : オイラー座屈では評価できない中間の長さの柱

屈服座屈 (limit-point buckling) : 局部不安定 (local instability)

cf. 一次不安定 (primary instability)

座屈応力 (buckling stress) : 有効細長比とヤング率で整理できる. 長柱ではオイラーの座屈公式が有効. 中間柱・短柱では各種の公式が提案されている. さらに短くなると, 座屈は生じず, 降伏など別の破損が生じる.

次回

材料力学2025 シーズン2

第14話

2025年7月22日 (火)

Coming Soon . . .