

材料力学2025 シーズン2

第12話 エネルギー法 後編

2025年7月15日 (火)

中谷 彰宏

教科書「渋谷陽二，中谷彰宏，材料力学，(2017)，コロナ社」
1, 2, 3, 4, 10, 11章（春学期の授業）を学習し終えて、
5, 6, 7, 8, 9, 12, 13章（夏学期の授業）をこれから学ぶ諸君のために

カスチリアーノの定理

弾性体の N 個の点 $i = 1, 2, \dots, N$ に

一般化力 P_i^* が作用し, 一般化変位 u_i^* が生じているとき

$$u_i^* = u_i^*(P_1^*, P_2^*, \dots, P_N^*)$$

コンプリメンタリーひずみエネルギーは

$$U_c(P_1^*, P_2^*, \dots, P_N^*) = \sum_{i=1}^N \int_0^{P_i^*} u_i^*(P_1^*, P_2^*, \dots, P_N^*) dP_i^*$$

一般化力 P_i^* の微小な変化について

$$dU_c(P_1^*, P_2^*, \dots, P_N^*) = \sum_{i=1}^N u_i^*(P_1^*, P_2^*, \dots, P_N^*) dP_i^*$$

一方, U_c は P_i^* を独立変数とする状態量であるから

$$dU_c(P_1^*, P_2^*, \dots, P_N^*) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial U_c}{\partial P_i^*} dP_i^*$$

任意の dP_i^* について恒等的に等しいから

カスチリアーノの定理

(エンゲッサーの第一定理, カスチリアーノの第二定理)

$$u_i^* = \frac{\partial U_c}{\partial P_i^*}, \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

カスチリアーノの第一定理（参考）

弾性体の N 個の点 $i = 1, 2, \dots, N$ に

一般化力 P_i^* が作用し, 一般化変位 u_i^* が生じているとき

$$P_i^* = P_i^*(u_1^*, u_2^*, \dots, u_N^*)$$

ひずみエネルギーは

$$U(u_1^*, u_2^*, \dots, u_N^*) = \sum_{i=1}^N \int_0^{u_i^*} P_i^*(u_1^*, u_2^*, \dots, u_N^*) du_i^*$$

一般化力 P_i^* の微小な変化について

$$dU(u_1^*, u_2^*, \dots, u_N^*) = \sum_{i=1}^N P_i^*(u_1^*, u_2^*, \dots, u_N^*) du_i^*$$

一方, U は u_i^* を独立変数とする状態量であるから

$$dU(u_1^*, u_2^*, \dots, u_N^*) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial u_i^*} du_i^*$$

任意の du_i^* について恒等的に等しいから

カスチリアーノの第一定理

$$P_i^* = \frac{\partial U}{\partial u_i^*}, \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

第一定理は使う場面は
多くない. . .

カスチリアーノの定理 (棒の引張)

断面積 $A(x) \equiv \iint_{A(x)} dydz$ 長さ l

軸力 $N(x)$

応力 $\sigma_x(x) = N(x)/A(x)$

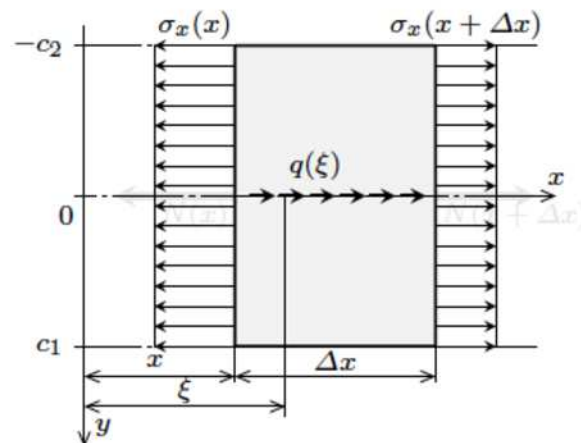
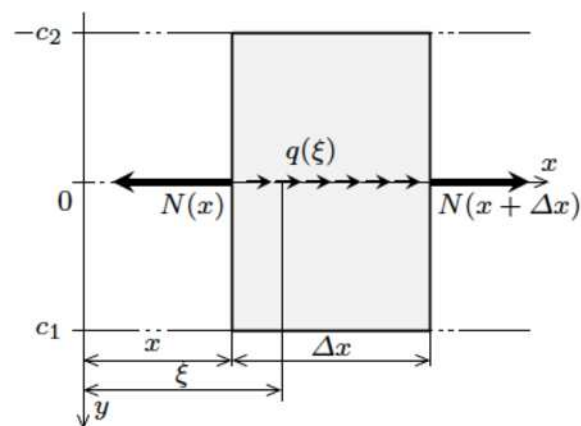
ひずみ $\varepsilon_x(x) = \sigma_x(x)/E(x) = N(x)/\{E(x)A(x)\}$

コンプリメンタリーひずみエネルギー

$$\begin{aligned} U_c &= \int_V \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \iiint_V \frac{N^2}{2EA^2} dx dy dz \\ &= \int_0^l \frac{N^2}{2EA^2} \left[\iint_A dy dz \right] dx = \int_0^l \frac{N^2}{2EA} dx \end{aligned}$$

軸力 N が P^* を変数とする関数で書かれている時
 P^* の作用方向の一般化変位 u^* は

$$u^* = \frac{\partial U_c}{\partial P^*} = \frac{\partial}{\partial P^*} \left(\int_0^l \frac{N^2}{2EA} dx \right) = \int_0^l \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial P^*} dx$$



カスチリャーノの定理（はりの曲げ）

断面2次モーメント $I(x) \equiv \iint y^2 dy dz$ 長さ l

曲げモーメント $M(x)$

応力 $\sigma_x(x, y) = M(x)y/I(x)$

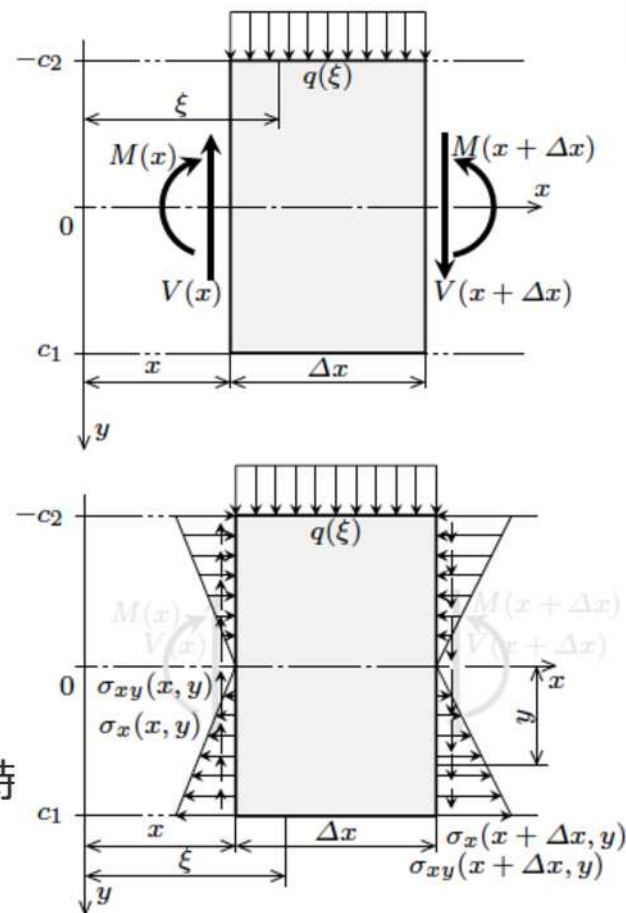
ひずみ $\varepsilon_x(x, y) = \sigma_x(x, y)/E = M(x)y/\{EI(x)\}$

コンプリメンタリーひずみエネルギー

$$\begin{aligned} U_c &= \int_V \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \iiint_V \frac{M^2 y^2}{2EI^2} dx dy dz \\ &= \int_0^l \frac{M^2}{2EI^2} \left[\iint_A y^2 dy dz \right] dx = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx \end{aligned}$$

曲げモーメント M が P^* を変数とする関数で書かれている時
 P^* の作用方向の一般化変位 u^* は

$$u^* = \frac{\partial U_c}{\partial P^*} = \frac{\partial}{\partial P^*} \left(\int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx \right) = \int_0^l \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P^*} dx$$



カスチリャーノの定理 (軸のねじり)

断面2次極モーメント $I_p(x) \equiv \int_0^{r(x)} \rho^2 (2\pi\rho) d\rho$ 長さ l

ねじりモーメント $T(x)$

応力 $\tau(x, \rho) = T(x)\rho/I_p(x)$

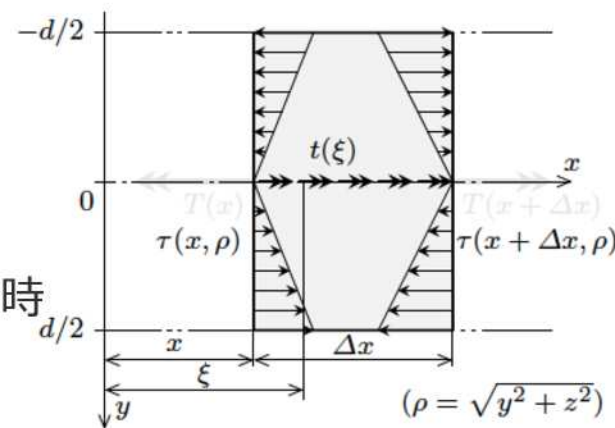
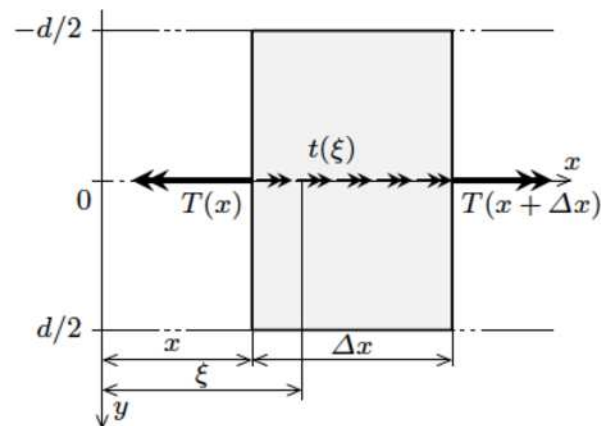
ひずみ $\gamma(x, \rho) = \tau(x, \rho)/G(x) = T(x)\rho/\{G(x)I_p(x)\}$

コンプリメンタリーひずみエネルギー

$$\begin{aligned} U_c &= \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV = \int_0^l \int_0^r \frac{T^2 \rho^2}{2GI_p^2} (2\pi\rho) d\rho dx \\ &= \int_0^l \frac{T^2}{2GI_p^2} \left[\int_0^r \rho^2 (2\pi\rho) d\rho \right] dx = \int_0^l \frac{T^2}{2GI_p} dx \end{aligned}$$

ねじりモーメント T が P^* を変数とする関数で書かれている時
 P^* の作用方向の一般化変位 u^* は

$$u^* = \frac{\partial U_c}{\partial P^*} = \frac{\partial}{\partial P^*} \left(\int_0^l \frac{T^2}{2GI_p} dx \right) = \int_0^l \frac{T}{GI_p} \frac{\partial T}{\partial P^*} dx$$



現在公開可能な情報

材料力学〈軸線の力学〉の
引張圧縮・曲げ・ねじり問題における
カスチリアーノの定理の応用

進撃の材力

$$u_i^* = \frac{\partial U_c}{\partial P_i^*} = \frac{\partial}{\partial P_i^*} \left(\int_0^l \frac{F^{*2}}{2D^*} dx \right) = \int_0^l \frac{F^*}{D^*} \frac{\partial F^*}{\partial P_i^*} dx$$

部材	内力 $F^*(x)$	剛性 D^*	一般化力 P^*	一般化変位 u^*
棒 bar	軸力 $N(x)$	引張剛性 EA	集中力 P	伸び変位 u
はり beam	曲げモーメント $M(x)$	曲げ剛性 EI	モーメント M	たわみ角 θ
			横荷重 P	たわみ y
軸 shaft	ねじりモーメント $T(x)$	ねじり剛性 GI_p	モーメント T	ねじれ角 ϕ

組合せ荷重の場合、内力の種類ごとに分布を計算し、それらの寄与の総和として計算することができる（独立でなければ重ね合わせはできない）

$$u_i^* = \frac{\partial U_c}{\partial P_i^*} = \frac{\partial}{\partial P_i^*} \left(\int_0^l \sum_{I=1}^M \frac{F_I^{*2}}{2D_I^*} dx \right) = \int_0^l \sum_{I=1}^M \left(\frac{F_I^*}{D_I^*} \frac{\partial F_I^*}{\partial P_i^*} \right) dx$$

エネルギーや仕事は重ね合わせができるとは限らない

問題を外力系(1) と外力系(2)の重ね合わせとして考えてみる. それぞれの外力系の内力への寄与を $F^{*(1)}$, $F^{*(2)}$ とするとき

$$\begin{aligned} U_c &= \int_0^l \frac{F^{*2}}{2D^*} dx = \int_0^l \frac{1}{2D^*} (F^{*(1)} + F^{*(2)})^2 dx \\ &= \int_0^l \frac{1}{2D^*} \{ (F^{*(1)})^2 + 2F^{*(1)}F^{*(2)} + (F^{*(2)})^2 \} dx \\ &\neq \int_0^l \frac{(F^{*(1)})^2}{2D^*} dx + \int_0^l \frac{(F^{*(2)})^2}{2D^*} dx \end{aligned}$$

となり, 外力系(1) のみが作用する問題と, 外力系(2)のみが作用する問題の和とはならない.

外力が作用していない点へのカスチリアーノの定理の応用

カスチリアーノの方法

- (1) まず, 求めたい m 個の一般化変位 $v_1^*, v_2^*, \dots, v_m^*$ に対応する一般化外力 $Q_1^*, Q_2^*, \dots, Q_m^*$ を仮想的に加えることを考える. たとえば, 変位 (伸びやたわみ) に対しては対応する集中力, 回転角 (たわみ角やねじれ角) に対しては対応するモーメントを考える.
- (2) 外力 $P_1^*, P_2^*, \dots, P_N^*$ とともに, 新たに設定した $Q_1^*, Q_2^*, \dots, Q_m^*$ も独立変数としてのコンプリメンタリーひずみエネルギーを表現する.
- (3) 一般化力 $Q_1^*, Q_2^*, \dots, Q_m^*$ に対応する一般化変位 $v_1^*, v_2^*, \dots, v_m^*$ をカスチリアーノの定理によりそれぞれ求める.
- (4) 得られた $v_1^*, v_2^*, \dots, v_m^*$ に対して, 仮想的に設定したすべての一般化力 $Q_1^*=Q_2^*=\dots=Q_m^*=0$ として, 実際の外力 $P_1^*, P_2^*, \dots, P_N^*$ のみを含む解の表現を得る.

実際には

$Q_1^*, Q_2^*, \dots, Q_m^*$ は偏微分のためだけに必要な互いに独立な変数なので, 最終的に0を代入するので, v_i^* を求める際には $Q_j^*=0$ ($j \neq i$) として計算できる.

領域積分の前に, 被積分関数に含まれる $Q_1^*, Q_2^*, \dots, Q_m^*$ を0とすることができる.

$$v_i^* = \int_0^l \left[\frac{F^*}{D^*} \right]_{Q_1^*=Q_2^*=\dots=Q_m^*=0} \left[\frac{\partial F^*}{\partial Q_i^*} \right]_{Q_1^*=Q_2^*=\dots=Q_m^*=0} dx$$

影響係数

線形弾性体では一般化力 P_i^* と一般化変位 u_i^* は互いに線形関係にあり

$$P_i^*(u_1^*, u_2^*, \dots, u_N^*) = \sum_{j=1}^N C_{ij} u_j^* \quad u_i^*(P_1^*, P_2^*, \dots, P_N^*) = \sum_{j=1}^N D_{ij} P_j^*$$

C_{ij} , D_{ij} をともに影響係数といい, C_{ij} を剛性マトリクス, D_{ij} をコンプライアンスマトリクスという
ひずみエネルギーと, コンプライアンスひずみエネルギーは,

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N P_i^*(u_1^*, u_2^*, \dots, u_N^*) u_i^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij} u_i^* u_j^*$$

$$U_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N P_i^* u_i^*(P_1^*, P_2^*, \dots, P_N^*) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N D_{ij} P_i^* P_j^*$$

これらのマトリクスは対称性 $C_{ij} = C_{ji}$, $D_{ij} = D_{ji}$ を有していることがわかる.

また

$$C_{ij} = \frac{\partial P_i^*}{\partial u_j^*} \quad D_{ij} = \frac{\partial u_i^*}{\partial P_j^*}$$

であり, カスチリアーノの定理から, 以下の表現を得る

$$C_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_i^* \partial u_j^*} \quad D_{ij} = \frac{\partial^2 U_c}{\partial P_i^* \partial P_j^*}$$

連続はりの影響係数と三連モーメントの式（再掲・復習）

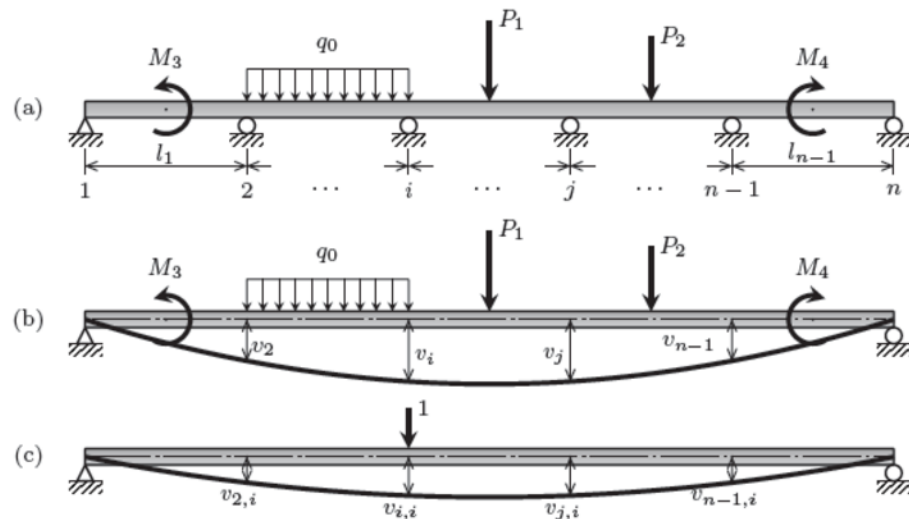


図8.6 連続はり重ね合せによる解法

$$\begin{bmatrix} v_{2,2} & v_{2,3} & \cdots & v_{2,n-1} \\ v_{3,2} & v_{3,3} & \cdots & v_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n-1,2} & v_{n-1,3} & \cdots & v_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{bmatrix} \quad (8.10)$$



どこか1点に単位荷重 1 を加えると、その点とそれ以外のすべての点のたわみとの関係がわかる。

線形システムでは、それがあらかじめわかっているならば、その関係を用いて重ね合せの原理により問題を解くことができる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vdots \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ & & \ddots & \\ \vdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.21)$$

反力を未知数に選ぶとフルマトリクスになってしまう

支点曲げモーメントを未知数に選ぶと疎行列に→解析的にも数值的にも有利

Bettiの相反定理とMaxwellの相反定理

二組の外力系

問題 1 : 一般化力 $P^{(1)}_i$ が作用し, 一般化変位 $u^{(1)}_i$ が生じている

問題 2 : 一般化力 $P^{(2)}_i$ が作用し, 一般化変位 $u^{(2)}_i$ が生じている

両問題の i 番目の力, 変位の種類, 作用点や作用方向は同一で, その値のみ異なる.

問題1の一般化力 $P^{(1)}_1, P^{(1)}_2, \dots, P^{(1)}_N$ が, 問題2の一般化変位 $u^{(2)}_1, u^{(2)}_2, \dots, u^{(2)}_N$ にする仕事 U^{12} と
問題2の一般化力 $P^{(2)}_1, P^{(2)}_2, \dots, P^{(2)}_N$ が, 問題1の一般化変位 $u^{(1)}_1, u^{(1)}_2, \dots, u^{(1)}_N$ にする仕事 U^{21} は

$$U^{12} = \sum_{i=1}^N P^{(1)}_i u^{(2)}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij} u^{(1)}_i u^{(2)}_j \quad U^{21} = \sum_{i=1}^N P^{(2)}_i u^{(1)}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij} u^{(2)}_i u^{(1)}_j$$

である. 影響係数の対称性 $C_{ij} = C_{ji}$ より, $U^{12} = U^{21}$

ベッチの相反定理 (Betti's reciprocal theorem)

第1の組の外力が第2の組の変位に対してなす仕事は, 第2の組の外力が第1の組の変位に対してなす仕事に等しい

マクスウェルの相反定理 (Maxwell's reciprocal theorem)

異なる2点 i, j に対して独立した荷重 P^*_i, P^*_j が作用する場合, 点 j の荷重 $P^*_j = 0$ のもとで点 i に単位力 $P^*_i = 1$ が作用したときの点 j の P^*_j 方向の変位は, 点 i の荷重 $P^*_i = 0$ のもとで点 j に単位力 $P^*_j = 1$ が作用したときの点 i の P^*_i 方向の変位に等しい

エネルギー法による不静定問題の解法

エネルギー法（カスチリアーノの定理とその関連手法）による解法

一般化力として、軸力、はり横断面にはたらく集中荷重・モーメント、軸にはたらくねじりモーメントなどを考え、対応する一般化変位として、それぞれ、伸び変位、たわみ・たわみ角、ねじれ角を方向に注意して考え、カスチリアーノの定理、単位荷重(単位モーメント)の定理(より一般的には、コンプリメンタリー仮想仕事の原理)、最小仕事の原理などを使って解くことができる

- (1) 不静定反力における幾何学的拘束をとりのぞく
- (2) その拘束に対応する一般化力を負荷した問題を解く
- (3) 一般化力の作用点の一般化変位がもとの幾何学的拘束と一致するという条件から一般化力を決定する

最小仕事の原理による解法

最小仕事の原理：不静定内力を X とし，コンプリメンタリーひずみエネルギー U_c を X を含む表現で表すとき，

$$\frac{\partial U_c}{\partial X} = 0$$

が成り立つ．これを最小仕事の原理という．

〔証明〕不静定内力 X の発生位置で切断法を適用すると，作用と反作用の原理により

領域1：一般化外力として $P^{(1)} = X$ が作用する領域

領域2：一般化外力として $P^{(2)} = -X$ が作用する領域

に分けることができる． U_c は，それぞれの領域のコンプリメンタリーひずみエネルギー $U_c^{(1)}$ ， $U_c^{(2)}$ （ともに不静定内力 X を変数として含む関数）の和 $U_c = U_c^{(1)} + U_c^{(2)}$ である．

一方，不静定内力に応じた一般化変位（変位または回転角）をカスチリアーノの定理により求め，切断する前の連続性の条件から

$$\frac{\partial U_c^{(1)}}{\partial P^{(1)}} = \frac{\partial U_c^{(2)}}{\partial P^{(2)}} \quad \text{つまり} \quad \frac{\partial U_c^{(1)}}{\partial X} = -\frac{\partial U_c^{(2)}}{\partial X} \quad \text{よって} \quad \frac{\partial}{\partial X} (U_c^{(1)} + U_c^{(2)}) = \frac{\partial U_c}{\partial X} = 0$$

単位荷重の定理による解法

コンプリメンタリー仮想仕事の原理

真の変位場（変位とひずみ）を一定に保ったまま仮想的に外力を δP^* のように変化させた時，仮想外力の変化によるコンプリメンタリー仕事の増分 $u^* \delta P^*$ はその外力につりあうように変化した内力の仮想的変化 $\delta \sigma^*$ によるコンプリメンタリーひずみエネルギーの仮想的変化に等しい．すなわち

$$u^* \delta P^* = \int_V \varepsilon \delta \sigma^* dV$$

単位荷重の定理

P からの仮想的な力の変化 δP にたいして，求めたい変位 u^* と同じ方向の δP^* の単位荷重を用いると

$$u^* \cdot 1 = \int_V \varepsilon \bar{\sigma}_1 dV$$

ここで ε はもとの荷重条件の解， $\bar{\sigma}_1$ は単位荷重1を受けるときの解である．このように δP^* の作用方向の変位 u^* を求める方法を単位荷重の定理という．
 仮想系の外力は，基本系の外力と独立に選ぶことができ，
 任意点に仮想力を作用させて変位を求めることができる．

単位荷重の定理による不静定問題の解法

真の解（添字なし）は，基本系としてもとの荷重条件で余剰拘束をとりのぞいた問題に対する解(添字0)と，仮想系としての未知の不静定力 X を受ける基本系の問題の解の和で表される．後者は，不静定力と同じ方向の単位荷重1を受けるときの解(バーをつけた変数の添字1で表す)の X 倍となる．

$$\int_V \varepsilon \bar{\sigma}_1 dV = \int_V (\varepsilon_0 + X \bar{\varepsilon}_1) \bar{\sigma}_1 dV = 0$$

エネルギー法小史

オイラー(L. Euler, 1707-1783) が、変分法でひずみエネルギーを最初に解析に採り入れた。

グリーン(G. Green, 1793-1841) はひずみエネルギーがひずみ成分の二次の同次関数を仮定

ラメ(G. Lamé, 1795-1870) もエネルギー保存則(クラペイロン(B.P.E. Clapeyron, 1799-1864) の定理) について著書で言及

メナブレア(L.F. Menabrea, 1809-1896) は、最小仕事の原理 (principle of least work) によって
不静定内力を求める方法を示した。

カスチリアーノ(A. Castigliano, 1847-1884) の定理は、1873 年に提出された彼の学位論文に表されている。その後、1875 年に出版された。この論文の重要性は当時のエンジニアたちに理解されず、一般に広がったのは1879 年のフランスでの出版とのことである。

カスチリアーノの定理は、エンゲッサー(F. Engesser, 1848-1931) によってコンプリメンタリーエネルギーの概念を導入して一般化された。

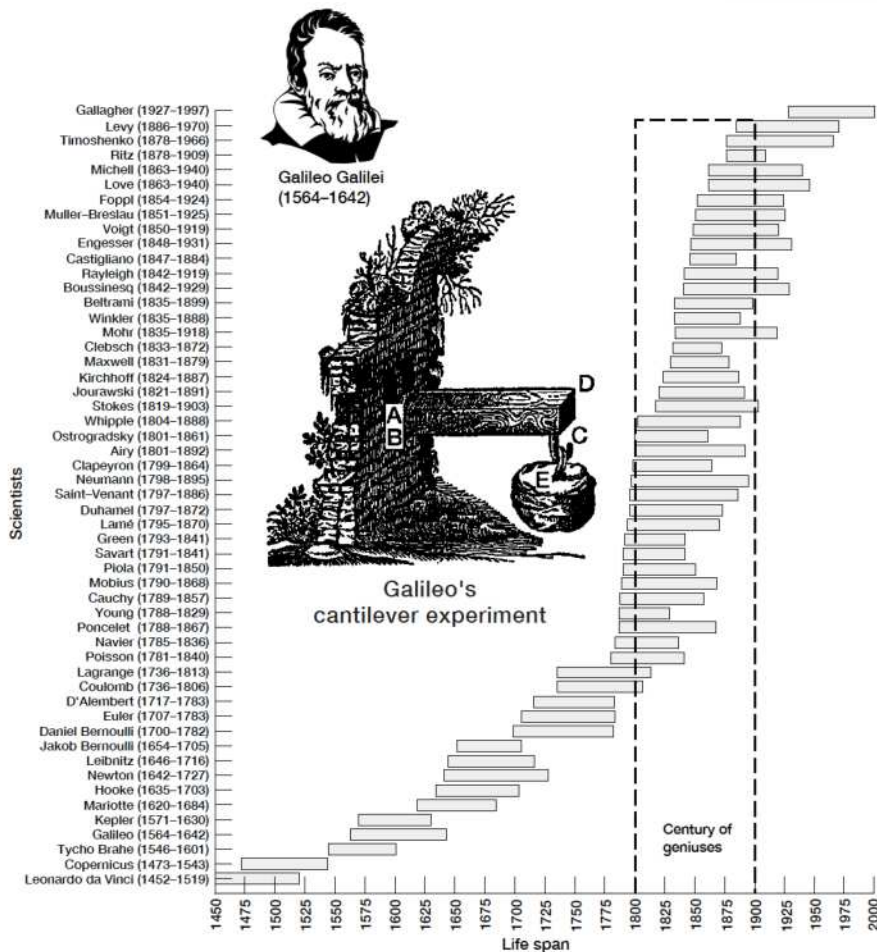


Figure 8.—Scientists who contributed to structural science.

カスチリアーノの定理の適用例 材料力学 p.240 例題12.4

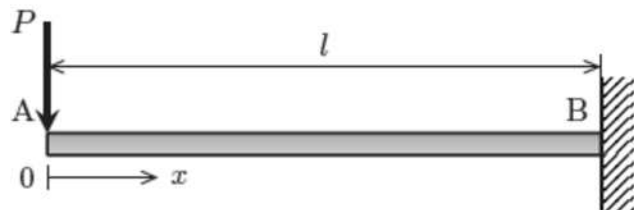


図 12.1 集中荷重を受ける片持ちはり

たわみの方程式からの直接積分法などでは境界条件条件を考慮しやすいように点Bを原点にとることが多かったが、

定積分の計算なので、積分しやすいように（被積分関数が簡単になるように）座標の取り方を設定することが可能

曲げモーメント分布と、荷重 P での偏微分を前もって準備

$$M(x) = -Px, \quad \frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

カスチリアーノの定理より、荷重 P の作用点の荷重作用方向の変位 u は

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial U_c}{\partial P} = \int_0^l \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx \\ &= \int_0^l \frac{-Px}{EI} (-x) dx \\ &= \frac{Pl^3}{3EI} \end{aligned}$$

カスチリアーノの定理の適用例 材料力学 p.240 例題12.5

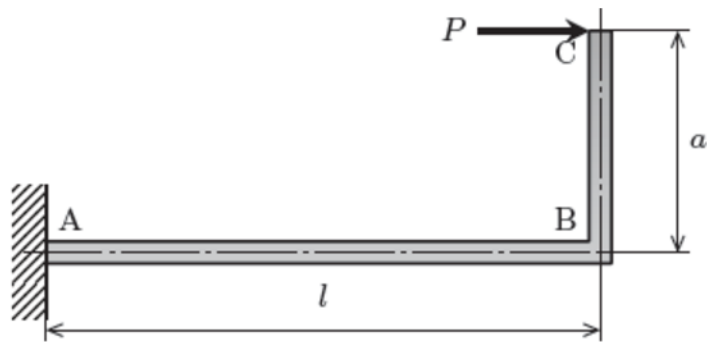


図 12.2 L 字に折れ曲がった部材のたわみ

曲げモーメントと, P での偏微分を準備

AB 間 ($0 \leq x \leq l$)

$$M(x) = -Pa, \quad \frac{\partial M}{\partial P} = -a$$

CB 間 ($0 \leq \xi \leq a$) (点 C から下向きに ξ)

$$M(\xi) = -P\xi, \quad \frac{\partial M}{\partial P} = -\xi$$

ポイント

積分区間ごとに分けて和をとることが可能
定積分の計算なので, 積分しやすいように
(被積分関数が簡単になるように) 座標の
取り方を設定することが可能

カスチリアーノの定理

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial U_c}{\partial P} = \int_0^l \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx + \int_0^a \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} d\xi \\ &= \frac{Pa^2l}{EI} + \frac{Pa^3}{3EI} = \frac{P}{3EI} a^2(a + 3l) \end{aligned}$$

3次元的に配置されたカンチレバー 材料力学 p.253 [12.8]

曲げモーメント, ねじりモーメントと, P での偏微分を準備

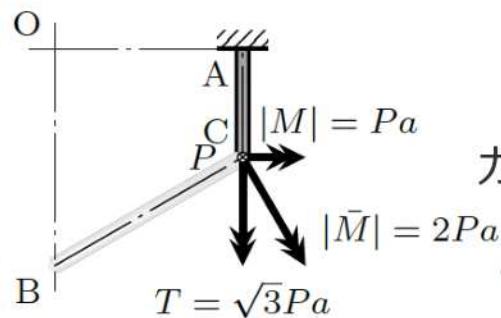
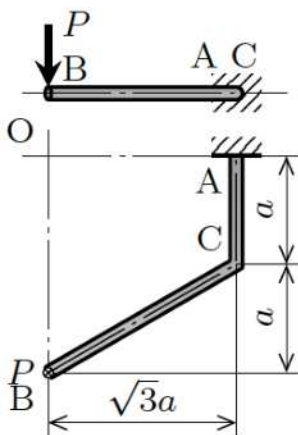
BC 間 ($0 \leq \xi \leq 2a$)

$$M(\xi) = -P\xi, \quad \frac{\partial M}{\partial P} = -\xi$$

CA 間 ($0 \leq \eta \leq a$)

$$M(\eta) = -P\eta - Pa, \quad \frac{\partial M}{\partial P} = -(\eta + a)$$

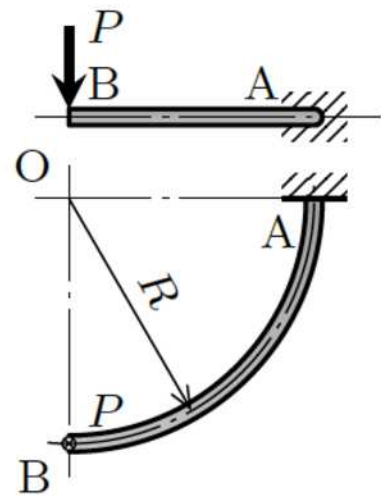
$$T(\eta) = \sqrt{3}Pa, \quad \frac{\partial T}{\partial P} = \sqrt{3}a$$



カスチリアーノの定理

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial U_c}{\partial P} = \int_0^{2a} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} d\xi + \int_0^a \left(\frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} + \frac{T}{GI_p} \frac{\partial T}{\partial P} \right) d\eta \\ &= \int_0^{2a} \frac{P\xi^2}{EI} d\xi + \int_0^a \frac{P(\eta + a)^2}{EI} d\eta + \frac{3Pa^3}{GI_p} \\ &= \frac{8Pa^3}{3EI} + \frac{P}{3EI} (8a^3 - a^3) + \frac{3Pa^3}{GI_p} \\ &= \left(\frac{5}{EI} + \frac{3}{GI_p} \right) Pa^3 \end{aligned}$$

3次元的に配置されたカンチレバー 材料力学 p.253 [12.9]

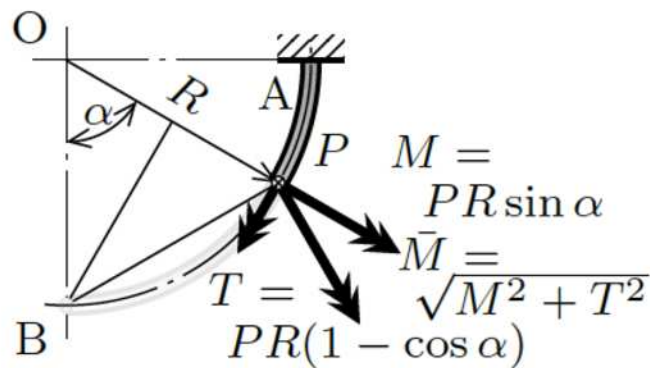


曲げモーメント, ねじりモーメントと, P での偏微分を準備

$$M(\alpha) = PR \sin \alpha, \quad \frac{\partial M}{\partial P} = R \sin \alpha$$

$$T(\alpha) = PR(1 - \cos \alpha), \quad \frac{\partial T}{\partial P} = R(1 - \cos \alpha)$$

カスチリアーノの定理

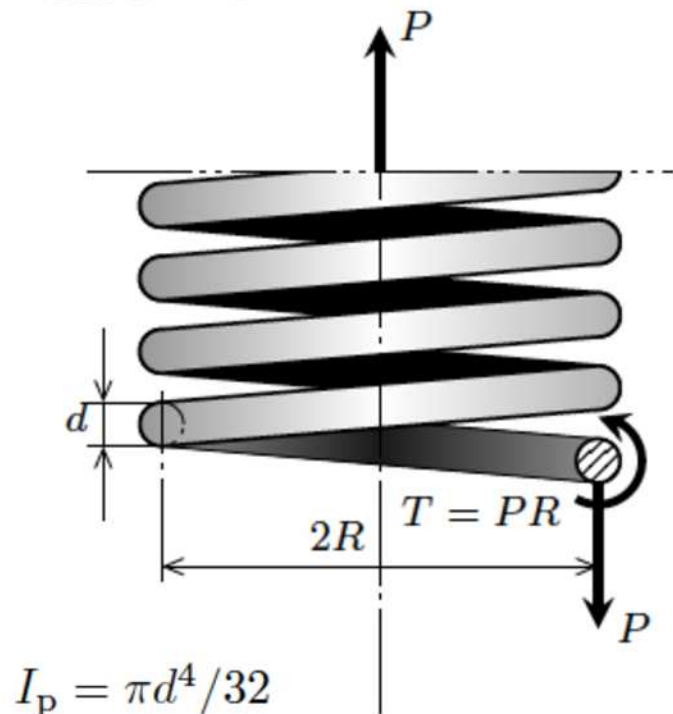


$$\begin{aligned}
 u &= \frac{\partial U_c}{\partial P} = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} + \frac{T}{GI_p} \frac{\partial T}{\partial P} \right) R d\alpha \\
 &= PR^3 \left\{ \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \alpha d\alpha + \frac{1}{GI_p} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \alpha)^2 d\alpha \right\} \\
 &= PR^3 \left\{ \frac{\pi}{4EI} + \frac{1}{GI_p} \left(\frac{3}{4}\pi - 2 \right) \right\}
 \end{aligned}$$

密巻コイルばね 材料力学 p.177 例題9.4

らせん角 α が小さく場合

$$\sin \alpha \simeq 0 \quad \cos \alpha \simeq 1$$



ねじりモーメントと, P での偏微分を準備

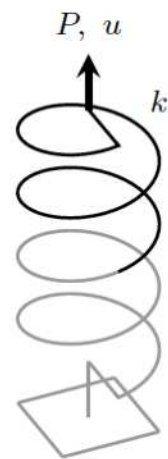
$$T = PR, \quad \frac{\partial T}{\partial P} = R$$

カスチリアーノの定理

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial U_c}{\partial P} = \int_0^{2\pi Rn} \frac{T}{GI_p} \frac{\partial T}{\partial P} ds \\ &= \frac{32PR^2}{\pi Gd^4} 2\pi Rn = \frac{64nPR^3}{Gd^4} \end{aligned}$$

$$k = \frac{Gd^4}{64nPR^3}$$

らせん角の大きいコイルばね 材料力学 p.178 例題9.5



$$P = ku$$

引張力 P

伸び u

ばね定数 k

回転角 ω

コイル半径 R

素線の直径 d ($\ll R$)

らせん角 α , 巻き数 n

コイルの長さ $2\pi n R \tan \alpha$

素線の全長 $\frac{2\pi R n}{\cos \alpha}$

曲げモーメント, ねじりモーメントと, P での偏微分を準備

$$M = PR \sin \alpha, \quad \frac{\partial M}{\partial P} = R \sin \alpha$$

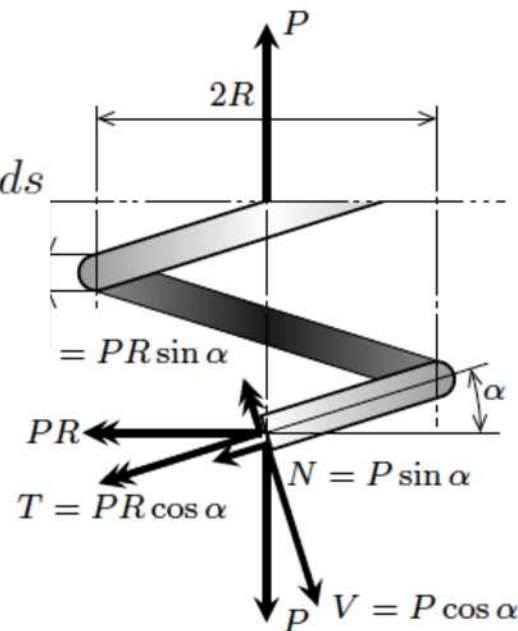
$$T = PR \cos \alpha, \quad \frac{\partial T}{\partial P} = R \cos \alpha$$

カスチリアーノの定理

$$u = \frac{\partial U_c}{\partial P} = \int_0^{\frac{2\pi R n}{\cos \alpha}} \left(\frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} + \frac{T}{GI_p} \frac{\partial T}{\partial P} \right) ds$$

$$= PR^2 \left(\frac{\sin^2 \alpha}{EI} + \frac{\cos^2 \alpha}{GI_p} \right) \frac{2\pi n R}{\cos \alpha}$$

$$k = \frac{d^4 \cos \alpha}{64 n R^3 \left(\frac{\cos^2 \alpha}{G} + \frac{2 \sin^2 \alpha}{E} \right)}$$



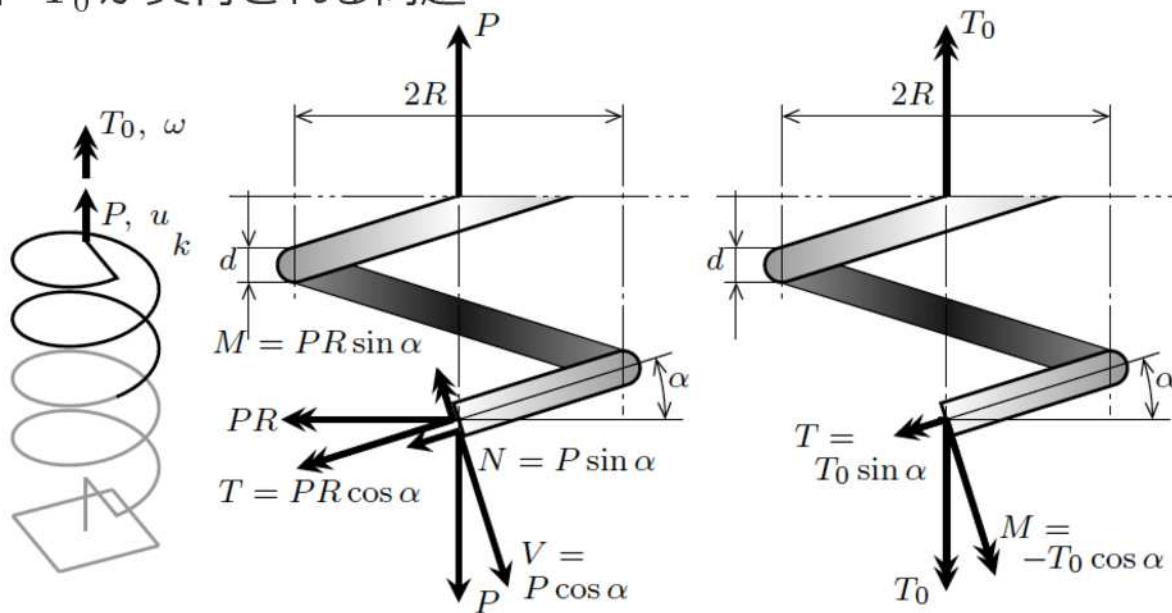
らせん角の大きいコイルばね

材料力学 p.178 例題9.5, p.252 [12.5] 例題9.5

引張力 P とモーメント T_0 が負荷される問題

伸び u

回転角 ω



コイル半径 R

素線の直径 d ($\ll R$)

らせん角 α , 巻き数 n

コイルの長さ $2\pi n R \tan \alpha$

素線の全長 $l = \frac{2\pi R n}{\cos \alpha}$

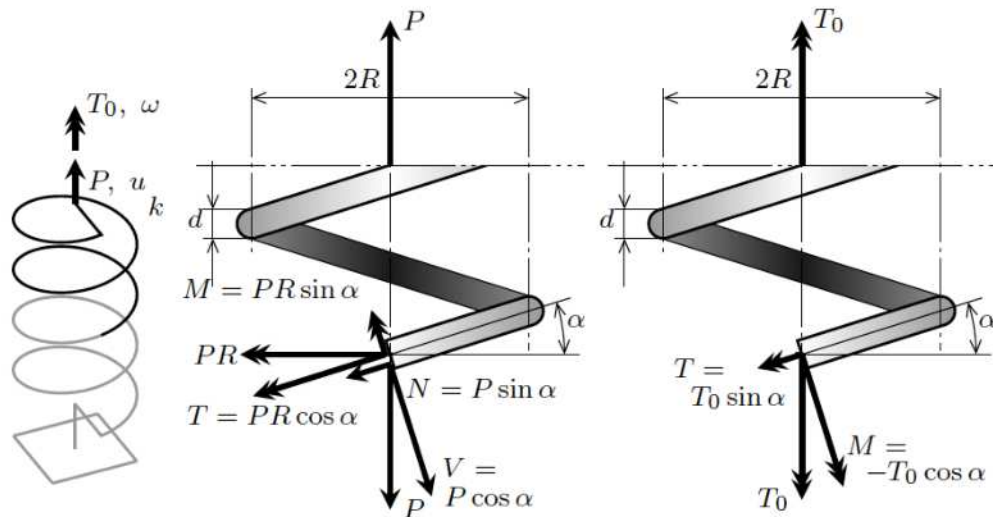
曲げモーメント, ねじりモーメント, その偏微分を準備

$$M = PR \sin \alpha - T_0 \cos \alpha, \quad \frac{\partial M}{\partial P} = R \sin \alpha, \quad \frac{\partial M}{\partial T_0} = -\cos \alpha$$

$$T = PR \cos \alpha + T_0 \sin \alpha, \quad \frac{\partial T}{\partial P} = R \cos \alpha, \quad \frac{\partial T}{\partial T_0} = \sin \alpha$$

らせん角の大きいコイルばね

材料力学 p.178 例題9.5, p.252 [12.5] 例題9.5



(1) 引張力 P のみ負荷 ($T_0=0$) の場合

$$u^{(1)} = \left. \frac{\partial U_c}{\partial P} \right|_{T_0=0} = PR^2l \left(\frac{\cos^2 \alpha}{GI_p} + \frac{\sin^2 \alpha}{EI} \right)$$

$$\begin{aligned} \omega^{(1)} &= \left. \frac{\partial U_c}{\partial T_0} \right|_{T_0=0} = \int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial T_0} + \frac{T}{GI_p} \frac{\partial T}{\partial T_0} \right) ds \\ &= PRl \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{1}{GI_p} - \frac{1}{EI} \right) \end{aligned}$$

(2) モーメント T_0 のみ負荷 ($P=0$) の場合

$$\begin{aligned} u^{(2)} &= \left. \frac{\partial U_c}{\partial P} \right|_{P=0} = \int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} + \frac{T}{GI_p} \frac{\partial T}{\partial P} \right) ds \\ &= T_0 R l \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{1}{GI_p} - \frac{1}{EI} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega^{(2)} &= \left. \frac{\partial U_c}{\partial T_0} \right|_{P=0} = \int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial T_0} + \frac{T}{GI_p} \frac{\partial T}{\partial T_0} \right) ds \\ &= T_0 l \left(\frac{\sin^2 \alpha}{GI_p} + \frac{\cos^2 \alpha}{EI} \right) \end{aligned}$$

(3) 回転角 $\omega = 0$ に拘束される場合

(1)と(2)の解の重ね合わせを考える

条件 $\omega = \omega^{(1)} + \omega^{(2)} = 0$ を満足する支持モーメント (不静定力) T_0 を求める. (P で表す).

伸び $u = u^{(1)} + u^{(2)}$ と P の関係を得る (ばね定数 k が定まる).

らせん角の大きいコイルばね

材料力学 p.178 例題9.5, p.252 [12.5] 例題9.5

(1) 引張力 P のみが負荷される ($T_0=0$ の場合の) 問題の回転角 $\omega^{(1)}$, (2) モーメント T_0 のみが負荷される ($P=0$ の場合の) 問題の伸び $u^{(2)}$ を考える. Bettiの相反定理から, P が $u^{(2)}$ にする仕事は, T_0 が $\omega^{(1)}$ にする仕事に等しい.

(1) 引張力 P のみが負荷される
($T_0=0$ の場合の) 問題の回転角 $\omega^{(1)}$

$$\begin{aligned}\omega^{(1)} &= \left. \frac{\partial U_c}{\partial T_0} \right|_{T_0=0} = \int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial T_0} + \frac{T}{GI_p} \frac{\partial T}{\partial T_0} \right) ds \\ &= PRl \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{1}{GI_p} - \frac{1}{EI} \right)\end{aligned}$$

(2) モーメント T_0 のみが負荷される
($P=0$ の場合の) 問題の伸び $u^{(2)}$

$$\begin{aligned}u^{(2)} &= \left. \frac{\partial U_c}{\partial P} \right|_{P=0} = \int_0^l \left(\frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} + \frac{T}{GI_p} \frac{\partial T}{\partial P} \right) ds \\ &= T_0 Rl \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{1}{GI_p} - \frac{1}{EI} \right)\end{aligned}$$

について, 確かに次の関係がなりたつ

$$Pu^{(2)} = T_0\omega^{(1)} = PRT_0l \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{1}{GI_p} - \frac{1}{EI} \right)$$

身の回りの一様強さ的な構造の応用 (再掲)

太陽の塔、千里橋



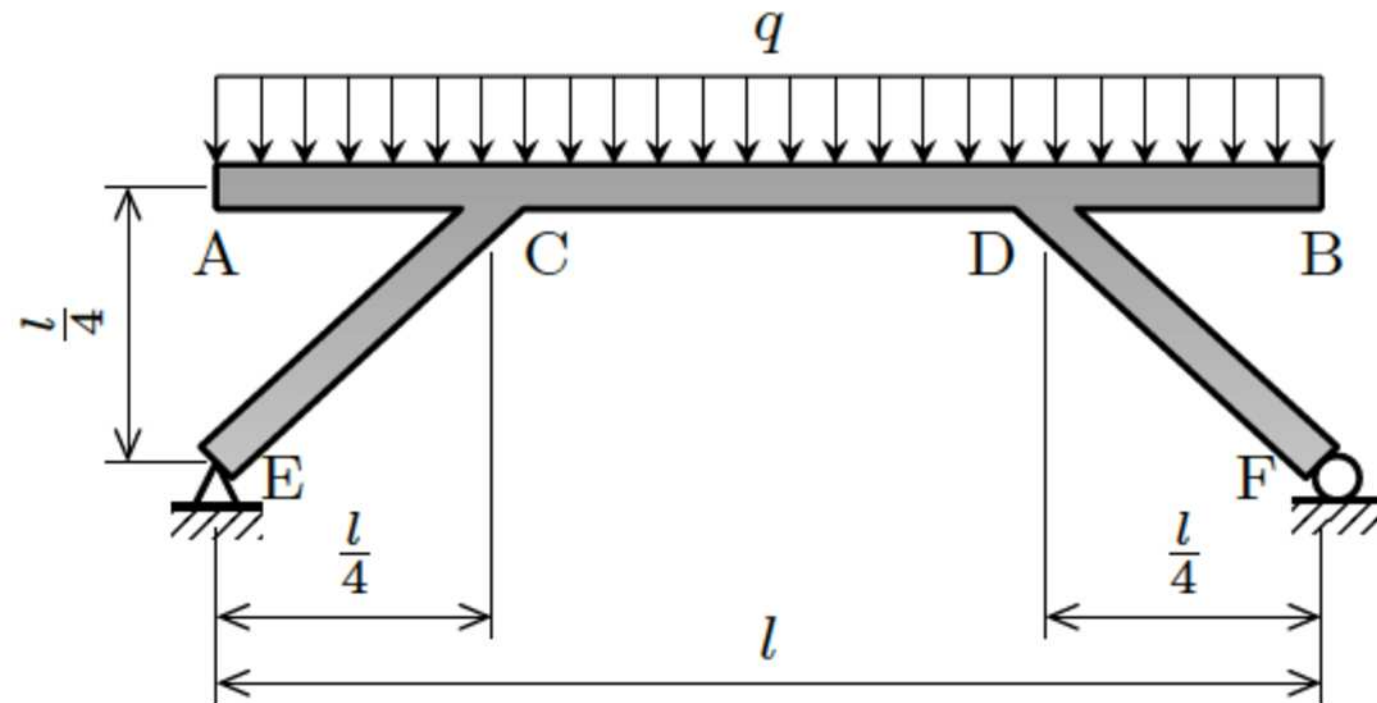
(2021/6/10 AN)



(2021/6/9 AN)

強度は、安定感、安心感と
無縁ではないかも

材料力学の目でみた千里橋（再掲）



曲げモーメント図を書いてみよう

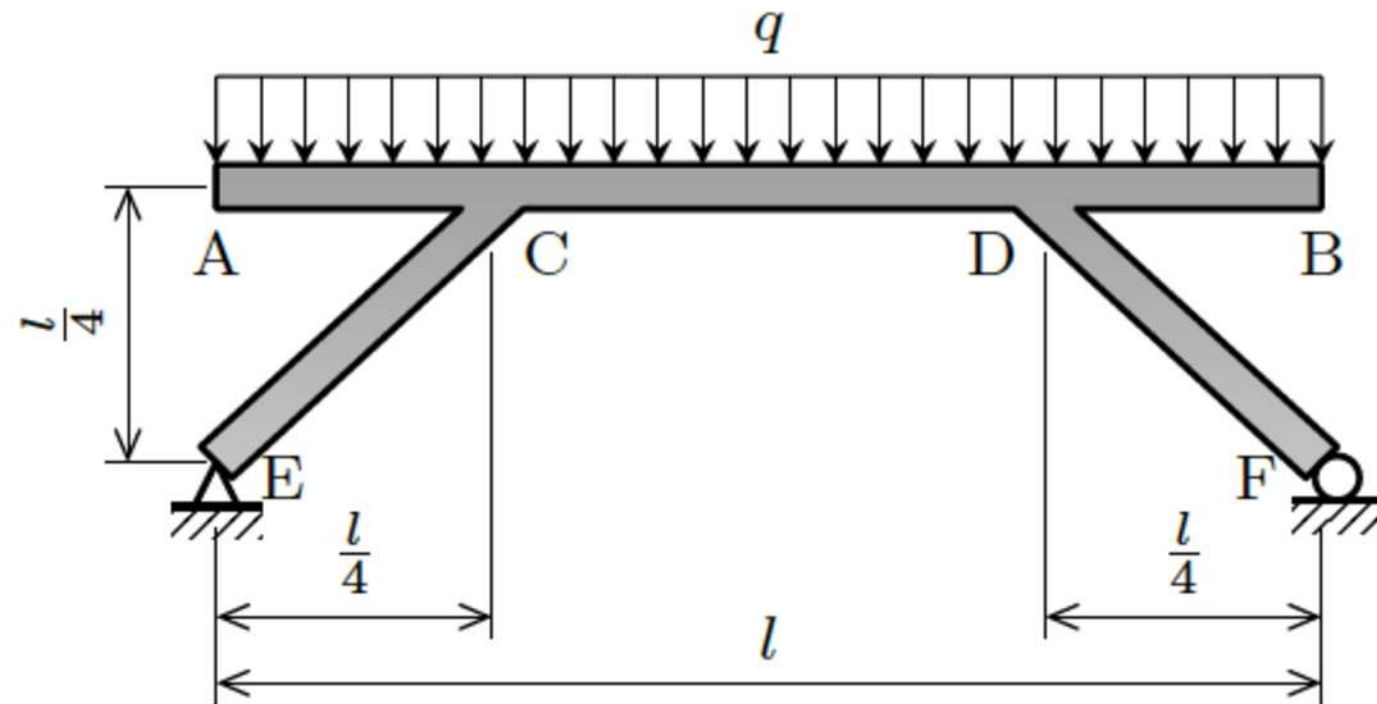


ココがポイント！

曲げモーメントが大きい部分の断面高さが大きくなるように設計されている

考えてみよう♪

材料力学の目でみた千里橋（再掲）



曲げモーメント図を書いてみよう



ココがポイント！

曲げモーメントが大きい部分の断面高さが大きくなるように設計されている

考えてみよう♪

橋の中央点のたわみ (考え方の一例)

構造の左半分について考える.

(1) EC 間 ($0 \leq \xi \leq \sqrt{2}l/4$)

$$N(\xi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}R_E = -\frac{\sqrt{2}}{4}(Q + ql), \quad \frac{\partial N}{\partial Q} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$M(\xi) = \frac{\sqrt{2}}{4}(Q + ql)\xi, \quad \frac{\partial M}{\partial Q} = \frac{\sqrt{2}}{4}\xi$$

$$u^{(1)} = \left. \frac{\partial U_c^{(1)}}{\partial Q} \right|_{Q=0} = \int_0^{\sqrt{2}l/4} \left(\frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial Q} + \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial Q} \right) d\xi$$

(2) AC 間 ($0 \leq x \leq l/4$)

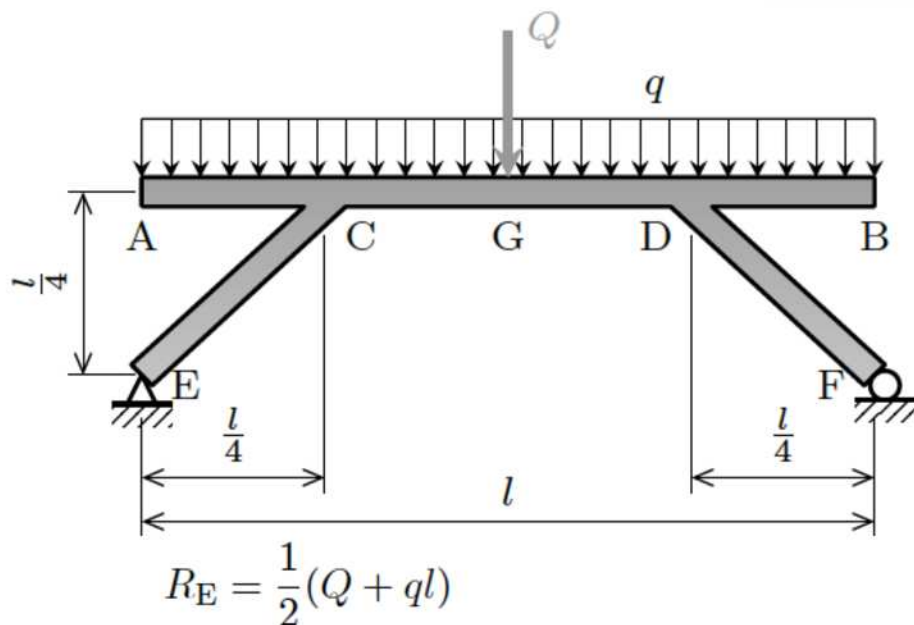
$$V(x) = -qx, \quad M(x) = -\frac{1}{2}qx^2, \quad \frac{\partial M}{\partial Q} = 0 \quad u^{(2)} = 0$$

(3) CG 間 ($0 \leq x_1 \leq l/4$)

$$V(x_1) = -\frac{ql}{4} + R_E - qx_1 \quad M(x_1) = \left(\frac{1}{8}Ql + \frac{7}{32}ql^2 \right) + \left(\frac{1}{2}Q + \frac{ql}{4} \right) x_1 - \frac{qx_1^2}{2} \quad \frac{\partial M}{\partial Q} = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{8}l$$

$$u^{(3)} = \left. \frac{\partial U_c^{(3)}}{\partial Q} \right|_{Q=0} = \int_0^{l/4} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial Q} dx_1$$

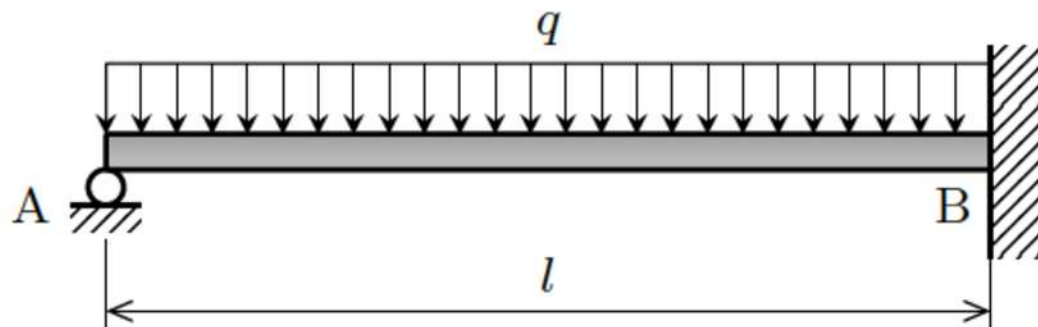
中央点Gのたわみ $u = 2(u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)})$



不静定問題のカスチリアーノの定理による解法

一般化力として、はり横断面にはたらく集中荷重，集中モーメントをとり，対応する一般化変位として，それぞれ，たわみ，たわみ角を考え，カスチリアーノの定理，単位荷重(単位モーメント)の定理(より一般的には，コンプリメンタリー仮想仕事の原理)，最小仕事の原理などを使って解くことができる。

1. 不静定反力における幾何学的拘束をとりのぞく。
2. その拘束に対応する一般化力を負荷した問題を解く。
3. 一般化力の作用点の一般化変位がもとの幾何学的拘束と一致するという条件から一般化力を決定する。



カスチリアーノの定理による解法 材料力学 p. 245 例題12.7

移動支持Aを取り除き，はり全体に一様分布荷重 q を受けるだけでなく，自由端に集中荷重 P を受ける片持ちはりの問題を考える。

せん断力 $V(x) = -qx - P$

曲げモーメント，その P での偏微分

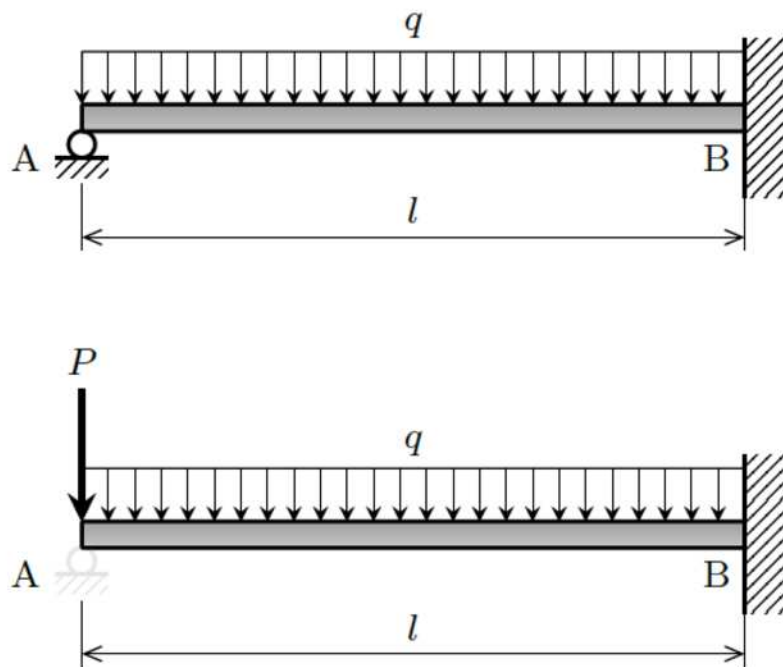
$$M(x) = -\frac{qx^2}{2} - Px, \quad \frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

点Aのたわみ

$$\begin{aligned} \delta_P &= \frac{\partial U_c}{\partial P} = \int_0^l \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^l \left(\frac{qx^2}{2} + Px \right) x dx = \frac{ql^4}{8EI} + \frac{Pl^3}{3EI} \end{aligned}$$

$\delta_P = 0$ を P について解いて

$$P = -\frac{3ql}{8}$$



最小仕事の原理による解法 材料力学 p. 246 例題12.8

移動支持Aの支持端とはりの間に作用する力を不静定内力 X (この場合は不静定反力, 余剰反力) とおく.

せん断力 $V(x) = -qx + X$

曲げモーメント, その P での偏微分

$$M(x) = -\frac{qx^2}{2} + Xx, \quad \frac{\partial M}{\partial X} = x$$

コンプリメンタリーひずみエネルギーを X で偏微分

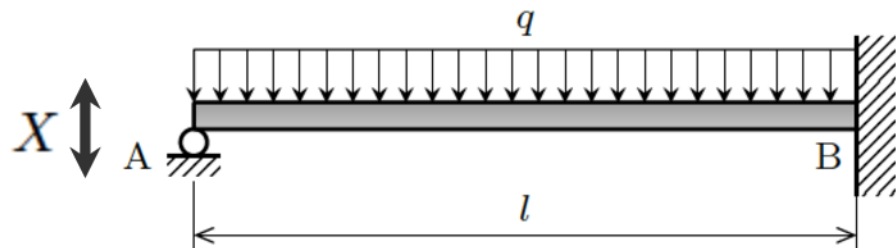
$$\frac{\partial U_c}{\partial X} = \int_0^l \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial X} dx = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(\frac{qx^2}{2} - Xx \right) x dx = \frac{ql^4}{8EI} - \frac{Xl^3}{3EI}$$

最小仕事の原理

$$\frac{\partial U_c}{\partial X} = 0$$

X について解いて

$$X = \frac{3ql}{8}$$



不静定内力 (力・モーメント) は, 曲げモーメントの式の表現が簡単になるように種類, 位置を任意に選ぶことができる.

単位荷重の定理による解法 材料力学 p. 247 例題12.9

移動支持Aを取り除く．

基本系：はり全体に一樣分布荷重 q を受ける問題

$$V_0(x) = -qx, \quad M_0(x) = -\frac{qx^2}{2}$$

仮想系：未知の不静定力 X を自由端に受ける問題

$$V_1(x) = X, \quad M_1(x) = Xx$$

単位荷重：不静定力と同じ方向の単位荷重1を自由端に受ける問題

$$\bar{V}_1(x) = 1, \quad \bar{M}_1(x) = x$$

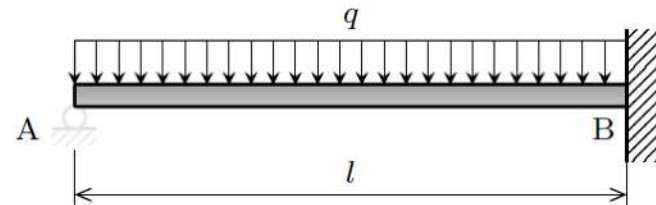
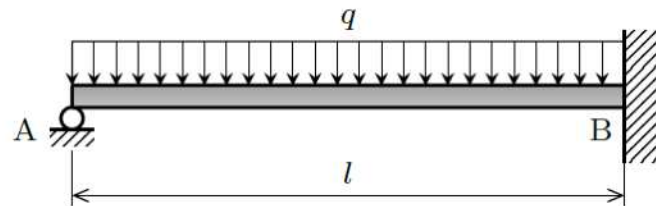
点Aは固定されているので，不静定力 X の作用点の変位は0（仮想系のコンプリメンタリー仕事は0）なので

$$\int_0^l \frac{M\bar{M}_1}{EI} dx = \int_0^l \frac{(M_0 + X\bar{M}_1)\bar{M}_1}{EI} dx = 0$$

X について解いて

$$X = -\frac{\int_0^l \frac{(-qx^2)x}{2EI} dx}{\int_0^l \frac{x^2}{EI} dx} = \frac{3ql}{8}$$

仮想系の外力は，基本系の外力とは独立に選ぶことができる．



次回

材料力学2025 シーズン2

第13話 柱の座屈

2025年7月18日（金）

Coming Soon . . .