材料力学2025 シーズン2

第１１話　エネルギー法 前編

2025年7月11日（金）

中谷 彰宏

教科書「渋谷陽二，中谷彰宏，材料力学，(2017)，コロナ社」
1, 2, 3, 4, 10, 11章（春学期の授業）を学習し終えて、
5, 6, 7, 8, 9, 12, 13章（夏学期の授業）をこれから学ぶ諸君のために

活力論争：力とはなにか？

（有賀暢迪，力学の誕生–オイラーと「力」概念の革新– (2018)）

力は，運動する物体が固有に持っているもの（**物性**）と考えられていた

デカルト（1596–1650）年は，**質量と速度の積（運動量）**を力と考えた

ライプニッツ（1646–1716）は，**質量と速度の２乗の積（運動エネルギー）**を力と考えこれを「活力（living force）」と呼んだ

約半世紀にわたってデカルト派とライプニッツ派の間に“ちから”の解釈に関する論争（活力論争，vis viva論争）が続いた

ダランベール（1717–1783）が1743年の著書《力学》の中で，デカルトの考えた“ちから”は力の時間積分であり，ライプニッツの“活力”は力の位置座標についての積分(つまり仕事)であることを示し，力は物体が持つ物性ではないことが示された

ヤング（1773-1829, 英)は，1807年の著書《自然哲学講義》の中で，エネルギーの概念を提唱（仕事をする能力としての**エネルギー**が，力(vis)の概念とは異なるものとして定義）

エネルギー（仕事）と力

エネルギー（仕事）　＝　力　×　距離

目に見えないもの　目に見えるもの

力と距離は双対な関係（共役な関係とも呼ばれる）

〈距離〉は，〈変形〉などのさまざまな〈現象〉

〈力〉は，その現象を作り出す（ドライブする）〈駆動力〉

として一般化して考えることができる

力　＝　エネルギー　÷　現象

と形式的に書くことができる

エネルギー（内部仕事）・力・変形・剛性と安定性

$$\text{エネルギー} \quad = \quad \text{力} \quad \times \quad \text{変形}$$

目に見えないもの　目に見えるもの

線形応答の理論では，形式的に

$$\text{力} \quad = \quad \text{剛性} \quad \times \quad \text{変形}$$

したがって，形式的に（実際には，さすがにそれほど単純ではないのだが形式的に）

$$\text{エネルギー} \quad \propto \quad \text{剛性} \quad \times \left(\text{変形}\right)^2$$

剛性が正であることを，エネルギー関数の**凸性**といい．変形に対して元に戻そうとする復元力がはたらく（つまり**安定性**を有している）という重要な性質である

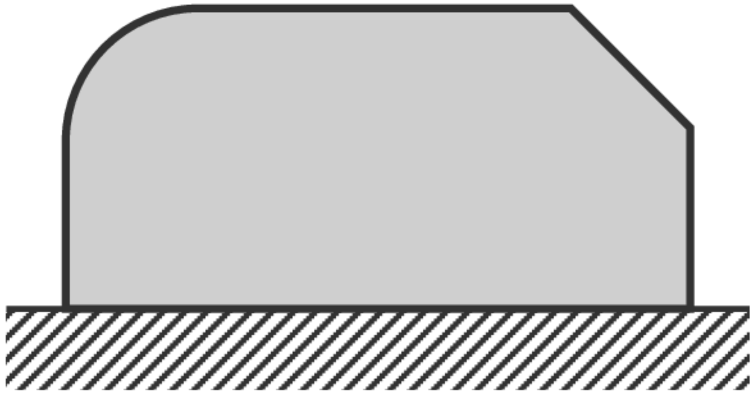
逆にこの安定性が失われる時，元に戻らない変形（**塑性変形**や**破壊**）が生じる

しかし最近の研究では，**不安定性**はそれを新しい機能を生み出すものとして積極的に利用されてきている

机の上に置かれた静止している物体
Johann Bernoulli（1667 - 1748）の考察

「小さな速度が消えては生まれ，また生まれては消える．この一定した交替こそが，この産出と破壊の繰り返しこそが，乗り越えられない障害物に支えられているときの重みの効果なのである．それに我々は「死力（dead force ）という名前を与える」 Johann Bernoulli（1667 - 1748）

（有賀暢迪，力学の誕生–オイラーと「力」概念の革新– (2018)）



その小さな速度を見えるようにするために仮想的な変位 (virtual displacement) を与える

机にはたらく力を調べるために，机を取り除き，運動（変形も含む）をはじめそうになった物体を支えるためにどのような力（分布）を与える必要があるかを考察する

力は目に見えないので本気で力を加えているかどうかは見た目からだけでは判断できない

Epic battle: Jason Statham got into a wrestling match with Jimmy Fallon on his late night show, on Friday

https://www.dailymail.co.uk/tvshowbiz/article-2346633/Jason-Statham-wrestles-Jimmy-Fallon-battle-wits-brawn.html

パントマイム 劇場「ワガママな黄色い鞄」
作・演出 岡村渉

https://youtu.be/i0tVWbRtb6k

May The Force Be With You
フォースの力学？？

力に対する固体の応答では剛性が小さいものほど変形を観察して力を知ることができる

変形が微小でも測定器の感度が高ければ力を検出できる（ひずみゲージ・ロードセル）

ダース・ベイダーのマントを引張るレイア姫（2014/8 AN）

浮遊するヨーダ（2014/8 AN）

物体を押すひと

Euler, “Vera vires existimandi ratio” (1957).

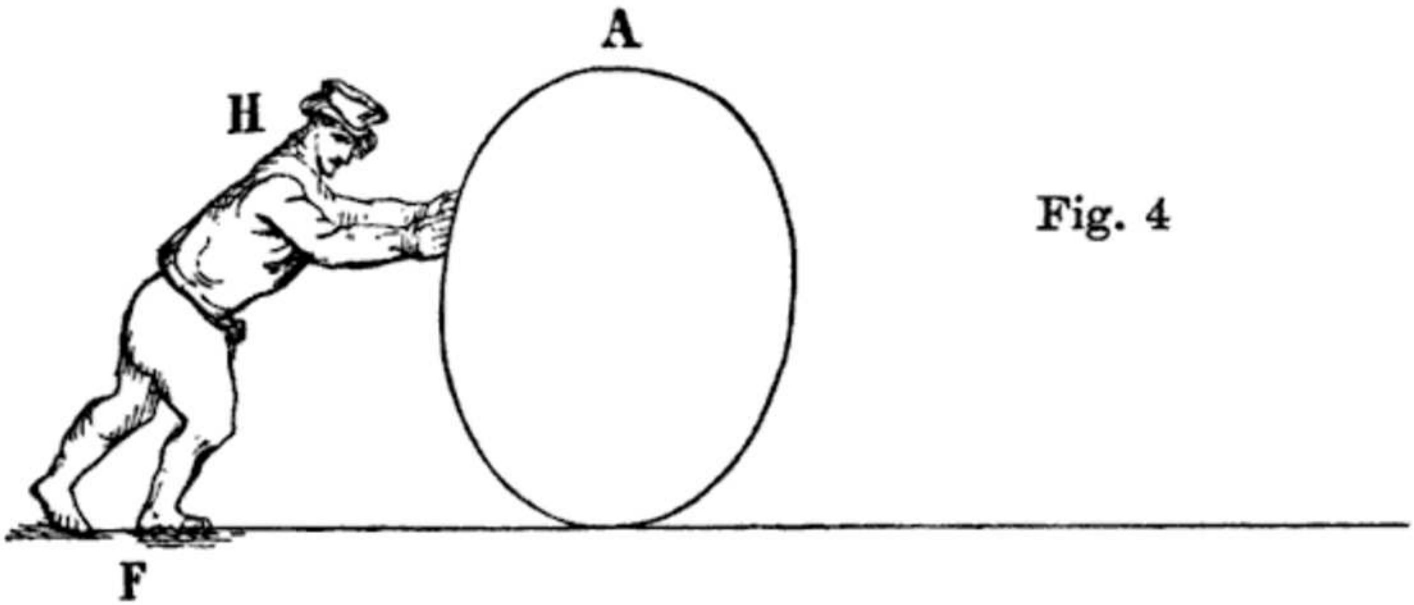
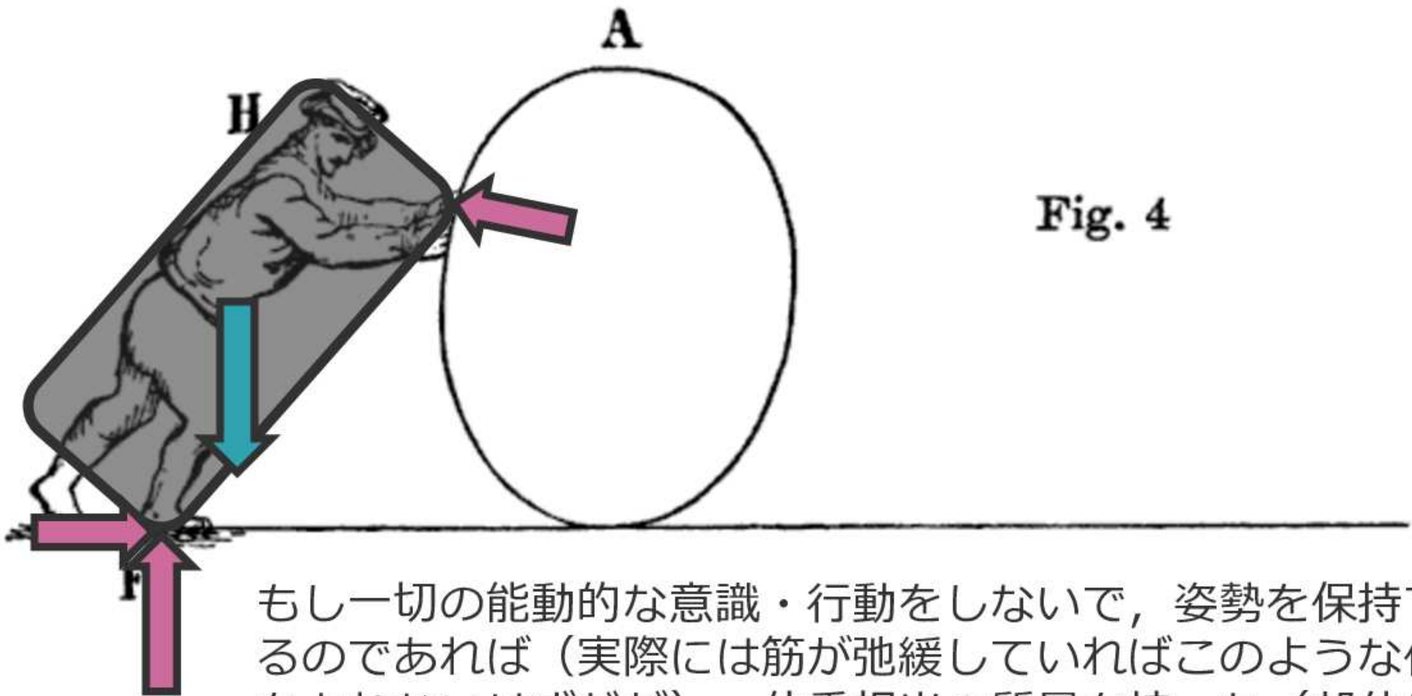


Fig. 4

物体を押すひと

Euler, “Vera vires existimandi ratio” (1957).



もし一切の能動的な意識・行動をしないで，姿勢を保持できるのであれば（実際には筋が弛緩していればこのような体勢をとれないはずだが），体重相当の質量を持った（部位により密度が異なる）剛体の釣り合い問題に帰着される

物体を押すひと

Euler, “Vera vires existimandi ratio” (1957).

力を込めて押しているかどうかは外から見ているだけでは判断できない

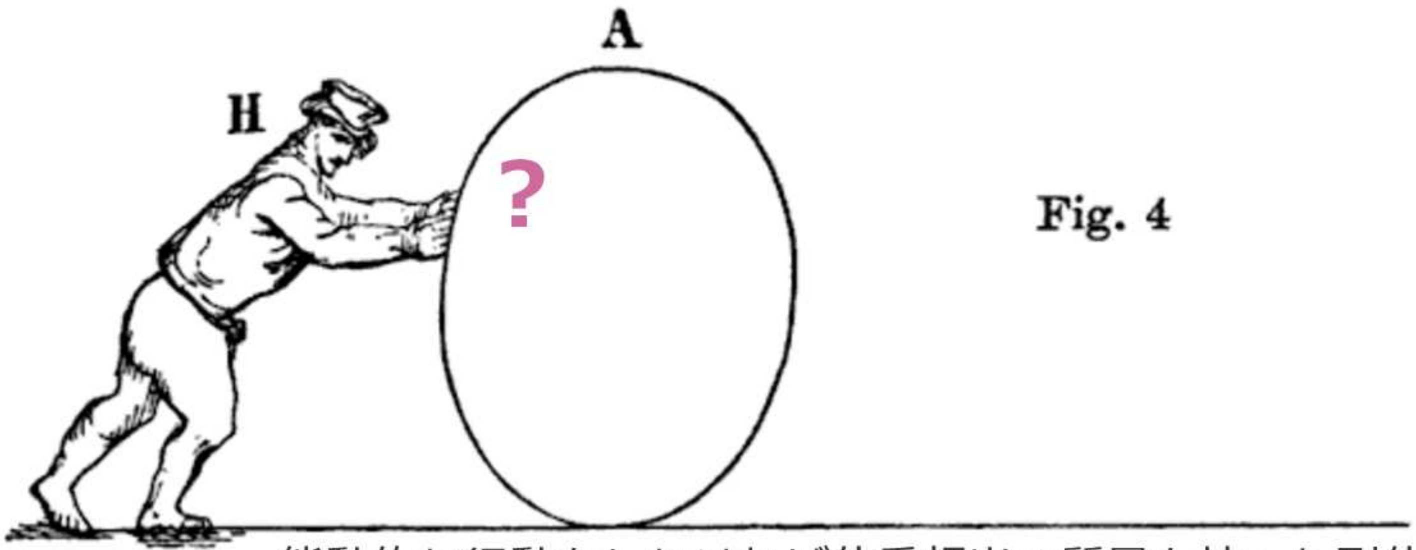


Fig. 4

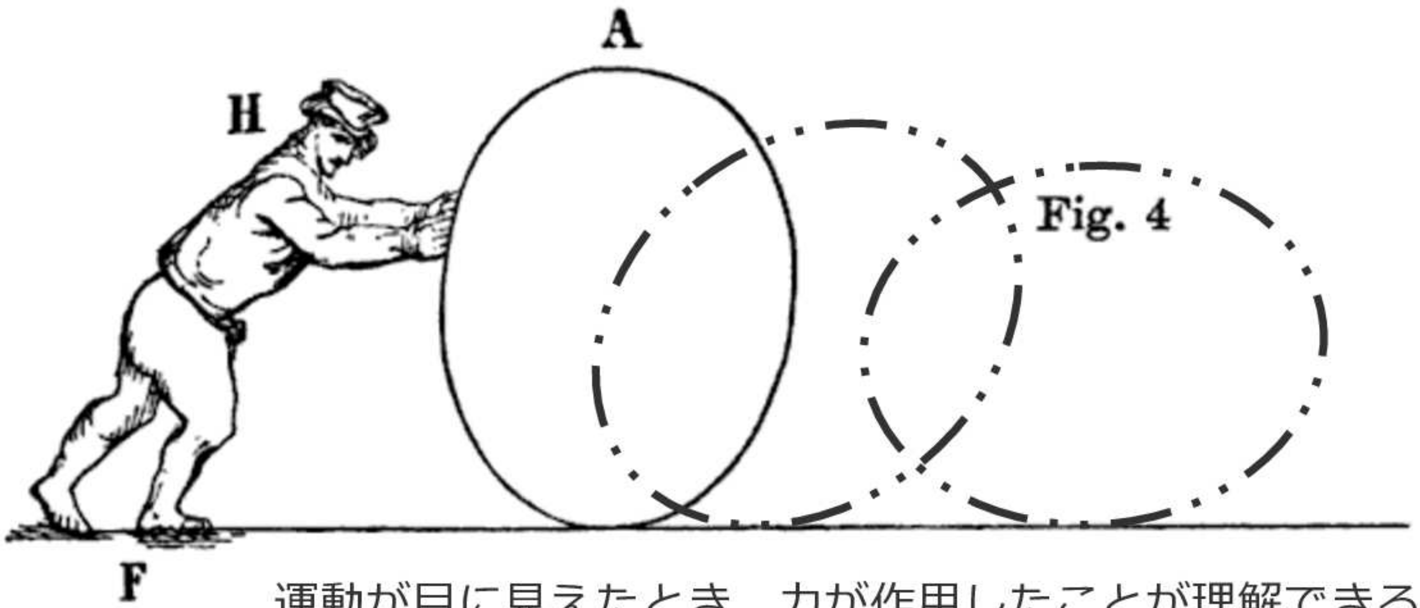
能動的な行動をしなければ体重相当の質量を持った剛体の釣り合い問題に帰着される

実際には，ひとが押すことを意識する時，骨格筋が力を発生するアクチュエーターとして能動的に機能する（身体を自ら変形させようとする）のでそのような単純な問題ではない

物体を押すひと

Euler, “Vera vires existimandi ratio” (1957).

運動（移動，回転，変形）すると，力の作用が見える.

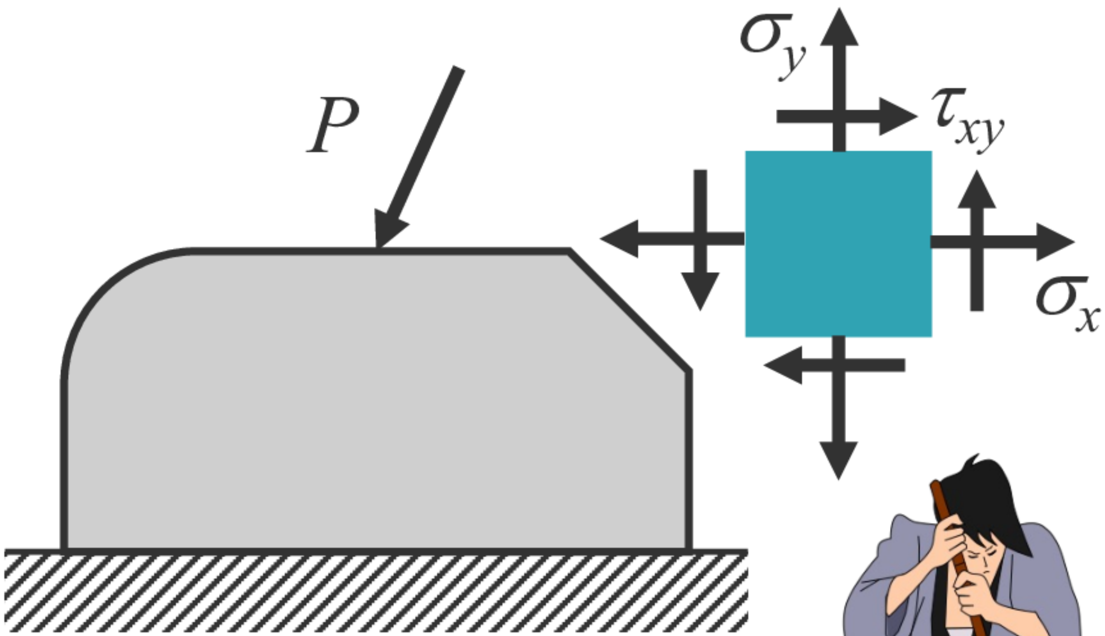


運動が目に見えたとき，力が作用したことが理解できる

物体がひとの手を離れて運動し始めると力は解放される（重力のみが作用する）

内部の力：応力（再掲）

はたらいている内力（応力）を想像してみよう！　考えてみよう♪



内力（応力分布）が、静力学的に釣合い状態にあるとき、正解！

任意の部分領域を切り出したときに力の釣り合いが保たれるような分布

自由表面では面の法線方向の垂直応力とせん断応力は0である。

自由表面の接平面方向の垂直応力は非ゼロでもよい。

力を加えても変形しなければ仕事は０

変形の大きさは剛性に関係している

外部仕事

ばねの引張の方法：力の作用点の変位 u を0から徐々に大きくしていく

引張力 P は（一定ではなく） u の増大につれて，徐々に大きくなる

$$P = P(u)$$

外部仕事：外から加えた仕事 $U(u)$

$$U(u) = \int_0^u P(u)\,du$$

すなわち

$$P(u) = \frac{dU(u)}{du}$$

微分・積分の関係

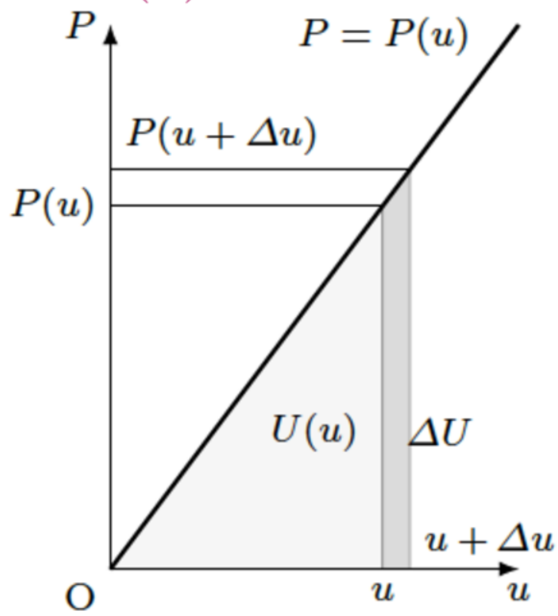
もし$U(u)$ が二次関数なら

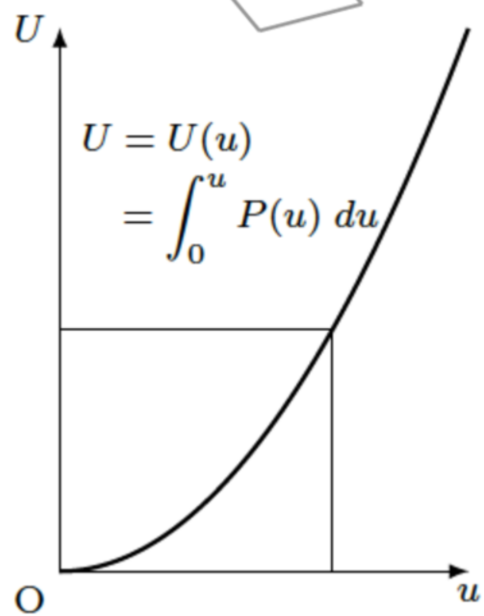
$$U(u) = \frac{1}{2}ku^2$$

力$P(u)$はフックの法則　$P = ku$

エネルギー$U(u)$が先か！

力$P(u)$が先か！





コンプリメンタリー

Complementary

*com・ple・men・ta・ry [US] kɑ̀mpləméntəri ｜ [UK] kɔ̀mpliméntəri

$\boxed{\text{形}}$ 補足的、補足の、〔不足する部分を〕補充［補足］する、〔お互いに〕相補う、補完する（あるものを補足して完全にする）

- 《生物》〔遺伝子が〕補足の、相補の
- 《数学》〔集合が〕補の
- 《数学》〔事象が〕余の

・When two angles are complementary, their sum is 90 degrees.：二つの角が余角を成す場合、それらの角度の和は90度である。

- 《言語学》補語の
- 《医》〔医療が〕補完の
  補充［補完］するもの
- 補色◆【同】complementary color

ルジャンドル変換

Legendre(1752-1833) は，微分方程式の解法にとって重要な変数変換法を見つけた．この変換法は，関数の変数をその微分に変えるために用いられる変換であり，優れた性質を持っていることから多くの問題に適用されている．

例えば，解析力学におけるラグランジアンをハミルトニアンへの変換，熱力学における熱力学関数間の変換など，いずれも，機械工学の他の授業でも学ぶことになる．

その他，工学，物理学において広く応用されている。

Adrien-Marie Legendre
(1752-1833)

コンプリメンタリー外部仕事（ルジャンドル変換）

コンプリメンタリー外部仕事 $U_c(P)$ を，$U(u)$ から$U_c(P)$への次の変換で定義する．
すなわち$P = P(u)$ の逆関係$u = u(P)$ 考え，$Pu - U(u)$ に代入し，
P を独立変数とする関数にしたものを考える（これをルジャンドル変換という）

$$U_c(P) = Pu(P) - U(u(P))$$

上式を両辺をP で微分し，$P = dU/du$ を考慮すると，

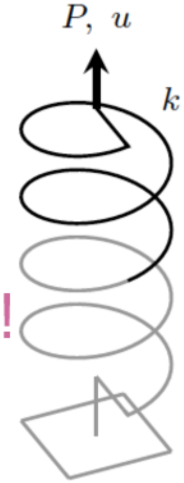
$$\begin{aligned}\frac{dU_c(P)}{dP} &= u(P) + P\frac{du(P)}{dP} - \frac{dU(u)}{du}\frac{du(P)}{dP}\\ &= u(P) + \left(P - \frac{dU(u)}{du}\right)\frac{du(P)}{dP}\\ &= u(P)\end{aligned}$$

双対（dual）

を得る．それを積分した関係とともに整理すると，

$$U_c(P) = \int_0^P u(P)\,dP, \quad u(P) = \frac{dU_c(P)}{dP} \qquad U(u) = \int_0^u P(u)\,du, \quad P(u) = \frac{dU(u)}{du}$$

コンプリメンタリー外部仕事



ばねの引張の方法：力の作用点の力 P を0から徐々に大きくしていく

作用点の変位 u は P の増大につれて，徐々に大きくなる

$$u = u(P)$$

エネルギー$U_c(P)$が先か！

変位$u(P)$が先か！

コンプリメンタリー外部仕事： $U_c(P)$

$$U_c(P) = \int_0^P u(P)\, dP$$

微分・積分の関係

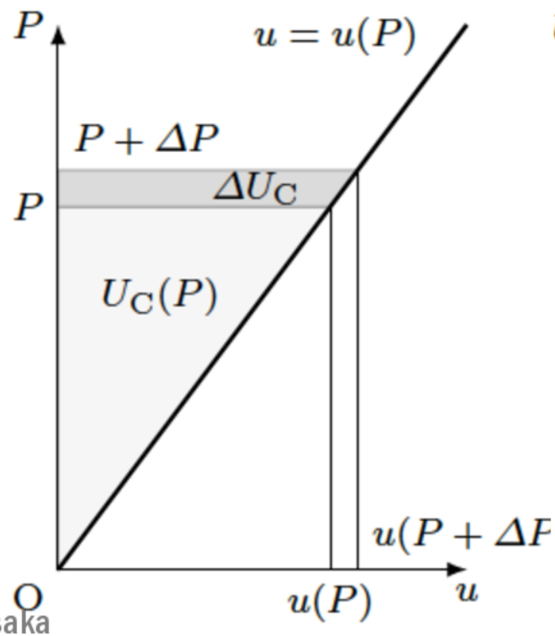
すなわち

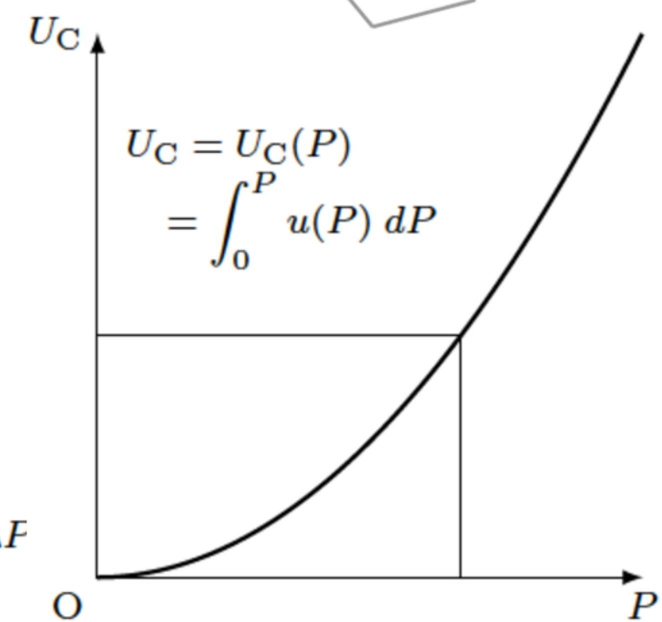
$$u(P) = \frac{dU_c(P)}{dP}$$

もし$U_c(P)$ が二次関数なら

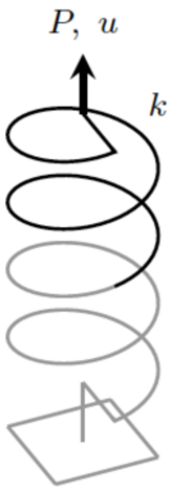
$$U_c(P) = \frac{1}{2k} P^2$$

力$u(P)$はフックの法則 $u = k^{-1} P$





線形弾性材料（フックの法則にしたがう場合）



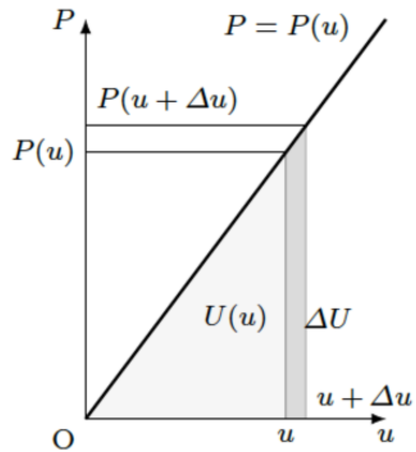
線形弾性材料の場合，P とu は，剛性（ばね定数）k を用いて，$P = ku$，$u = P/k$ のように比例関係にある．このとき，外部仕事とコンプリメンタリー外部仕事はそれぞれ変位，荷重の二次関数，

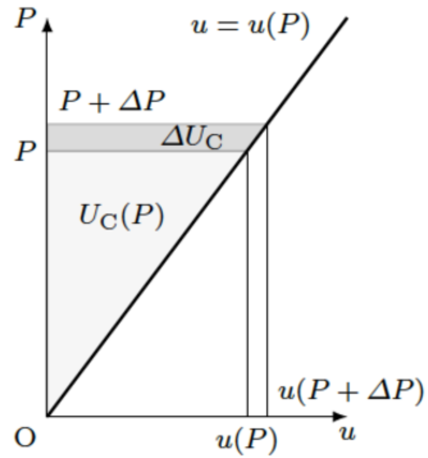
$$U(u) = \frac{1}{2}ku^2, \quad U_c(P) = \frac{1}{2k}P^2$$

で表される．この場合，$(P, u) = (0, 0)$ の状態から負荷を受けて変形した(P, u) の状態までの外部仕事とコンプリメンタリー外部仕事は等しく，弾性材料では，これらの仕事は負荷履歴によらず，最終の(P, u) の状態で一意に定まる状態量であり，

$$U = U_c = \frac{1}{2}Pu$$

である．





ここでQuestion

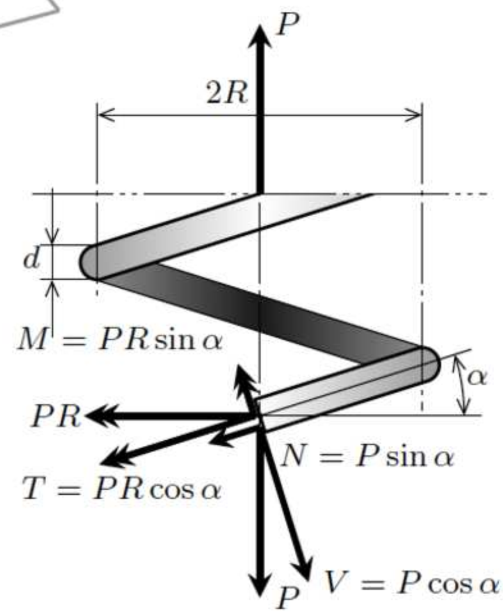
Q) 外部仕事（コンプリメンタリー外部仕事）はどこにいったか？

A) 内部仕事（コンプリメンタリー内部仕事）として貯えられている.

Benedict Cumberbatch stars as Sherlock

外部仕事に関しては力の作用点での力と変位による仕事に着目していた.

内部仕事については材料全体に分散している内力（応力）とひずみによる仕事に注目する必要がある.



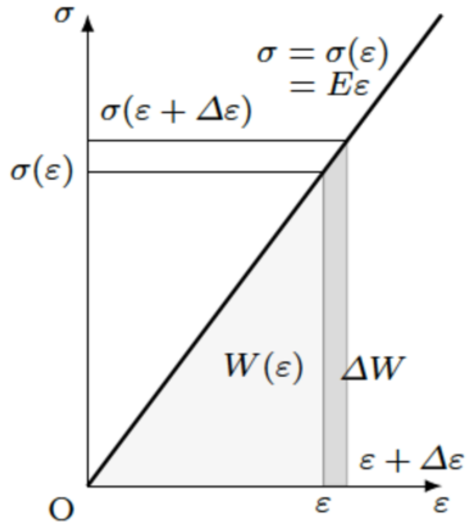
内部仕事とひずみエネルギー密度

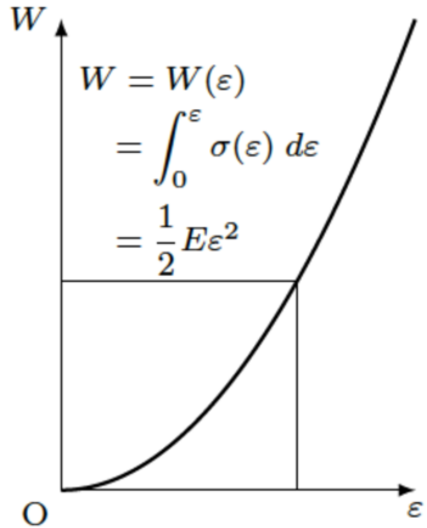
垂直応力 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$，せん断応力 $\boldsymbol{\tau} = (\sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{xy})$
垂直ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$，せん断ひずみ $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy})$
の状態の微小要素を考え，応力をひずみの関数とみる（$P = P(u)$との類似性）．
一般に，$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\varepsilon, \gamma)$，$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\varepsilon, \gamma)$であるが，簡単のために$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\varepsilon)$，$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\gamma)$ とする．
このとき微小要素に作用する応力とひずみが変化することによる仕事を内部素仕事という．
内部仕事は

$$W(\varepsilon, \gamma) = \int_0^{\varepsilon} \boldsymbol{\sigma}(\varepsilon) \cdot d\varepsilon + \int_0^{\gamma} \boldsymbol{\tau}(\gamma) \cdot d\gamma$$

$W(\varepsilon, \gamma)$ は負荷履歴によらない状態量であり，ひずみエネルギー密度（単位体積あたりのひずみエネルギー）を表す．応力はその導関数で定義される．

$$\boldsymbol{\sigma}(\varepsilon) = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon}, \quad \boldsymbol{\tau}(\gamma) = \frac{\partial W}{\partial \gamma}$$





コンプリメンタリー内部仕事とコンプリメンタリーひずみエネルギー密度

コンプリメンタリーひずみエネルギー密度 $W_c(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})$ を，$W(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\gamma})$ から $W_c(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})$ への次の変換で定義する．すなわち $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$，$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\gamma})$ の逆関係 $\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma})$，$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\tau})$ を考えて $\boldsymbol{\sigma}\cdot\varepsilon+\boldsymbol{\tau}\cdot\gamma-W(\varepsilon,\gamma)$ に代入し，$\boldsymbol{\sigma}$，$\boldsymbol{\tau}$ を独立変数とする関数にしたものを考える（これをルジャンドル変換という）．

$$W_c(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\sigma}\cdot\varepsilon(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\tau}\cdot\gamma(\boldsymbol{\tau}) - W(\varepsilon(\boldsymbol{\sigma}),\gamma(\boldsymbol{\tau}))$$

上式の両辺を $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\tau}$ で偏微分し，$\boldsymbol{\sigma}=\partial W/\partial\varepsilon$，$\boldsymbol{\tau}=\partial W/\partial\gamma$ を考慮すると，

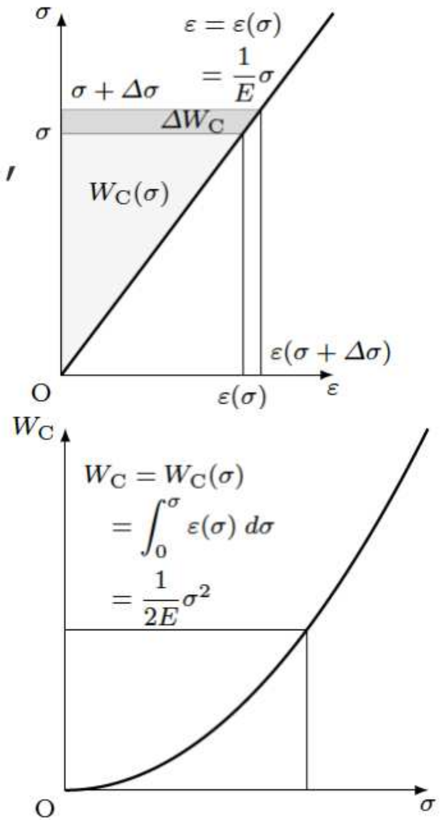
$$\frac{\partial W_c(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau})}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \varepsilon(\boldsymbol{\sigma}) + \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial W(\varepsilon,\boldsymbol{\tau})}{\partial\varepsilon}\right)^T \left[\frac{\partial\varepsilon(\boldsymbol{\sigma})}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right] = \varepsilon(\boldsymbol{\sigma})$$

$$\frac{\partial W_c(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau})}{\partial\boldsymbol{\tau}} = \gamma(\boldsymbol{\tau}) + \left(\boldsymbol{\tau} - \frac{\partial W(\varepsilon,\gamma)}{\partial\gamma}\right)^T \left[\frac{\partial\gamma(\boldsymbol{\tau})}{\partial\boldsymbol{\tau}}\right] = \gamma(\boldsymbol{\tau})$$

を得る．それを積分した関係とともに整理すると，

$$W_c(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}) = \int_0^{\boldsymbol{\sigma}} \varepsilon(\boldsymbol{\sigma})\cdot d\boldsymbol{\sigma} + \int_0^{\boldsymbol{\tau}} \gamma(\boldsymbol{\tau})\cdot d\boldsymbol{\tau}$$

$$\varepsilon(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\partial W_c}{\partial\boldsymbol{\sigma}},\quad \gamma(\boldsymbol{\tau}) = \frac{\partial W_c}{\partial\boldsymbol{\tau}}$$



等方線形弾性材料（一般化フックの法則にしたがう材料）の ひずみエネルギー密度とコンプリメンタリーひずみエネルギー密度

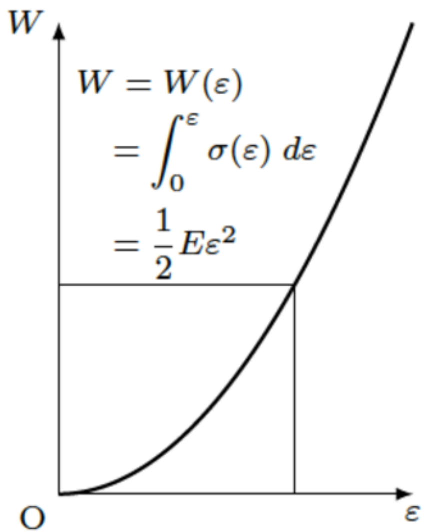
等方線形等方弾性材料（一般化フックの法則にしたがう材料）では，応力はひずみの線形関数であり，$\boldsymbol{\sigma}=[\boldsymbol{E}]\,\boldsymbol{\varepsilon}$，$\boldsymbol{\tau}=G\,\boldsymbol{\gamma}$となり，逆に，ひずみを応力の関数で表現して，
$\boldsymbol{\varepsilon}=[\boldsymbol{E}]^{-1}\,\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\gamma}=(1/G)\,\boldsymbol{\tau}$と表せる．ここで，$G=E/\{2(1+\nu)\}$，

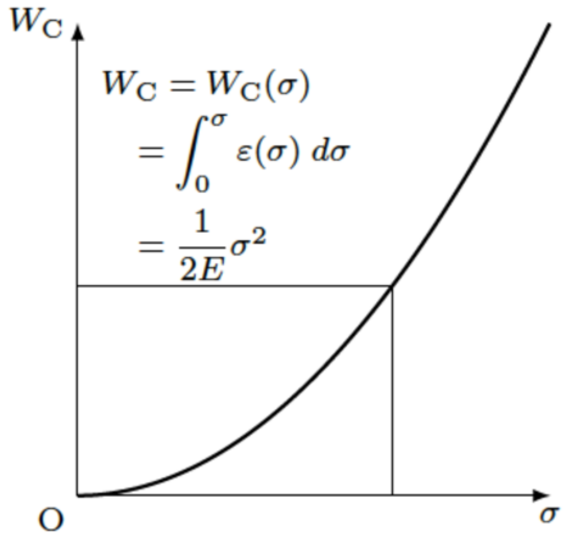
$$[\boldsymbol{E}]=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & \nu\\ \nu & 1-\nu & \nu\\ \nu & \nu & 1-\nu\end{bmatrix},\quad [\boldsymbol{E}]^{-1}=\frac{1}{E}\begin{bmatrix}1 & -\nu & -\nu\\ -\nu & 1 & -\nu\\ -\nu & -\nu & 1\end{bmatrix}$$

ひずみエネルギー密度，コンプリメンタリーひずみエネルギー密度は，それぞれ

$$W(\varepsilon,\gamma)=\frac{1}{2}\varepsilon^T[\boldsymbol{E}]\varepsilon+\frac{1}{2}G\gamma\cdot\gamma$$

$$W_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau})=\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T[\boldsymbol{E}]^{-1}\boldsymbol{\sigma}+\frac{1}{2G}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\tau}$$





これらは状態量であり，互いに等しい

$$W=W_{\mathrm{c}}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\varepsilon+\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\gamma$$

等方線形弾性材料（一般化フックの法則にしたがう材料）のひずみエネルギー密度とコンプリメンタリーひずみエネルギー密度

ひずみエネルギー密度

$$W = \frac{E\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)^2 + \frac{G}{2}(\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2+\gamma_{xy}^2)$$

コンプリメンタリーひずみエネルギー密度

$$W_c = \frac{1}{2E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)^2 + \frac{1}{2G}(\sigma_{yz}^2+\sigma_{zx}^2+\sigma_{xy}^2-\sigma_y\sigma_z-\sigma_z\sigma_x-\sigma_x\sigma_y)$$

両者は等しい.

一般化フックの法則（応力とひずみの関係，ひずみと応力の関係は，次式で定義される）

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \qquad \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\partial W_c}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\tau}) = \frac{\partial W_c}{\partial \boldsymbol{\tau}}$$

ここで，

ヤング率 (Young's modulus) E　ポアソン比 (Poisson's ratio) ν

横弾性定数 (shear modulus) G　$G = E/\{2(1+\nu)\}$

エネルギー保存則（クラペイロンの定理）

エネルギー保存則：外部仕事と内部仕事は等しい

外部仕事：力の作用点の (P, u) に至るまでになされた仕事

内部仕事：$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}, \varepsilon, \gamma)$ の分布によって，ひずみエネルギー密度として蓄えられている量を体積積分したもの

$$U = \int_V W(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\gamma})\, dV$$

コンプリメンタリー外部仕事とコンプリメンタリー内部仕事，コンプリメンタリーひずみエネルギー密度についても同様

$$U_{\mathrm{c}} = \int_V W_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})\, dV$$

クラペイロンの定理：外力とその着力点の外力の方向の変位成分との積の総和は，ひずみエネルギーの2倍に等しい（線形弾性材料の場合）

エネルギー的な双対性・共役性，保存則適用時の次元

エネルギー的な双対性・共役性

一般化された力を一般化された変位の関数，あるいは，逆に一般化された変位を一般化された力の関数として表して，これらの関数の積分が仕事や単位体積あたりの仕事などを物理的に意味するとき，互いにエネルギー双対，あるいは，エネルギー共役な量と呼ぶ．そのような関係を議論する際にはしばしばルジャンドル変換が重要な役割を担う．

保存則など，平衡（バランス）を考えるときには，同じ次元で取り扱わなければならない．

集中力の単位はSI 単位系で[N]，物理現象の考察から変位u はエネルギー双対な量であることがわかる．実際，変位の単位は[m] であり，その積はエネルギーの単位[Nm]=[J] になる．

モーメントM の単位はSI 単位系で[Nm]，回転角（たわみ角 θ，ねじれ角 ϕ ）は無次元であり，互いにエネルギー双対な量であり，その積はエネルギーの単位[Nm]=[J] になる．

応力の単位は[Pa]=[Nm^{-2}] であり，ひずみは無次元である．物理現象的な考察から，互いにエネルギー双対な量であり，その積は単位体積あたりのエネルギーの単位[Jm^{-3}]=[Nm^{-2}] になる．そのため，エネルギーのバランスの評価を考える場合には体積積分が必要になる．

このあとにでてくる材料力学の棒，はり，軸のエネルギーの議論では，密度は体積密度だけでなく，単位長さあたりの密度を考えることが多いから，長手方向への線積分が必要になる．

横断面にはたらく力・モーメントと応力分布

では，棒の引張，はりの曲げ，軸のねじり問題について，これまで考えてきた材料力学の理論と考えてきた解について，

エネルギー保存則を満足しているか：コンプリメンタリー外部仕事とコンプリメンタリー内部仕事（横断面にはたらく力・モーメント分布，それから導かれる応力分布に基づいて評価したコンプリメンタリーひずみエネルギー密度の体積積分）が等しいか

クラペイロンの定理を満足しているか：コンプリメンタリー内部仕事（コンプリメンタリーひずみエネルギー密度の体積積分）が，一般化外力と，その外力の作用点の外力に対応する一般化変位の積の１/ ２になるか

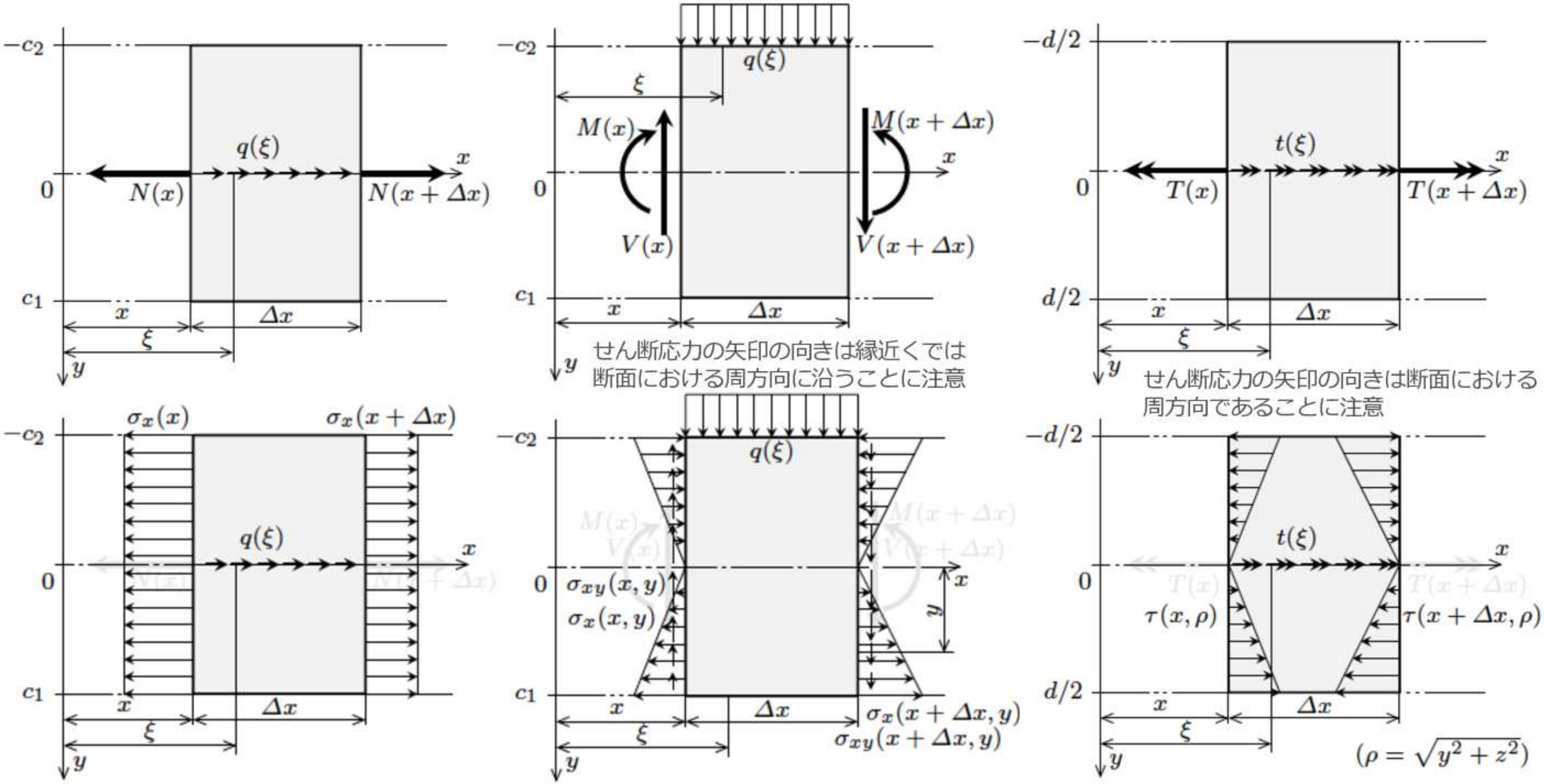
についてチェックしたい．これまでの理論は力学的つりあいと，幾何条件をとも満たすものを丁寧に考えて議論を進めてきたので，当然，成り立つのだが，当たり前と思わずにチェックしてみて，エネルギー関数というスカラー関数の持つ可能性や面白さを感じてほしいというのがねらいである．

横断面にはたらく力・モーメントと応力分布のまとめ（再掲）

引張・圧縮（軸力）　曲げ（曲げモーメント・せん断力）　ねじり（ねじりモーメント）

マクロ問題
軸線 (x)

ミクロ問題
点 (x, y, z)



軸力を受ける棒

断面積　$A(x) \equiv \iint_{A(x)} dydz$　　長さ l

軸力　$N(x)$

応力　$\sigma_x(x) = N(x)/A(x)$

ひずみ $\varepsilon_x(x) = \sigma_x(x)/E(x) = N(x)/\{E(x)A(x)\}$

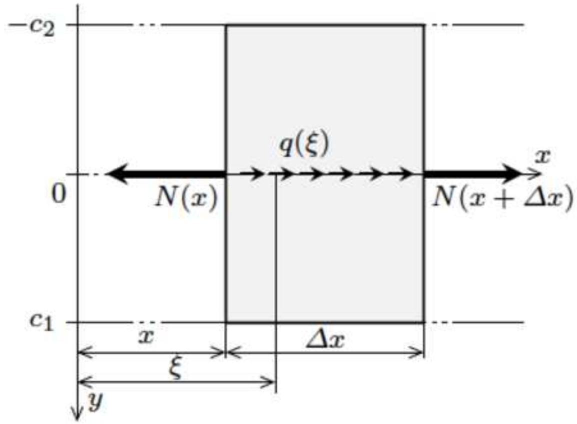
コンプリメンタリーひずみエネルギー

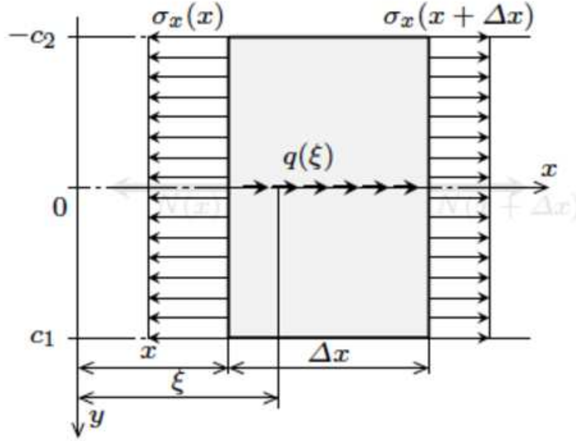
$$U_c = \int_V \frac{{\sigma_x}^2}{2E} dV = \iiint_V \frac{N^2}{2EA^2} dxdydz$$
$$= \int_0^l \frac{N^2}{2EA^2} \left[\iint_A dydz \right] dx = \int_0^l \frac{N^2}{2EA} dx$$

〔例〕$x = 0$ で固定，$x = l$に力Pが作用し，変位uが生じる問題

$$u = \int_0^l \varepsilon_x dx = \int_0^l \frac{N}{EA} dx \qquad N(x) = P$$

$$U_c = \int_0^l \frac{P^2}{2EA} dx = \frac{1}{2} P \int_0^l \frac{P}{EA} dx = \frac{1}{2} Pu$$





エネルギー保存則，クラペイロンの定理が成立していることがわかる．

曲げを受けるはり

断面2次モーメント $I(x) \equiv \iint y^2 dydz$ 長さ l

曲げモーメント $M(x)$

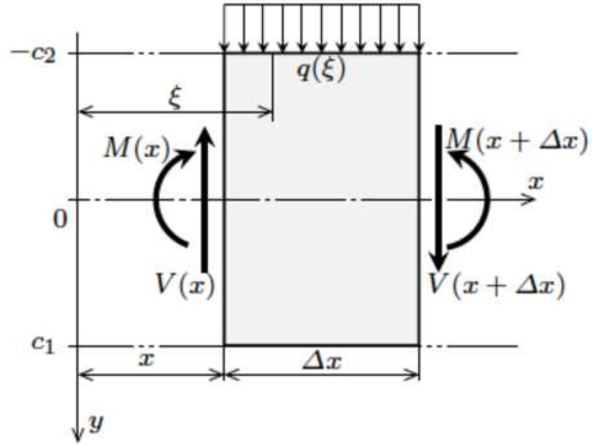
応力 $\sigma_x(x,\ y) = M(x)y/I(x)$

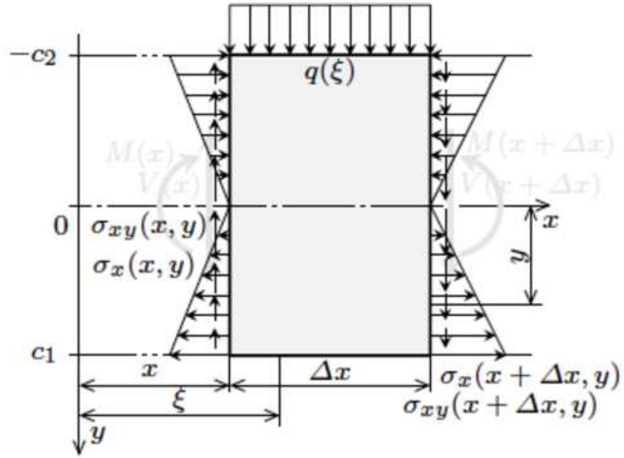
ひずみ $\varepsilon_x(x,\ y) = \sigma_x(x,\ y)/E = M(x)y/\{EI(x)\}$

コンプリメンタリーひずみエネルギー

$$U_c = \int_V \frac{{\sigma_x}^2}{2E} dV = \iiint_V \frac{M^2 y^2}{2EI^2} dxdydz$$

$$= \int_0^l \frac{M^2}{2EI^2} \left[\iint_A y^2 dydz \right] dx = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx$$





〔例〕$x = 0$ で固定支持された片持ちはりの$x = l$にモーメントM_1が作用し，回転 $\theta = -dy(l)/dx$ が生じる問題

$$\frac{dy}{dx} = -\int_0^l \frac{M}{EI} dx$$

$M = M_1$ (一定)

$$U_c = \int_0^l \frac{M_1^2}{2EI} dx = \frac{1}{2} M_1 \int_0^l \frac{M_1}{EI} dx = \frac{1}{2} M_1 \theta$$

エネルギー保存則，クラペイロンの定理が成立

曲げを受けるはり（横荷重）

（ここでは，せん断力による仕事への寄与は無視する）

曲げ問題のコンプリメンタリーひずみエネルギー

$$U_{\rm c} = \int_V \frac{{\sigma_x}^2}{2E} dV = \iiint_V \frac{M^2 y^2}{2EI^2} dxdydz$$

$$= \int_0^l \frac{M^2}{2EI^2} \left[\iint_A y^2 dydz \right] dx = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx$$

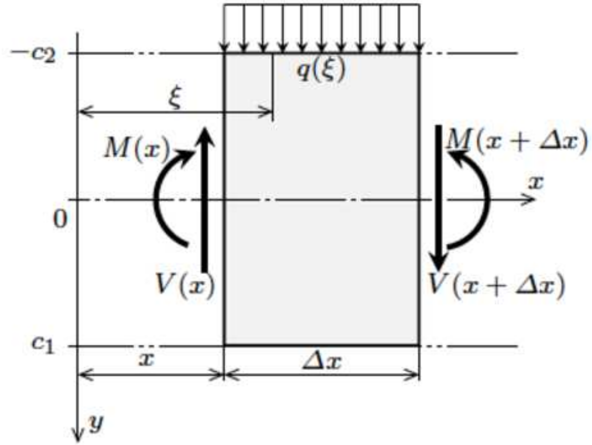
〔例〕$x = 0$ で固定支持された片持ちはりの$x = l$に横荷重Pが作用し，荷重作用点でたわみ y_1が生じる問題

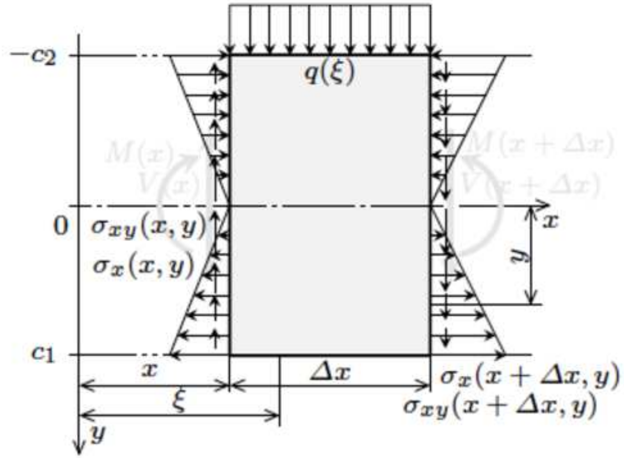
曲げモーメント分布は $M = P(x - l)$

横荷重作用点のたわみは $y_1 = Pl^3/(3EI)$

コンプリメンタリーひずみエネルギーを計算すると

$$U_{\rm c} = \int_0^l \frac{P^2(x-l)^2}{2EI} dx = \frac{1}{2}\frac{P^2 l^3}{3EI} = \frac{1}{2} P y_1$$





エネルギー保存則，クラペイロンの定理が成立

ねじりを受ける軸

断面2次極モーメント $I_{\mathrm{p}}(x) \equiv \int_0^{r(x)} \rho^2 (2\pi\rho) d\rho$ 長さ l

ねじりモーメント $T(x)$

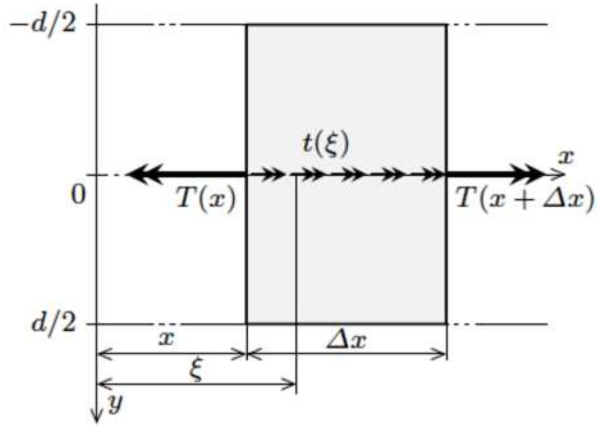
応力 $\tau(x,\ \rho) = T(x)\rho / I_{\mathrm{p}}(x)$

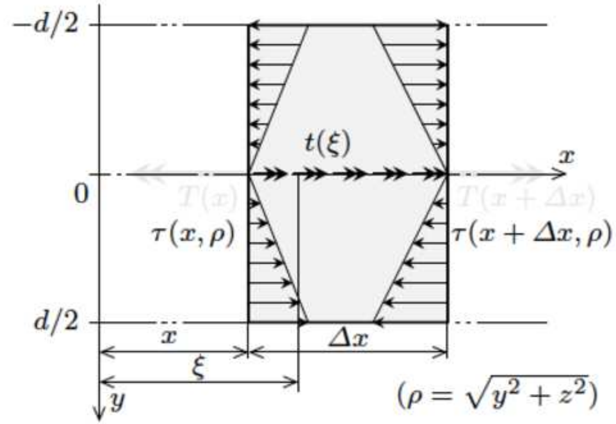
ひずみ $\gamma(x,\ \rho) = \tau(x,\ \rho)/G(x) = T(x)\rho/\{G(x) I_{\mathrm{p}}(x)\}$

コンプリメンタリーひずみエネルギー

$$U_{\mathrm{c}} = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV = \int_0^l \int_0^r \frac{T^2 \rho^2}{2G {I_{\mathrm{p}}}^2} (2\pi\rho) d\rho dx$$

$$= \int_0^l \frac{T^2}{2G {I_{\mathrm{p}}}^2} \left[\int_0^r \rho^2 (2\pi\rho) d\rho \right] dx = \int_0^l \frac{T^2}{2G I_{\mathrm{p}}} dx$$





〔例〕$x = 0$ で固定された軸の $x = l$ に
モーメント T_1 が作用し，回転 ϕ が生じる問題

$$\phi = \int_0^l \theta dx = \int_0^l \frac{T}{G I_{\mathrm{p}}} dx$$

$T = T_1$ (一定)

$$U_{\mathrm{c}} = \int_0^l \frac{T_1^2}{2G I_{\mathrm{p}}} dx = \frac{1}{2} T_1 \int_0^l \frac{T_1}{G I_{\mathrm{p}}} dx = \frac{1}{2} T_1 \phi$$

エネルギー保存則，クラペイロンの定理が成立

現在公開可能な情報

材料力学〈軸線の力学〉の引張圧縮・曲げ・ねじり問題における ひずみエネルギー・コンプリメンタリーひずみエネルギー 外部仕事

$$U = U_\mathrm{c} = \int_0^l \frac{\{F^*(x)\}^2}{2D^*} dx = \frac{1}{2} P^* u^*$$

部材	内力 $F^*(x)$	剛性 D^*	一般化力 P^*	一般化変位 u^*
棒 bar	軸力 $N(x)$	引張剛性 EA	集中力 P	伸び変位 u
はり beam	曲げモーメント $M(x)$	曲げ剛性 EI	モーメント M	たわみ角 θ
			横荷重 P	たわみ y
軸 shaft	ねじりモーメント $T(x)$	ねじり剛性 GI_p	モーメント T	ねじれ角 ϕ

内力の寄与が成分ごとに独立しているときには分けて考えることができる場合がある．ただし，
エネルギーや仕事は〈重ね合わせできる量の2乗になっているので〉一般には重ね合わせの原理は成立しないため，独立しているかどうか確認して用いる

$$\bar{W}_\mathrm{c}(x) = \frac{1}{2}\frac{N(x)^2}{EA} + \frac{1}{2}\frac{M(x)^2}{EI} + \frac{1}{2}\frac{T(x)^2}{GI_\mathrm{P}} \qquad U_\mathrm{c} = \int_0^l \bar{W}_\mathrm{c}(x) dx$$

現在公開可能な情報

材料力学〈軸線の力学〉の引張圧縮・曲げ・ねじり問題の考え方

手順	考え方や定義など	棒の引張圧縮	はりの曲げ	軸のねじり
(1)	ミクロな物体点（x, y, z) の3Dモデルとマクロな〈軸線〉(x) の1D モデル との往来のために導入される仮定	軸線は曲がらない．変形前に軸線に垂直な断面（平面）は変形後も軸線に垂直（断面のいたるところでひずみが一定）	軸線が曲がる．ベルヌーイ・オイラーの仮説：変形前に軸線に垂直な断面（平面）は変形後も軸線に垂直（中立面からの距離が大きくなると比例してひずみが大きくなる）	軸線は曲がらない．変形前に軸線に垂直な断面（平面）は変形後も軸線に関して剛体に回転する（中心からの距離が大きくなると比例してせん断ひずみが大きくなる）
(2)	変形を表す代表パラメータ：一般化変位に対応する変形量の導関数（単位長さあたりの変化量）に相当	軸ひずみ: $\varepsilon\left(=\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$	曲率:$\dfrac{1}{\rho}$ または $-\kappa\left(=-\dfrac{d\theta}{dx}=-\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)$	比ねじれ角: $\theta\left(=\dfrac{d\phi}{dx}\right)$
(3)	断面内のひずみ分布：変形パラメーター(2) による表現	$\varepsilon_x=\varepsilon$　(y, z に依らない)	$\varepsilon_x=\dfrac{y}{\rho}=-\kappa y$　(z に依らない)	$\gamma=\theta\rho$　(ρ のみの関数)
(4)	応力とひずみの関係（フックの法則）	$\sigma_x=E\varepsilon_x$	$\sigma_x=E\varepsilon_x$	$\tau=G\gamma$
(5)	断面内の応力分布：変形パラメーター(2) による表現*1	$\sigma_x=E\varepsilon$	$\sigma_x=E\dfrac{y}{\rho}=-E\kappa y$	$\tau=G\theta\rho$
(6)	合力：定義	軸力 $N=\displaystyle\int_A\sigma_x dA$	曲げモーメント $M=\displaystyle\int_A\sigma_x y dA$	ねじりモーメント $T=\displaystyle\int_A\tau\rho dA$
(7)	合力：変形パラメーター(2) との関係*2	$N=EA\varepsilon\quad\left(A=\displaystyle\int_A dA\right)$	$M=\dfrac{1}{\rho}EI=-\kappa EI\quad\left(I=\displaystyle\int_A y^2dA\right)$	$T=\theta GI_p\quad\left(I_p=\displaystyle\int_A\rho^2dA\right)$
(8)	剛性	引張剛性　EA	曲げ剛性　EI	ねじり剛性　EI_p
(9)	断面内の応力分布：合力(7) との関係*3	$\sigma_x=\dfrac{N}{A}$	$\sigma_x=\dfrac{M}{I}y$	$\tau=\dfrac{T}{I_p}\rho$
(10)	コンプリメンタリーひずみエネルギー密度（単位長さあたり）*4	$\bar{W}_c=\dfrac{N^2}{2EA}$	$\bar{W}_c-\dfrac{M^2}{2EI}$	$\bar{W}_c=\dfrac{T^2}{2GI_p}$

*1 (3) を(4) に代入, *2 (5) を(6) を代入, *3 関係式(7) を変形パラメーター(2) ついて解いて，変形パラメーター(2) を合力(6) で表し，その結果を(5) に代入する, *4 (9) を代入して計算し，(7)の断面パラメータA, I, I_pの定義を用いる．

エネルギー保存則の適用例 材料力学 p.232 例題12.1，12.2

〔例題12.1〕

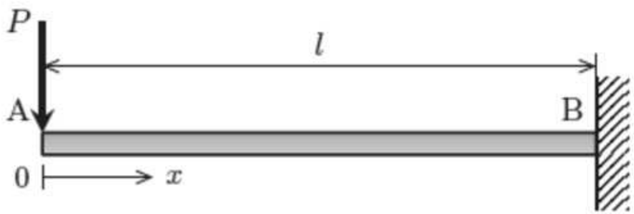


図 12.1 集中荷重を受ける片持ちはり

曲げモーメント $M(x) = -Px$

ひずみエネルギー，コンプリメンタリーひずみエネルギー

$$U = U_c = \frac{1}{2EI}\int_0^l \{M(x)\}^2 dx = \frac{P^2 l^3}{6EI}$$

Clapeyronの定理（エネルギー保存則）

$$\frac{P^2 l^3}{6EI} = \frac{1}{2}Pu \qquad u = \frac{Pl^3}{3EI}$$

〔例題12.2〕

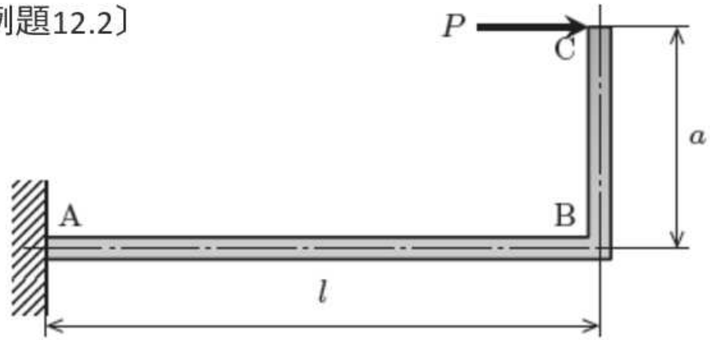


図 12.2 L 字に折れ曲がった部材のたわみ

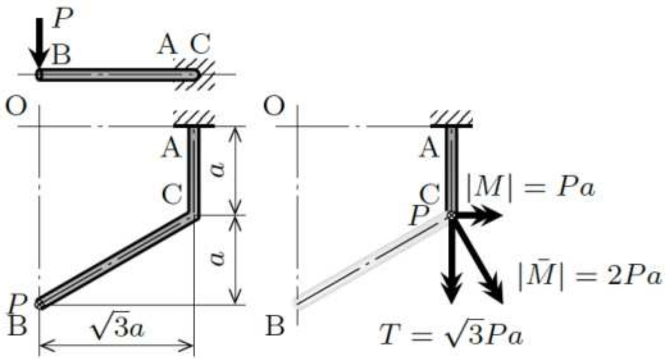
ひずみエネルギー，コンプリメンタリーひずみエネルギー

$$U_1 = \frac{P^2 a^3}{6EI} \qquad U_2 = \frac{(Pa)^2 l}{2EI}$$

Clapeyronの定理（エネルギー保存則）

$$\frac{1}{2}Pu = \frac{P^2 a^3}{6EI} + \frac{(Pa)^2 l}{2EI} \qquad u = \frac{Pa^2}{3EI}(a + 3l)$$

３次元的に配置されたカンチレバー 材料力学 p.253〔12.8〕



曲げモーメントとねじりモーメント

BC 間 $(0 \leq \xi \leq 2a)$

$$M(\xi) = -P\xi$$

CA 間 $(0 \leq \eta \leq a)$

$$M(\eta) = -P\eta - Pa$$

$$T(\eta) = \sqrt{3}Pa \text{ (const.)}$$

ひずみエネルギー，コンプリメンタリーひずみエネルギー

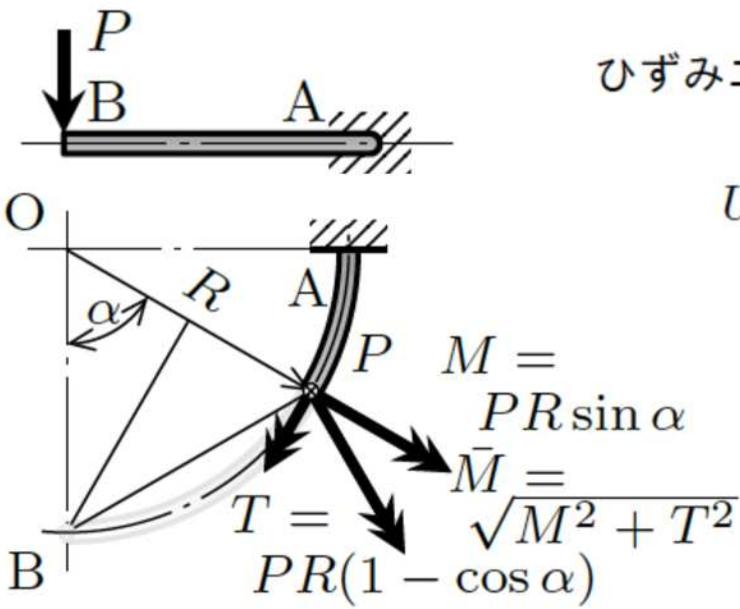
$$\begin{aligned} U = U_c &= \int_0^{2a} \frac{M^2}{2EI} d\xi + \int_0^a \left(\frac{M^2}{2EI} + \frac{T^2}{2GI_p} \right) d\eta \\ &= \int_0^{2a} \frac{P^2\xi^2}{2EI} d\xi + \int_0^a \frac{P^2(\eta + a)^2}{2EI} d\eta + \frac{3P^2a^3}{2GI_p} \\ &= \frac{8P^2a^3}{6EI} + \frac{P^2}{6EI}(8a^3 - a^3) + \frac{3P^2a^3}{2GI_p} \\ &= \left(\frac{5}{2EI} + \frac{3}{2GI_p} \right) P^2a^3 \end{aligned}$$

Clapeyronの定理（エネルギー保存則）

$$U = U_c = \frac{1}{2}P\delta$$

$$\delta = \left(\frac{5}{EI} + \frac{3}{GI_p} \right) Pa^3$$

３次元的に配置されたカンチレバー 材料力学 p.253〔12.9〕



曲げモーメント

$$M(\alpha) = PR\sin\alpha$$

ねじりモーメント

$$T(\alpha) = PR(1-\cos\alpha)$$

ひずみエネルギー，コンプリメンタリーひずみエネルギー

$$U = U_c = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{M^2}{2EI} + \frac{T^2}{2GI_p} \right) R\, d\alpha$$

$$= \frac{P^2R^3}{2} \left\{ \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\alpha\, d\alpha + \frac{1}{GI_p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos\alpha)^2\, d\alpha \right\}$$

$$= \frac{P^2R^3}{2} \left\{ \frac{\pi}{4EI} + \frac{1}{GI_p} \left(\frac{3}{4}\pi - 2 \right) \right\}$$

Clapeyron の定理（エネルギー保存則）

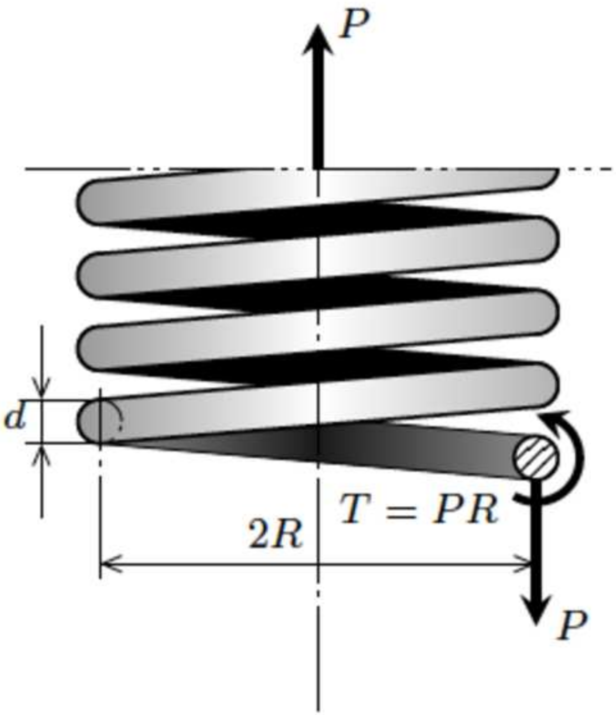
$$U = U_c = \frac{1}{2}P\delta$$

$$\delta = PR^3 \left\{ \frac{\pi}{4EI} + \frac{1}{GI_p} \left(\frac{3}{4}\pi - 2 \right) \right\}$$

密巻コイルばね 材料力学 p.177 例題9.4

らせん角 α が小さ場合

$$\sin\alpha \simeq 0 \quad \cos\alpha \simeq 1$$



ねじりモーメント $T = PR$

断面二次極モーメント $I_\mathrm{p} = \pi d^4/32$

ひずみエネルギー，コンプリメンタリーひずみエネルギー

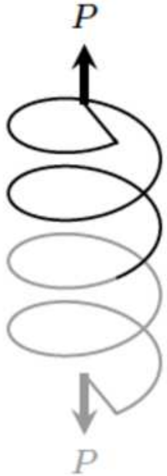
$$U = U_\mathrm{c} = \int_0^{2\pi Rn} \frac{T^2}{2GI_\mathrm{p}}\,ds = \frac{16P^2R^2}{\pi G d^4} 2\pi Rn = \frac{32nP^2R^3}{Gd^4}$$

Clapeyronの定理（エネルギー保存則）

$$U = U_\mathrm{c} = \frac{1}{2}P\delta$$

$$\delta = \frac{64nR^3}{Gd^4}P \qquad k = \frac{Gd^4}{64nPR^3}$$

らせん角の大きいコイルばね 材料力学 p.178 例題9.5



$$P = k\delta$$

引張力 P

伸び δ

ばね定数 k

回転角 ω

コイル半径 R

素線の直径 d （$\ll R$）

らせん角 α，巻き数 n

コイルの長さ　$2\pi nR\tan\alpha$

素線の全長　$\dfrac{2\pi Rn}{\cos\alpha}$

曲げモーメント，ねじりモーメント

$$M = PR\sin\alpha, \quad T = PR\cos\alpha$$

ひずみエネルギー，コンプリメンタリーひずみエネルギー

$$U = U_{\mathrm{c}} = \int_0^{2\pi Rn/\cos\alpha}\left(\frac{M^2}{2EI} + \frac{T^2}{2GI_{\mathrm{p}}}\right)ds$$

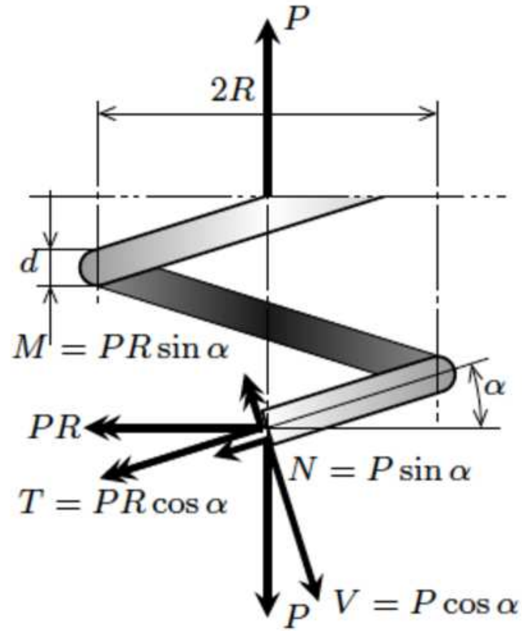
$$= \frac{P^2R^2}{2}\left(\frac{\sin^2\alpha}{EI} + \frac{\cos^2\alpha}{GI_{\mathrm{p}}}\right)\frac{2\pi nR}{\cos\alpha}$$

Clapeyronの定理（エネルギー保存則）

$$U = U_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}P\delta$$

$$\delta = \frac{2\pi nR^3}{\cos\alpha}\left(\frac{\sin^2\alpha}{EI} + \frac{\cos^2\alpha}{GI_{\mathrm{p}}}\right)P$$

$$k = \frac{d^4\cos\alpha}{64nR^3\left(\dfrac{\cos^2\alpha}{G} + \dfrac{2\sin^2\alpha}{E}\right)}$$



動荷重

ダ・ランベールの原理を用いて瞬間的な静力学的釣合いを考える方法

(1) 部材の各点の加速度を計算する

(2) 得られた加速度に対する慣性力を求める

(3) 求めた慣性力を，他の外力とともに部材に加える

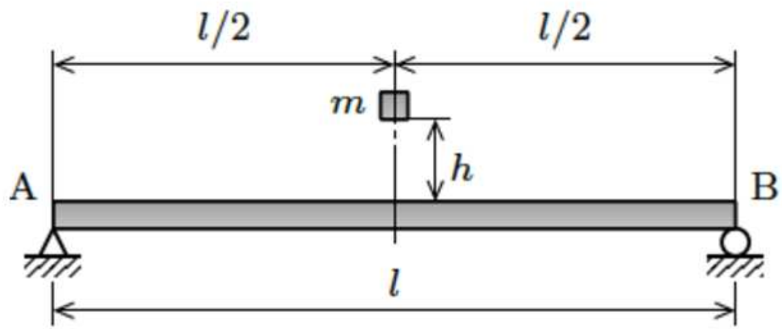
(4) 静荷重が作用する構造と同様にして，応力などを解析する

エネルギー保存則で考える方法
（材料力学 p.76 例題4.11，p.234 例題12.3）

動負荷係数（dynamic load factor）

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{\mathrm{st}}}}$$

$h \to 0$ の極限で，$k_d \to 2$ となる。つまりある物体に対して変形とつりあいながら増加する荷重（準静的負荷）を与えたときの応力や荷重作用点の変位に対して，同じ荷重を瞬間的に与えたときの応力や荷重作用点の変位は2倍になる。



自然長のばねの上に物体を乗せて突然に手を離す問題をイメージしてみる

次回

材料力学2025 シーズン２

第１２話　エネルギー法 後編

2025年7月15日（火）

Coming Soon . . .