

材料力学2025 シーズン2

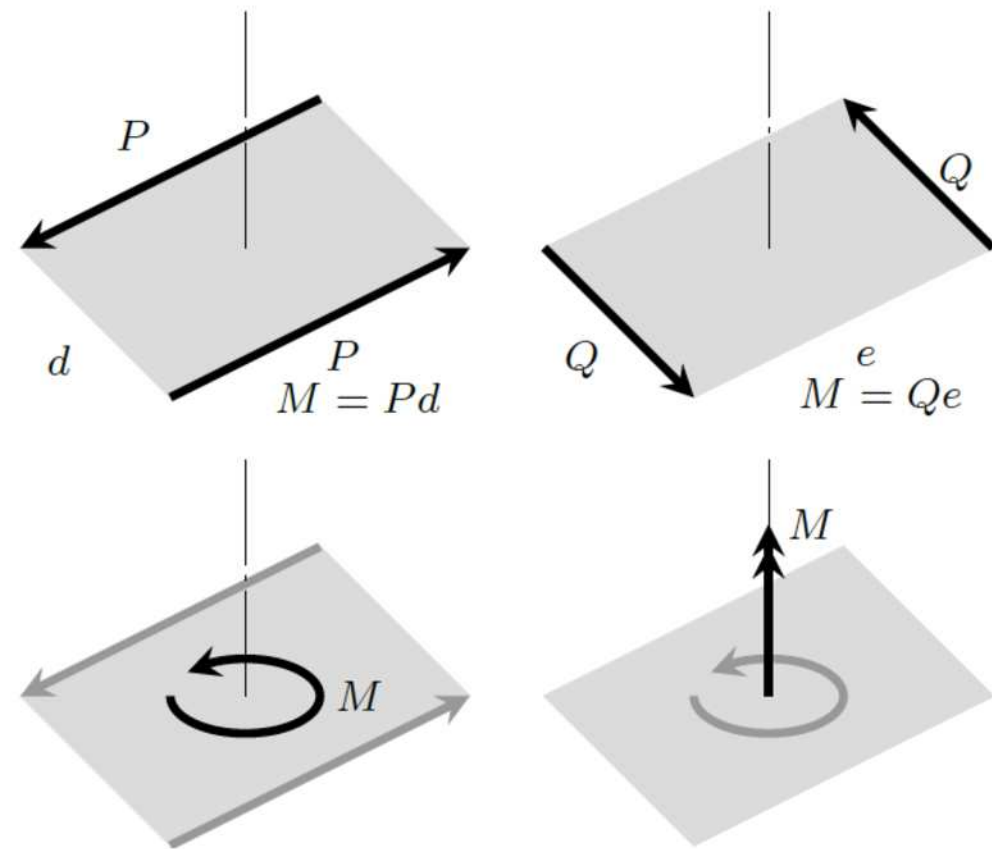
第10話 ねじり 補足 / エネルギー法 序論

2025年7月8日 (火)

中谷 彰宏

教科書「渋谷陽二，中谷彰宏，材料力学，(2017)，コロナ社」
1, 2, 3, 4, 10, 11章（春学期の授業）を学習し終えて、
5, 6, 7, 8, 9, 12, 13章（夏学期の授業）をこれから学ぶ諸君のために

モーメント (moment) ・ 偶力 (couple)



偶力 (couple) は大きさが上段左側図のように、同じ向きが互いに反対である力 P (上段右側図では Q) が垂直距離 d (同 e) だけ離れて作用する一組の力である。

面積 $M = Pd = Qe$ のことを偶力のモーメント、あるいは単にモーメント (moment) といい、下段のように図示することができる。

材料力学では力・偶力の作用点近傍の複雑な力学状態は論じない。またその作用点から遠方に与える影響は同一とみなせる (サン・ブナンの原理) ので、偶力とモーメントは同じ意味で使われる。

モーメントベクトルの性質 (下段右側図)

矢印を重ねて描いているモーメントベクトルは、モーメントによる回転が右ねじが進む方向につけると約束。通常の力のベクトルと同様に、大きさと方向が保持される限りどこに移動してもつりあいに関しては影響がない。

また力のベクトルと同様にモーメントベクトルについても合成することもまた逆に分解することもできる。

モーメントベクトルによる図示と モーメントの分解の例

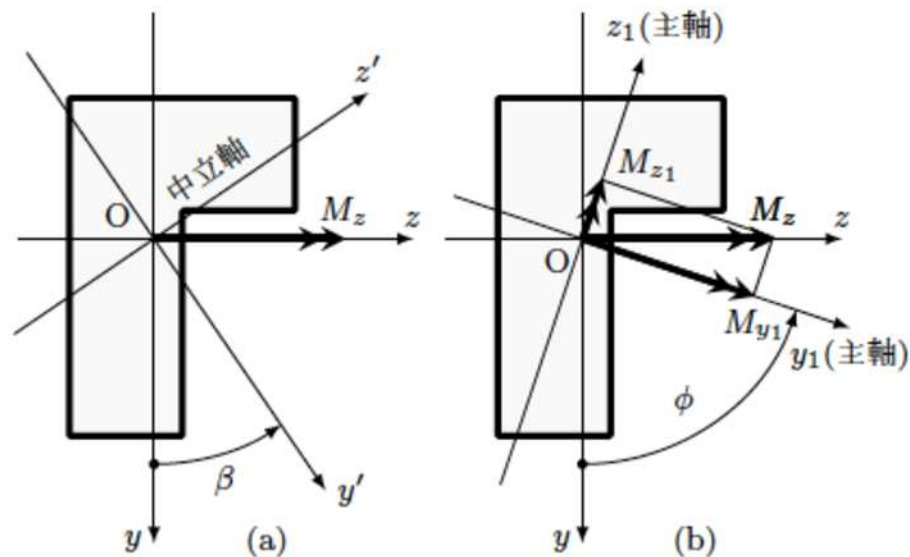
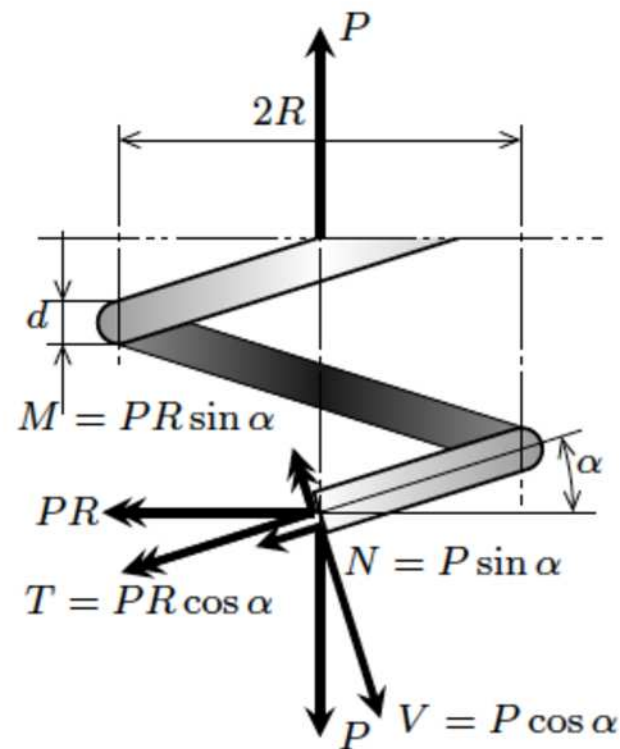


図 5.10 非対称荷重を受けるはり

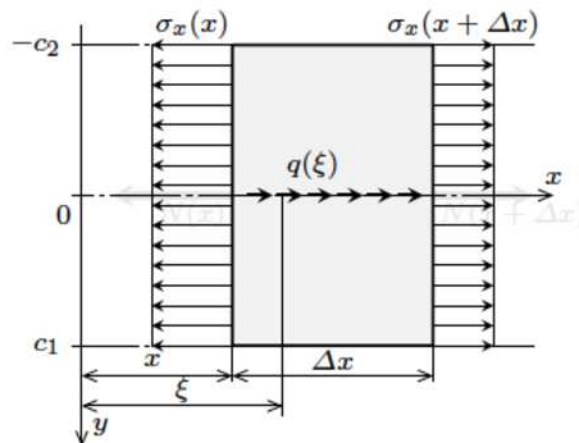
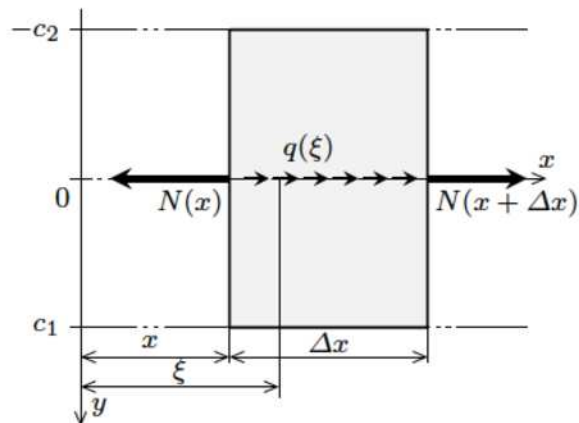
断面の慣性主軸の方向に分解



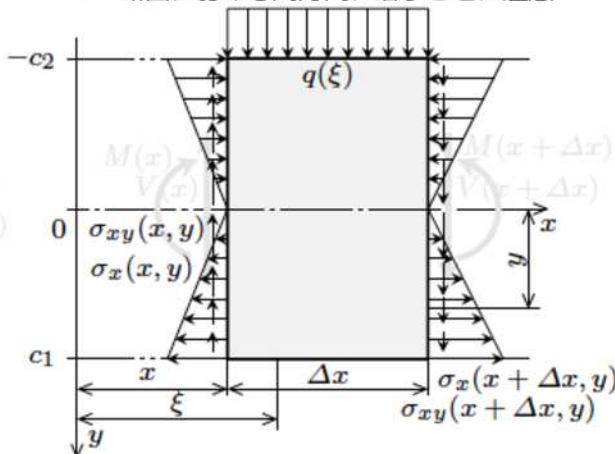
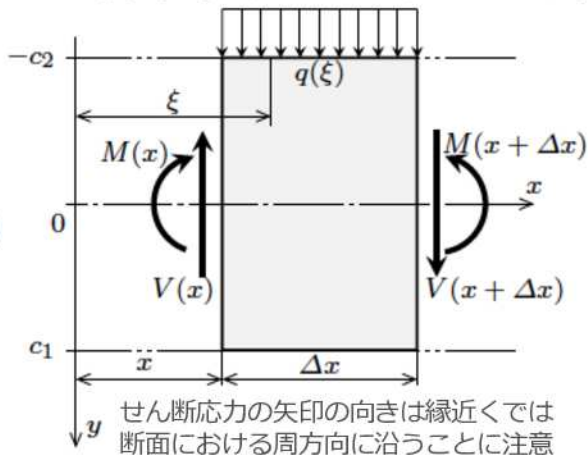
曲げモーメント（軸線に垂直な成分）
ねじりモーメント（軸線に平行な成分）
に分解

横断面にはたらく力・モーメントと応力分布のまとめ

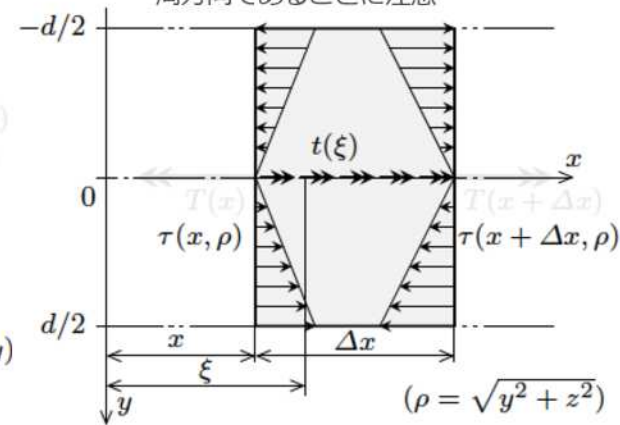
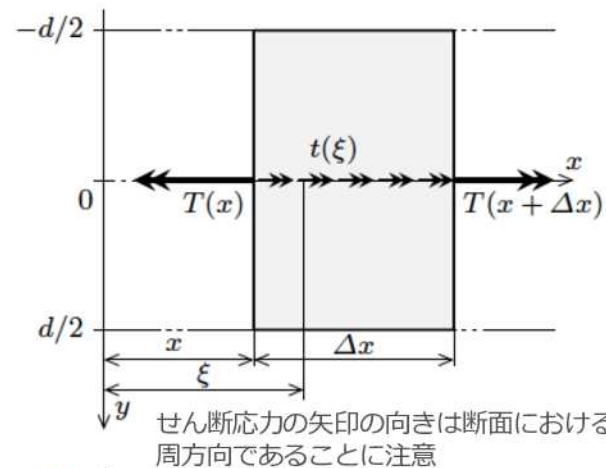
引張・圧縮（軸力）



曲げ（曲げモーメント・せん断力）



ねじり（ねじりモーメント）



マクロ
問題

軸線 (x)

ミクロ
問題

点 (x, y, z)

組合せ荷重による横断面の応力

横断面の応力

曲げ応力（曲げ）

$$\sigma = \frac{M}{Z}$$

せん断応力（ねじり）

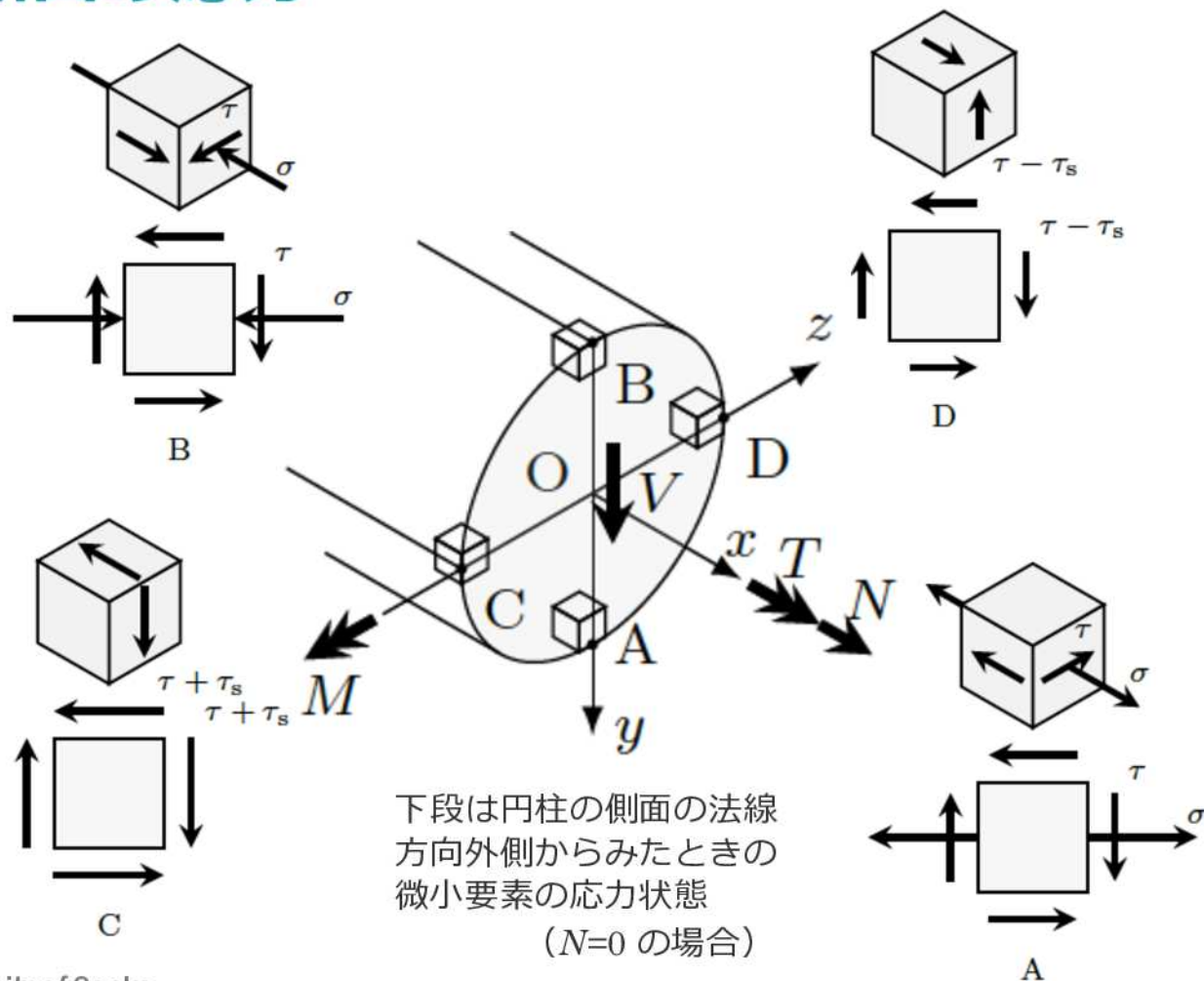
$$\tau = \frac{T}{Z_p}$$

垂直応力（引張・圧縮）

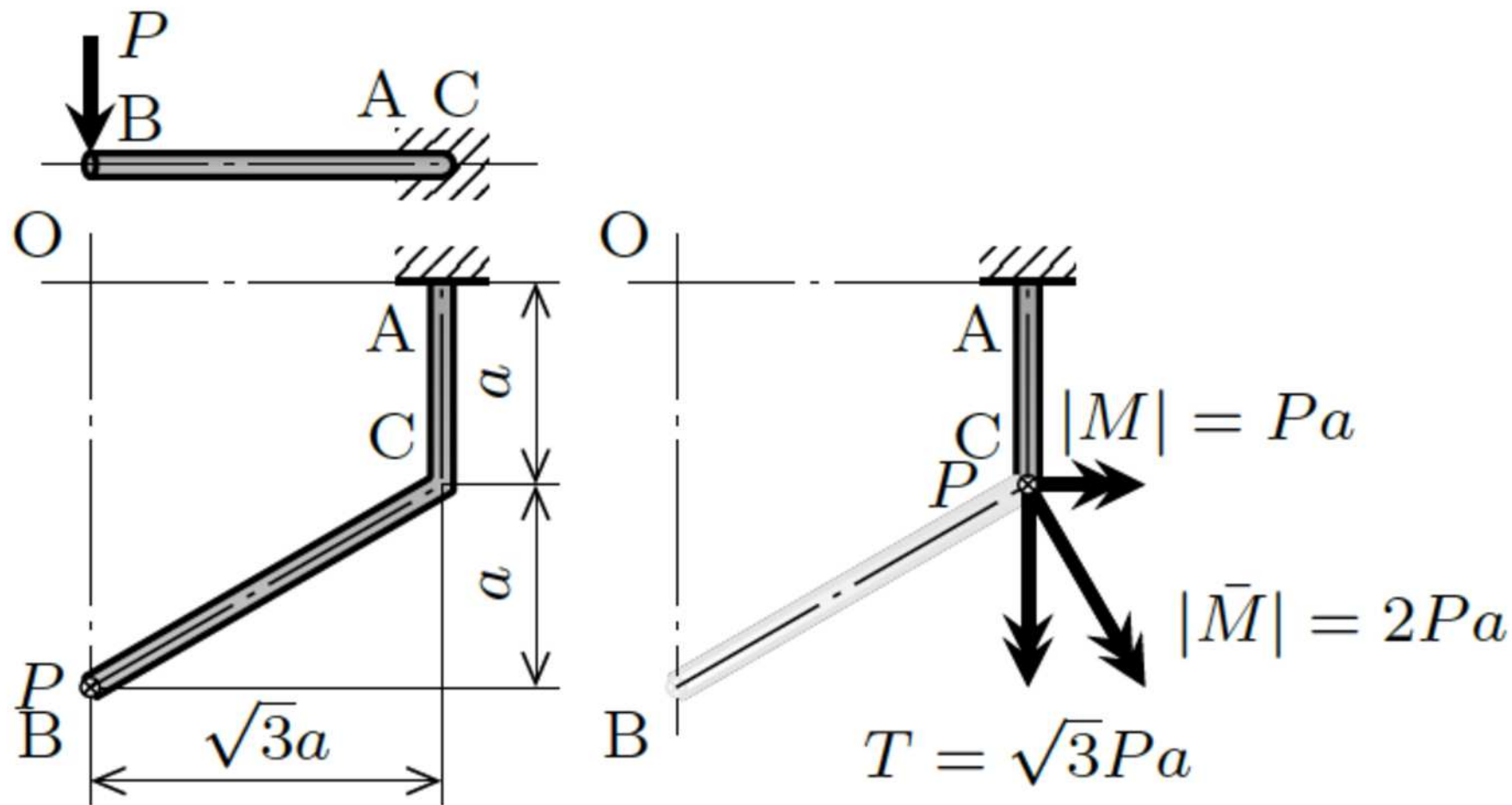
$$\sigma_N = \frac{N}{A}$$

せん断応力（せん断力）
（円形断面はり）

$$\tau_s = \frac{4V}{3A}$$



3次元的に配置されたカンチレバー材料力学 p.253 [12.8]



3 次元的に配置されたカンチレバー材料力学 p.253 [12.8]

静定問題かどうかを判定：静定問題

静定問題なので反力，支持モーメント，せん断力分布，モーメント分布は力・モーメントのつり合いから決定することができる。

点Aの反力，支持モーメント

$$R_A = P, \quad M = -2Pa, \quad T = \sqrt{3}Pa$$

せん断力分布

$$V = P_{(\text{const.})}$$

曲げモーメント分布，ねじりモーメント分布

BC 間 ($0 \leq \xi \leq 2a$)

$$M(\xi) = -P\xi$$

CA 間 ($0 \leq \eta \leq a$)

$$M(\eta) = -P\eta - Pa$$

$$T(\eta) = \sqrt{3}Pa \quad (\text{const.})$$

危険断面Aの曲げモーメント値，
ねじりモーメント値，応力

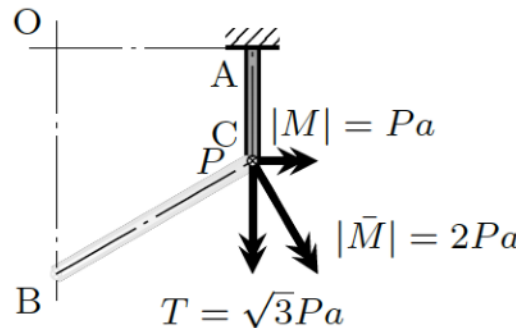
$$M = -2Pa, \quad T = \sqrt{3}Pa$$

$$\sigma = \frac{|M|}{I} \frac{d}{2} = \frac{2Pa}{\pi d^4/64} \frac{d}{2} = \frac{64Pa}{\pi d^3}$$

$$\tau = \frac{T}{I_p} \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{3}Pa}{\pi d^4/32} \frac{d}{2} = \frac{16\sqrt{3}Pa}{\pi d^3}$$

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{16Pa}{\pi d^3} (2 \pm \sqrt{7})$$

$$\tau_{\max} = \frac{16\sqrt{7}Pa}{\pi d^3}$$



3次元的に配置されたカンチレバー材料力学 p.253 [12.8]

CA間のねじれ角, 点Cのねじれ角

$$\theta = \frac{T}{GI_p}, \quad \phi_C = \theta a = \frac{\sqrt{3}Pa^2}{GI_p}$$

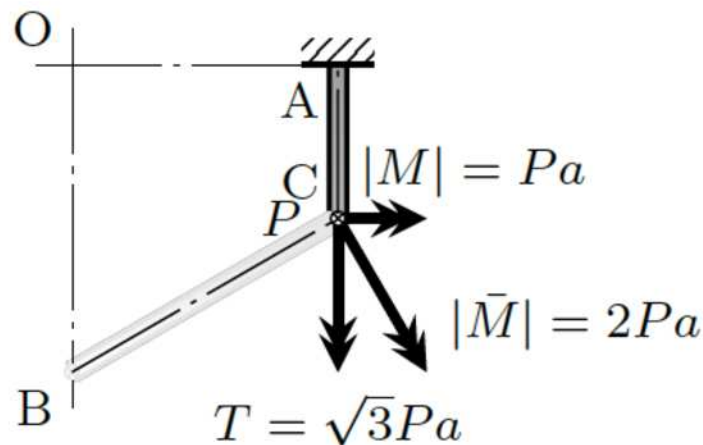
点Cのたわみとたわみ角 (モーメント面積法)

$$y_C = -t_{CA} = \left(\frac{1}{2} \frac{Pa}{EI} a \right) \left(\frac{2}{3} a \right) + \left(\frac{Pa}{EI} a \right) \left(\frac{1}{2} a \right) = \frac{5}{6} \frac{Pa^3}{EI}$$

$$\theta_C = -\theta_{CA} = \frac{1}{2} \frac{Pa}{EI} a + \frac{Pa}{EI} a = \frac{3}{2} \frac{Pa^2}{EI}$$

点Cを固定支持 (AC間を剛体) とみたときの点Bのたわみ
(モーメント面積法)

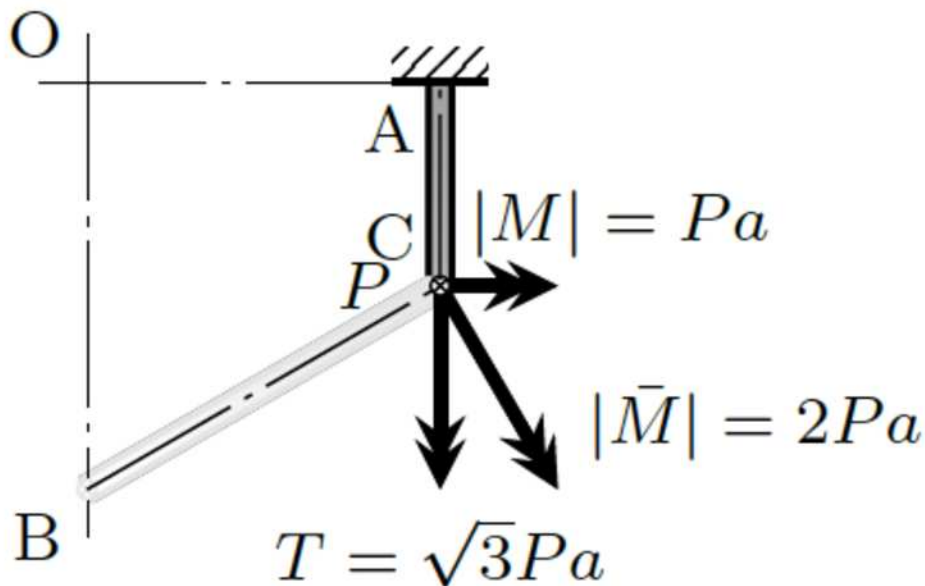
$$\bar{y}_B = \left(\frac{1}{2} \frac{2Pa}{EI} 2a \right) \left(\frac{2}{3} 2a \right) = \frac{8}{3} \frac{Pa^3}{EI}$$



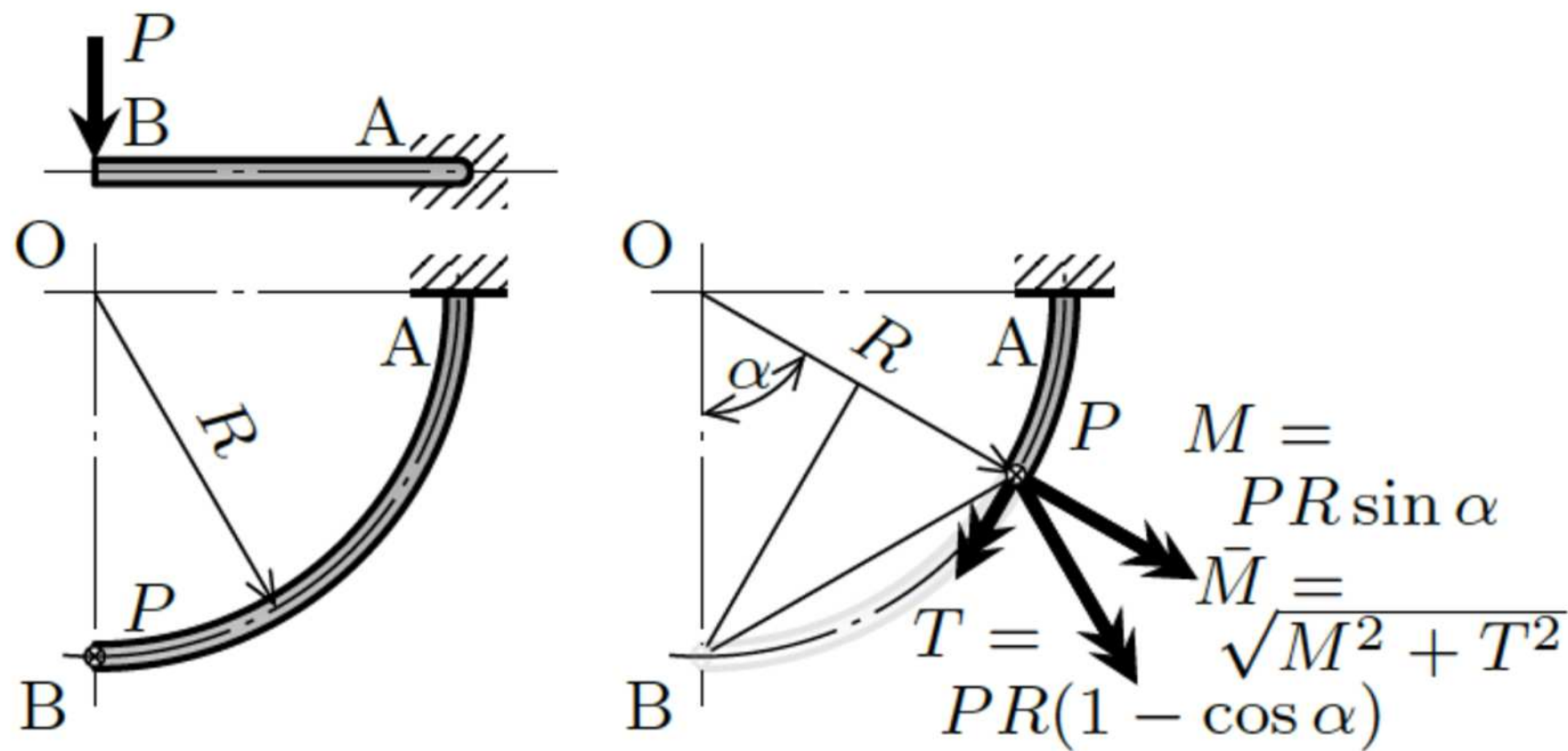
3次元的に配置されたカンチレバー 材料力学 p.253 [12.8]

ϕ_C , θ_C の BC 方向への寄与に BC 間の長さ $2a$ を乗じた変位を考慮すると (あるいは, ϕ_C , θ_C に点 C からみた点 B の垂直距離を考えると), 点 B のたわみは,

$$\begin{aligned} y_B &= y_C + \phi_C \frac{\sqrt{3}}{2} 2a + \theta_C \frac{1}{2} 2a + \bar{y}_B \\ &= \frac{5Pa^3}{6EI} + \frac{3Pa^3}{GI_p} + \frac{3Pa^3}{2EI} + \frac{8Pa^3}{3EI} \\ &= \left(\frac{5}{EI} + \frac{3}{GI_p} \right) Pa^3 \end{aligned}$$



3次元的に配置されたカンチレバー 材料力学 p.253 [12.9]



3 次元的に配置されたカンチレバー材料力学 p.253 [12.9]

静定問題かどうかを判定：静定問題

静定問題なので反力，支持モーメント，せん断力分布，モーメント分布は力・モーメントのつり合いから決定することができる。

点Aの反力，支持モーメント

$$R_A = P, \quad M = PR, \quad T = PR$$

せん断力分布

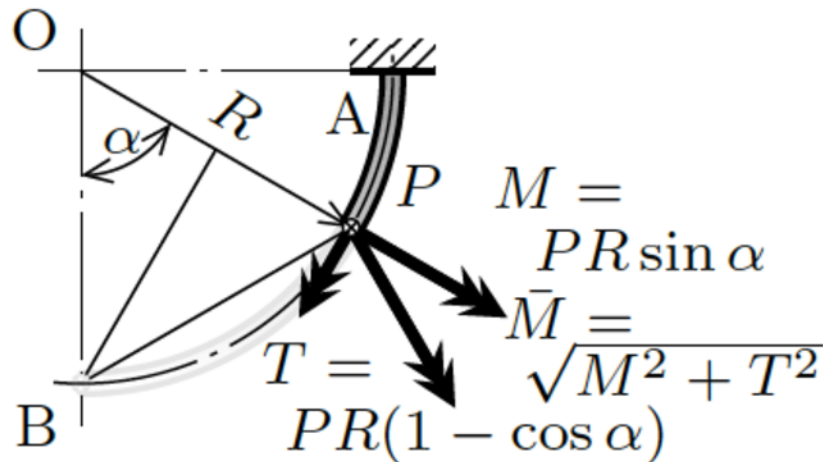
$$V = P_{(\text{const.})}$$

曲げモーメント分布，ねじりモーメント分布をOBから反時計まわりにとった角度 α の関数として表す

$$M(\alpha) = PR \sin \alpha, \quad T(\alpha) = PR(1 - \cos \alpha)$$

危険断面Aの曲げモーメント値，ねじりモーメント値，応力

$$M = PR, \quad T = PR$$



$$\sigma = \frac{|M|}{I} \frac{d}{2} = \frac{32PR}{\pi d^3}$$

$$\tau = \frac{T}{I_p} \frac{d}{2} = \frac{16PR}{\pi d^3}$$

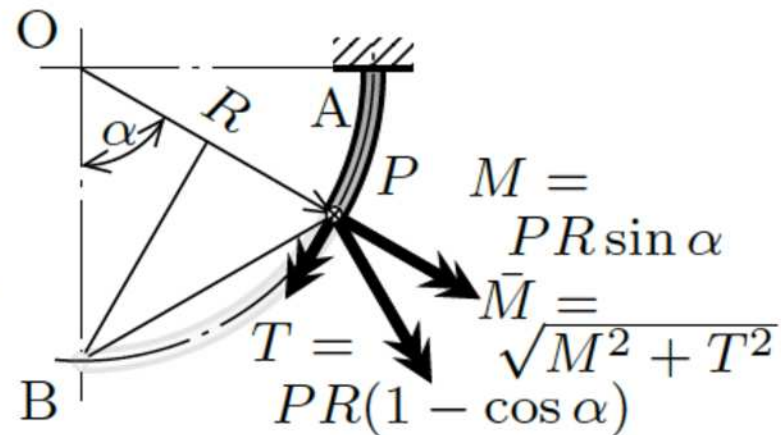
$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{16PR}{\pi d^3} (1 \pm \sqrt{2})$$

$$\tau_{\max} = \frac{16\sqrt{2}PR}{\pi d^3}$$

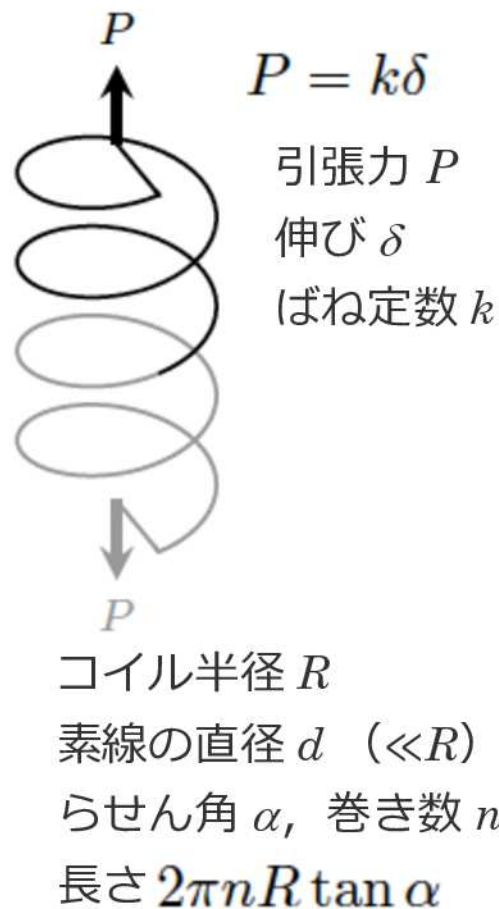
3次元的に配置されたカンチレバー材料力学 p.253 [12.9]

$ds = R d\alpha$ のねじれ角, たわみ角の点B のたわみへの寄与は, それぞれ, 腕の長さ $R(1 - \cos \alpha)$, $R \sin \alpha$ を乗じたものであり, 点B のたわみは,

$$\begin{aligned}
 y_B &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{T(\alpha)}{GI_p} R d\alpha \right) R(1 - \cos \alpha) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{M(\alpha)}{EI} R d\alpha \right) R \sin \alpha \\
 &= PR^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{GI_p} (1 - \cos \alpha)^2 + \frac{1}{EI} \sin^2 \alpha \right) d\alpha \\
 &= PR^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{GI_p} \left\{ 1 - 2\cos \alpha + \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right\} + \frac{1}{EI} \left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \right) \right] d\alpha \\
 &= \frac{PR^3}{GI_p} \left[\alpha - 2\sin \alpha + \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{PR^3}{EI} \left[\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= PR^3 \left\{ \frac{\pi}{4EI} + \frac{1}{GI_p} \left(\frac{3}{4}\pi - 2 \right) \right\}
 \end{aligned}$$



コイルばね



素線の配置に対して
力・モーメントをベクトルの的に分解

荷重 P を分解

引張力

$$N = P \sin \alpha$$

せん断力

$$V = P \cos \alpha$$

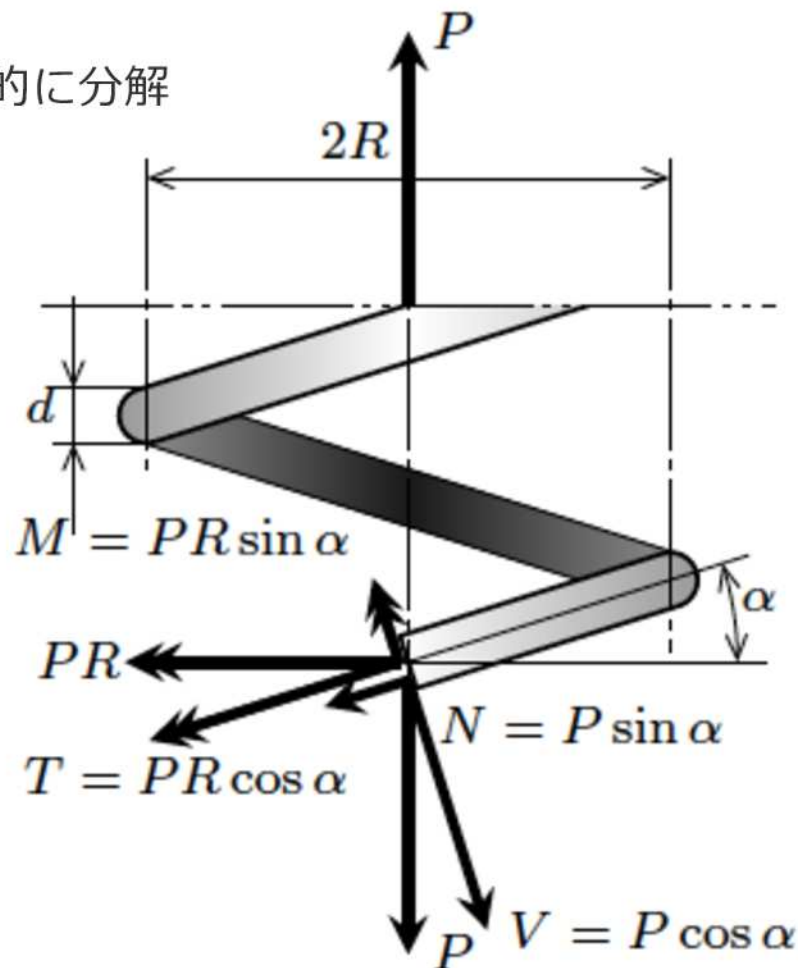
モーメント PR を分解

曲げモーメント

$$M = PR \sin \alpha$$

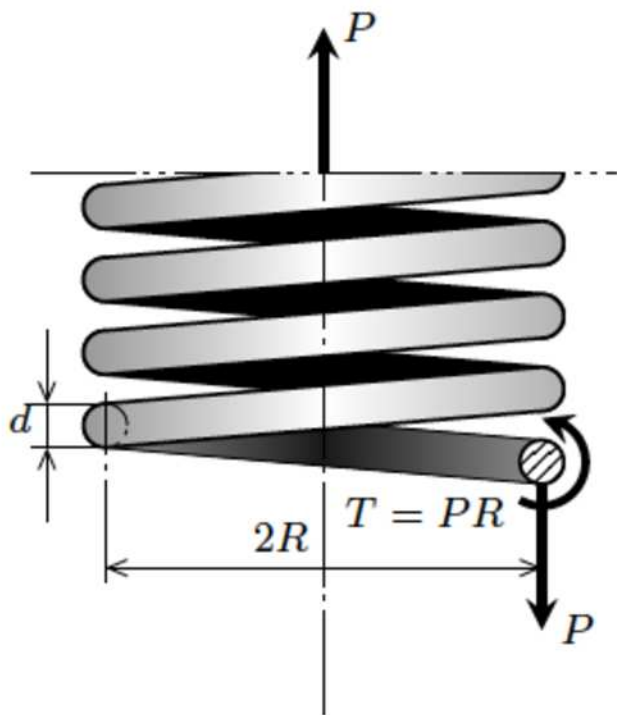
ねじりモーメント

$$T = PR \cos \alpha$$



密巻コイルばね

らせん角 α が小さく場合
 $\sin \alpha \simeq 0 \quad \cos \alpha \simeq 1$



せん断力 $V = P$ と, ねじりモーメント $T = PR$ のみ考慮
 せん断応力

$$\tau_1 = \frac{T}{I_p} \frac{d}{2} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16PR}{\pi d^3} \quad \tau_2 = \frac{V}{A} \frac{4}{3} = \frac{16V}{3\pi d^2} = \frac{16P}{3\pi d^2}$$

$$\tau_{\max} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{16PR}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{3R} \right)$$

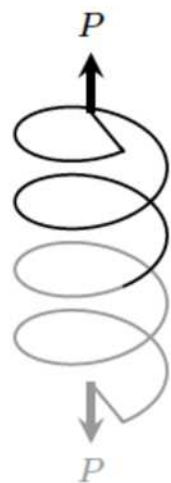
長さ ds の素線要素については, ねじれ角 θds に R を乗じたものが, コイル軸方向伸び変位に寄与する

$$\theta = \frac{T}{GI_p} = \frac{32T}{G\pi d^4} \quad d\delta = R\theta ds = \frac{T}{GI_p} R ds = \frac{32PR^2}{G\pi d^4} ds$$

全長にわたり積分すると, 伸び d と, バネ定数 k を得る.

$$\delta = \int_0^{2\pi Rn} \frac{32PR^2}{G\pi d^4} ds = \frac{64nPR^3}{Gd^4} \quad k = \frac{Gd^4}{64nPR^3}$$

らせん角の大きいコイルばね (応力と強度評価)



$$P = k\delta$$

引張力 P

伸び δ

ばね定数 k

回転角 ω

コイル半径 R

素線の直径 d ($\ll R$)

らせん角 α , 巻き数 n

コイルの長さ $2\pi n R \tan \alpha$

素線の全長 $\frac{2\pi R n}{\cos \alpha}$

曲げモーメントとねじりモーメント

$$M = PR \sin \alpha \quad T = PR \cos \alpha$$

曲げ応力, せん断応力

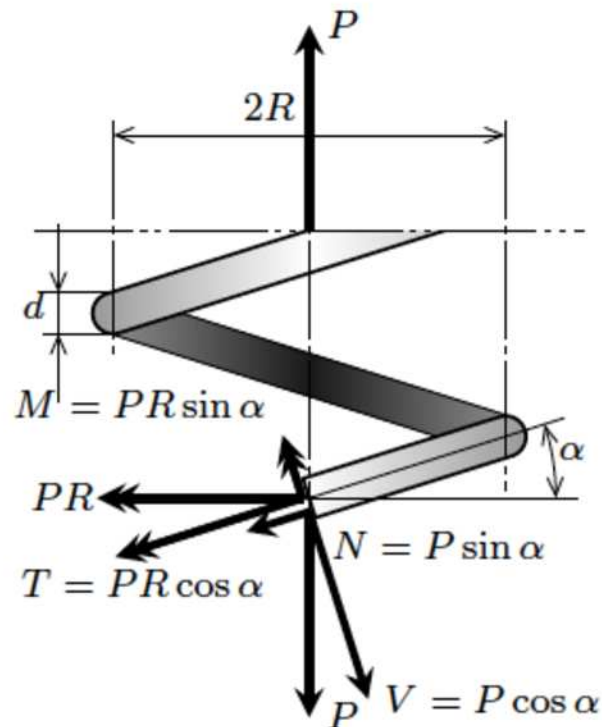
$$\sigma = \frac{M d}{I \cdot 2} = \frac{32M}{\pi d^3} = \frac{32PR \sin \alpha}{\pi d^3}$$

$$\tau = \frac{T d}{I_p \cdot 2} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16PR \cos \alpha}{\pi d^3}$$

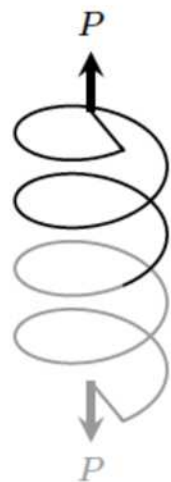
最大主応力と最大せん断応力

$$\sigma_{\max} = \frac{16PR}{\pi d^3} (1 + \sin \alpha)$$

$$\tau_{\max} = \frac{16PR}{\pi d^3}$$



らせん角の大きいコイルばね（伸縮とねじれの方法）



$$P = k\delta$$

引張力 P

伸び δ

ばね定数 k

回転角 ω

コイル半径 R

素線の直径 d ($\ll R$)

らせん角 α , 巻き数 n

コイルの長さ

$$2\pi n R \tan \alpha$$

長さ ds の素線要素の変形

$$\text{ねじれ角} \left(\frac{T}{GI_p} \right) ds$$

$$\text{曲げによるたわみ角} \left(\frac{M}{EI} \right) ds$$

コイル軸方向変位 δ への寄与:

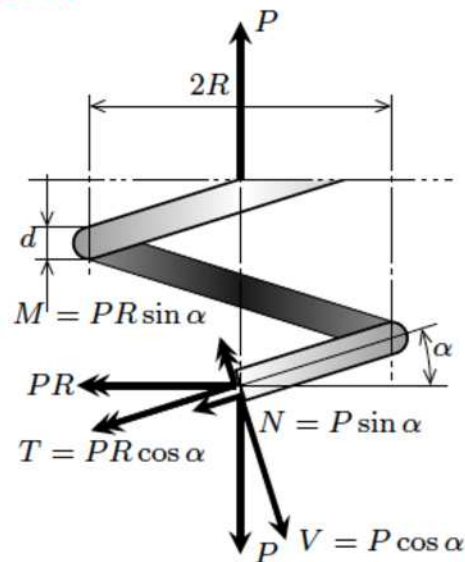
それぞれに $R \cos \alpha$, $R \sin \alpha$ を乗じたもの

$$d\delta = R \left(\frac{T}{GI_p} \right) ds \cos \alpha + R \left(\frac{M}{EI} \right) ds \sin \alpha$$

コイルの軸まわりの回転角 ω への寄与:

それぞれに $\sin \alpha$, $-\cos \alpha$ を乗じたもの

$$d\omega = \left(\frac{T}{GI_p} \right) ds \sin \alpha - \left(\frac{M}{EI} \right) ds \cos \alpha$$



素線の全長

$$\frac{2\pi R n}{\cos \alpha}$$

にわたって積分すれば
 δ , ω を得る。

らせん角の大きいコイルばね（伸縮とねじれの計算結果）

引張力 P

コイル半径 R

$$P = k\delta$$

素線の直径 d ($\ll R$)

らせん角 α , 巻き数 n (コイルの長さ $2\pi nR \tan \alpha$)

伸び δ

$$\delta = \frac{2\pi n R^3}{\cos \alpha} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{GI_p} + \frac{\sin^2 \alpha}{EI} \right) P = \frac{64n R^3}{d^4 \cos \alpha} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{G} + \frac{2 \sin^2 \alpha}{E} \right) P$$

ばね定数 k

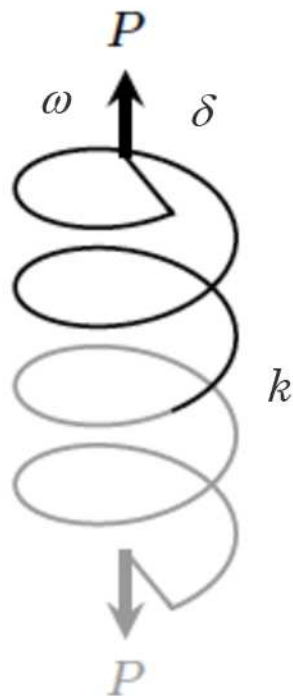
$$k = \frac{d^4 \cos \alpha}{64n R^3 \left(\frac{\cos^2 \alpha}{G} + \frac{2 \sin^2 \alpha}{E} \right)}$$

コイルが自由に回転できる
場合のばね定数である

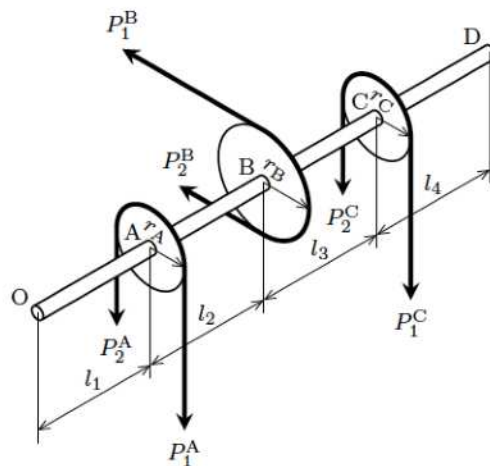
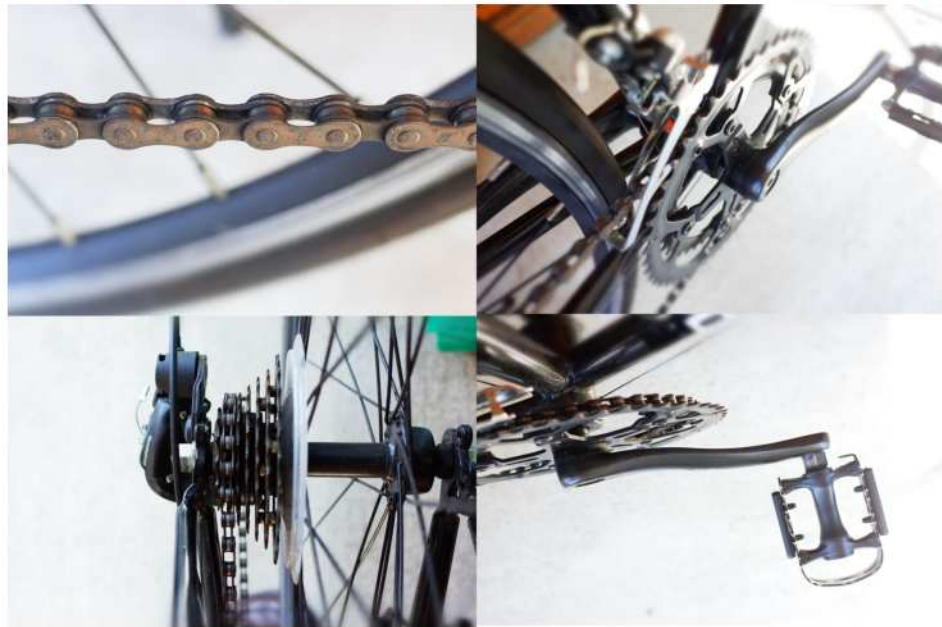
もし回転しないように拘束
すればばね定数は変化する

回転角 ω

$$\omega = 2\pi n R^2 \sin \alpha \left(\frac{1}{GI_p} - \frac{1}{EI} \right) = \frac{64n R^2 \sin \alpha}{d^4} \left(\frac{1}{G} - \frac{2}{E} \right)$$



自転車の伝動軸について 曲げとねじりの連成問題を考えてみよう！



考えてみよう♪

円形でない断面のねじり

円形でない断面にねじりモーメント T が作用すると、そり (warping) が生じる
だ円断面 (長径 $2a$ (y 方向), 短径 $2b$ (z 方向))

$$\tau_{xy} = -\frac{2T}{\pi ab^3}z, \quad \tau_{xz} = \frac{2T}{\pi a^3b}y \quad \theta = \frac{(a^2 + b^2)T}{\pi G a^3 b^3}$$

長方形断面の軸 (長辺 a , 短辺 b) : 最大せん断応力は長辺の midpoint に生じる

$$\tau_{\max} = \frac{T}{\alpha ab^2} \quad \theta = \frac{T}{\beta G ab^3}$$

a/b	1.00	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00	4.00	6.00	8.00	10.00	∞
α	0.208	0.231	0.239	0.246	0.258	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333
β	0.141	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333

ねじりの応力関数

中実軸のねじり問題：ねじりの応力関数 Ψ を定める問題に帰着

支配方程式：
$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 2G\theta$$

境界条件：
$$\Psi = 0$$

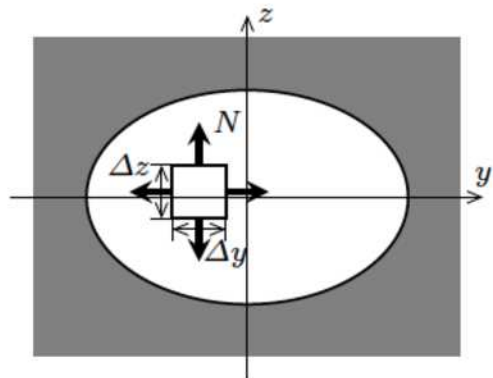
せん断応力成分は、応力関数 Ψ の導関数で評価できる

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

ねじりモーメント T

$$T = 2 \iint_A \Psi dy dz$$

プラントルの薄膜相似法



圧力 p , 張力 N , たわみ v の関係

$$p + N \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + N \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

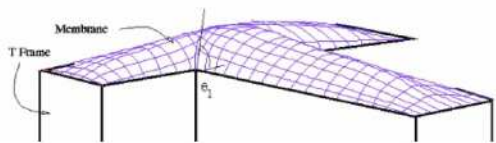
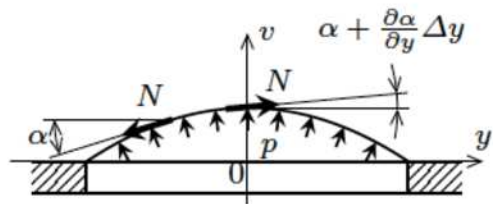
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -p/N$$

境界条件 $v = 0$

薄膜のたわみ問題とねじり問題の相似性と対応関係

$$v \rightarrow \Psi, \quad p/N \rightarrow -2G\theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \tau_{xz}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial z} = -\tau_{xy}$$



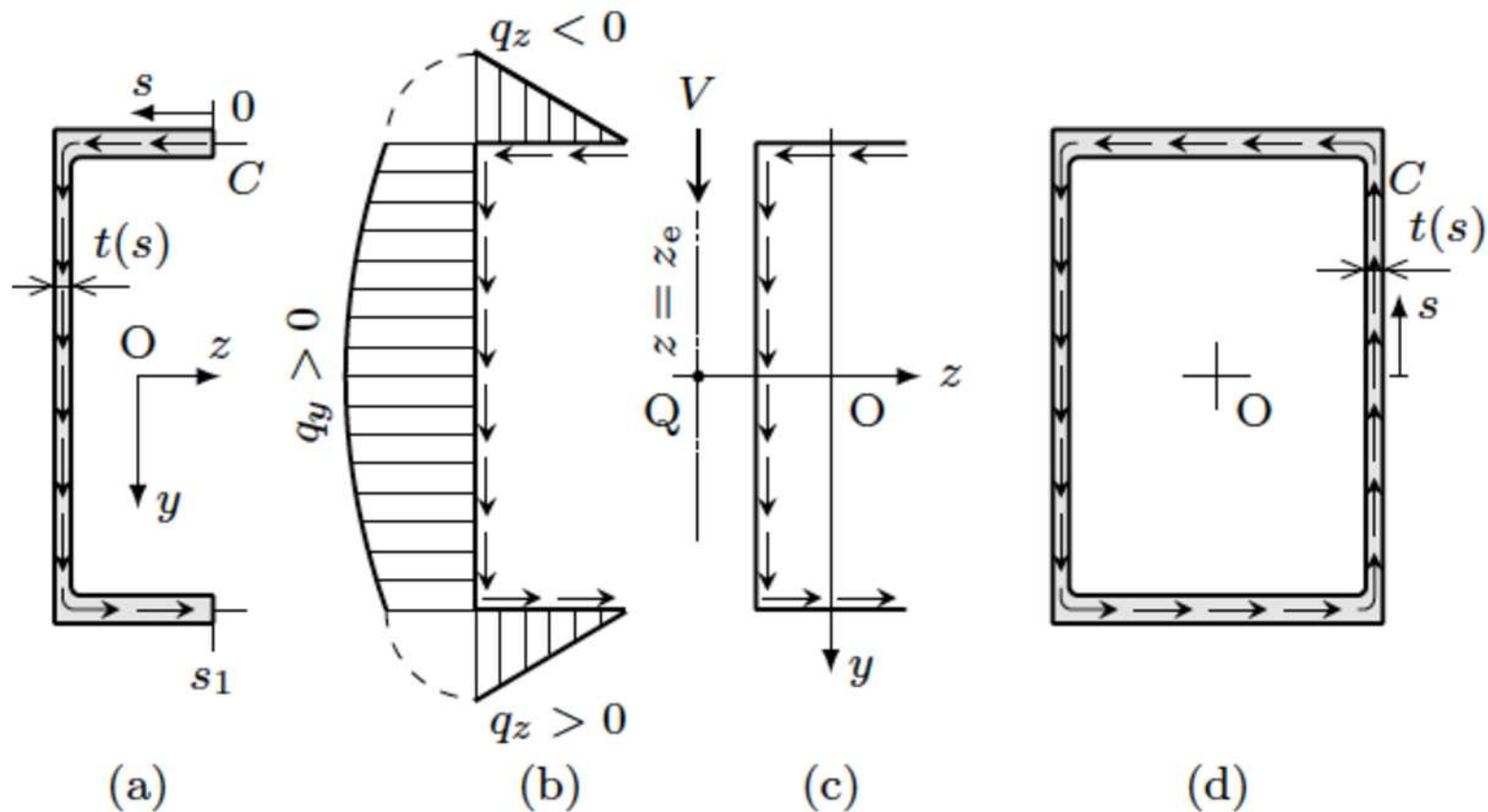
https://www.clear.rice.edu/mech400/soap_film_lectureUC_D.pdf



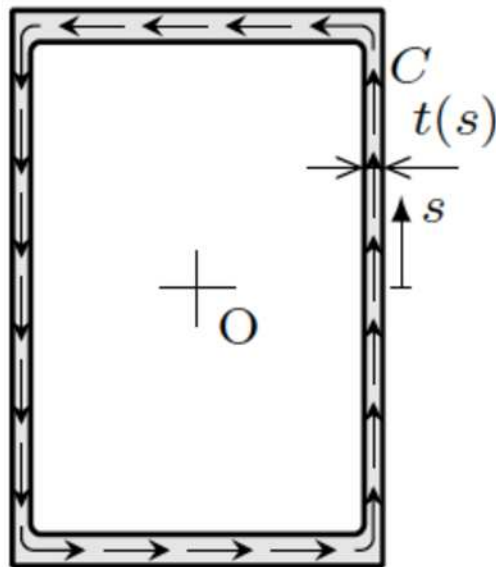
Ludwig Prandtl (1875 -1953)

20世紀初頭のドイツ・ゲッチンゲンは応用力学・応用数学の研究が花開いた。プラントルの弟子、影響を受けた学者の多くが大戦により米国に移った。

薄肉構造のねじれ



薄肉構造のねじれ



せん断流 $q(s)$: せん断応力 $\tau(s)$ と厚さ $t(s)$ の積

$$q(s) \equiv \tau(s)t(s)$$

肉厚中央線 C の接線方向 $(\cos \phi(s), \sin \phi(s))$ と $q(s)$ の成分

$$q_z(s) = q(s) \cos \phi(s) \quad q_y(s) = q(s) \sin \phi(s)$$

ねじりモーメント

$$T = \oint_C (q_y(s)z(s) - q_z(s)y(s)) ds = \oint_C q(s)h(s)ds$$

$h(s)$ は肉厚中央線への点 O からの垂線の長さでありその線積分は肉厚中央線で囲まれる面積 A の2倍

$$\oint_C h(s)ds = 2A$$

よって,

$$T = 2Aq, \quad q = \frac{T}{2A}, \quad \tau(s) = \frac{q}{t(s)} = \frac{T}{2At(s)}$$

エネルギー保存則から比ねじれ角 θ は,

$$\frac{1}{2}T\theta = \oint \frac{\tau(s)^2}{2G}t(s)ds \quad \theta = \frac{T}{4A^2G} \oint \frac{ds}{t(s)}$$

棒の引張圧縮・はりの曲げ・軸のねじりの復習

弾性力学では、変位が拘束された3次元の固体に様々な荷重が作用する問題を取り扱う。一方、材料力学では、引張圧縮を受ける棒、曲げを受けるはり、ねじりを受ける軸といったように、縦の軸線と横断面に分離して問題を考える。このような考え方が有効なのは、軸線が断面の代表長さに比べて長い場合であるが、様々な問題で棒、はり、軸としてモデル化してその変形形状や内力の分布を議論することにより、強度設計に関するさまざまな公式を導くことができる。

材料力学では要素間のつながりを力学的、幾何学的に考える。応力とひずみのミクロな関係を考えて、力のバランス、幾何学的な関係を考えて、力・モーメントなどの一般化力と変位・回転角などの一般化変位との関係、すなわち、マクロ特性を知ることができる。それによって、ある外力が作用しているときの変位を求めることができるだけでなく、ミクロな点の近傍の応力状態やひずみ状態を同時に求めることができる。その流れを理解するのがここでのねらいである。

ひずみエネルギーと一般化フックの法則（応力ひずみ関係）

$$W = \int_0^{t_1} \{ \sigma_x(t) \dot{\varepsilon}_x(t) + \sigma_y(t) \dot{\varepsilon}_y(t) + \sigma_z(t) \dot{\varepsilon}_z(t) + \sigma_{yz}(t) \dot{\gamma}_{yz}(t) + \sigma_{zx}(t) \dot{\gamma}_{zx}(t) + \sigma_{xy}(t) \dot{\gamma}_{xy}(t) \} dt$$

$$\sigma_x = \sigma_x(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy})$$

$$\sigma_y = \sigma_y(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy})$$

$$\vdots$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xy}(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy})$$

$$W = W(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy})$$

$$= \int_{(0,0,0,0,0,0)}^{(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy})} \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \sigma_{yz} d\gamma_{yz} + \sigma_{zx} d\gamma_{zx} + \sigma_{xy} d\gamma_{xy}$$

$$W = \int_{(0,0,0,0,0,0)}^{(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy})} \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} \right) d\varepsilon_x + \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y} \right) d\varepsilon_y + \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_z} \right) d\varepsilon_z + \left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}} \right) d\gamma_{yz} + \left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}} \right) d\gamma_{zx} + \left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} \right) d\gamma_{xy}$$

$$\sigma_x = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x}, \quad \sigma_y = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y}, \quad \sigma_z = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_z}, \quad \sigma_{yz} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}}, \quad \sigma_{zx} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}}, \quad \sigma_{xy} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}}$$

表 1 棒, はり, 軸の定式化 (その 1)

		棒の引張圧縮	はりの曲げ	軸のねじり
(1)	3D モデルを 1D モデルにするために導入される仮定	軸線は曲がらない. 変形前に軸線に垂直な断面 (平面) は変形後も軸線に垂直. (断面のいたるところでひずみが一定)	ベルヌーイ・オイラーの仮説: 軸線が曲がる. 変形前に軸線に垂直な断面 (平面) は変形後も軸線に垂直. (中立面からの距離が大きくなると比例してひずみが大きくなる)	軸線は曲がらない. 変形前に軸線に垂直な断面 (平面) は変形後も軸線に関して剛体的に回転する. (中心からの距離が大きくなると比例してせん断ひずみが大きくなる)
(2)	変形を表す代表パラメータ: “一般化変位” に対応する変形量の導関数 (単位長さあたりの変化量) に相当する.	軸ひずみ: $\varepsilon \left(= \frac{\partial u}{\partial x} \right)$	曲率: $\frac{1}{\rho}$ または $-\kappa \left(= -\frac{d\theta}{dx} = -\frac{d^2 y}{dx^2} \right)$	比ねじれ角: $\theta \left(= \frac{d\phi}{dx} \right)$
(3)	断面内のひずみ分布: 変形パラメータ (2) による表現	$\varepsilon_x = \varepsilon$ (y, z に依らない)	$\varepsilon_x = \frac{y}{\rho} = -\kappa y$ (z に依らない)	$\gamma = \theta \rho$ (ρ のみの関数)
(4)	応力とひずみの関係 (フックの法則)	$\sigma_x = E\varepsilon_x$	$\sigma_x = E\varepsilon_x$	$\tau = G\gamma$
(5)	断面内の応力分布: 変形パラメータ (2) による表現*1	$\sigma_x = E\varepsilon$	$\sigma_x = E\frac{y}{\rho} = -E\kappa y$	$\tau = G\theta\rho$

表2 棒, はり, 軸の定式化 (その2)

		棒の引張圧縮	はりの曲げ	軸のねじり
(6)	合力: 定義	軸力: $N = \int_A \sigma_x dA$	曲げモーメント: $M = \int_A \sigma_x y dA$	ねじりモーメント: $T = \int_A \tau \rho dA$
(7)	合力: 変形パラメーター (2) との関係*2	$N = EA\varepsilon$ $\left(A = \int_A dA\right)$	$M = \frac{1}{\rho}EI = -\kappa EI$ $\left(I = \int_A y^2 dA\right)$	$T = \theta GI_p$ $\left(I_p = \int_A \rho^2 dA\right)$
(8)	剛性	EA	EI	$G I_p$
(9)	断面内の応力分布: 合力 (7) との関係*3	$\sigma_x = \frac{N}{A}$	$\sigma_x = \frac{M}{I} y$	$\tau = \frac{T}{I_p} \rho$
(10)	コンプリメンタリー ひずみエネルギー 密度 (単位長さあたり)*4	$\bar{W}_c = \frac{N^2}{2EA}$	$\bar{W}_c = \frac{M^2}{2EI}$	$\bar{W}_c = \frac{T^2}{2GI_p}$

*1 (3) を (4) に代入

*2 (5) を (6) を代入

*3 関係式 (7) を変形パラメーター (2) について解いて, 変形パラメーター (2) を合力 (6) で表す. その結果を (5) に代入する

*4 (9) を代入して $\bar{W}_c = \int_A \frac{\tau^2}{2G} dA$ を計算し, A, I, I_p の定義を用いる

ひずみエネルギー・コンプリメンタリーひずみエネルギー ・外部仕事

$$U = U_c = \int_0^l \frac{\{F^*(x)\}^2}{2D^*} dx = \frac{1}{2} P^* u^* \quad (12.23)$$

表 12.1 内力と剛性, および, 一般化力と一般化変位

内力 $F^*(x)$	剛性 D^*	一般化力 P^*	一般化変位 u^*
軸力 $N(x)$	引張剛性 EA	集中力 P	変位 u
曲げモーメント $M(x)$	曲げ剛性 EI	モーメント M	たわみ角 θ
ねじりモーメント $T(x)$	ねじり剛性 GI_p	モーメント T	ねじれ角 ϕ

$$\bar{W}_c(x) = \frac{1}{2} \frac{N(x)^2}{EA} + \frac{1}{2} \frac{M(x)^2}{EI} + \frac{1}{2} \frac{T(x)^2}{GI_p} \quad (12.24)$$

$$U_c = \int_0^l \bar{W}_c(x) dx \quad (12.25)$$

次回

材料力学2025 シーズン2

第11話 エネルギー法 前編

2025年7月11日（金）

Coming Soon . . .