

材料力学2025 シーズン2

第9話 ねじり 後編

2025年7月4日（金）

中谷 彰宏

教科書「渋谷陽二，中谷彰宏，材料力学，(2017)，コロナ社」
1, 2, 3, 4, 10, 11章（春学期の授業）を学習し終えて、
5, 6, 7, 8, 9, 12, 13章（夏学期の授業）をこれから学ぶ諸君のために

材料の破損条件（降伏条件）

降伏応力：延性材料に対して単軸引張試験で得られた降伏現象を示す点の応力 σ_y

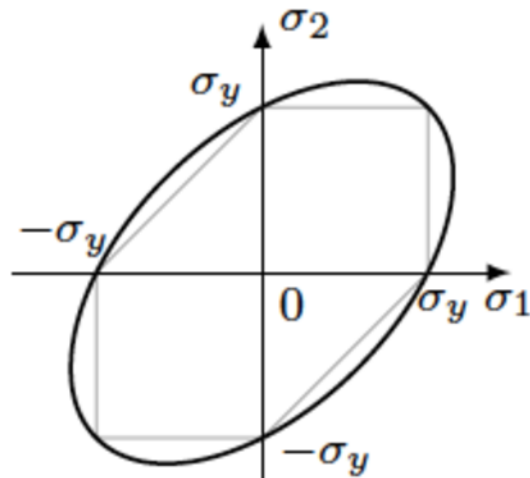
降伏曲面と降伏条件：ある応力状態に対して、座標変換によって定まる主応力を $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ とし、応力を成分とする座標によって張られる空間を考える。主応力の値の関数、ある曲面の方程式 $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \sigma_y) = 0$ を満たす場合に、材料が降伏するとき、この方程式を降伏曲面といい、その条件を降伏条件という。降伏曲面は一般には原点 $O (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (0, 0, 0)$ を囲む閉曲面である。

安全率：応力状態が降伏曲面の内部にあれば弾性である。

ある応力状態を表す点 $P (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ を考え、線分 OP を延長した直線が降伏曲面と交わる点を Q とする。

比 $n = \overline{OQ}/\overline{OP}$ を安全率という。安全率は、降伏条件に対して、現在の応力状態が（比例負荷の仮定の下で）どの程度安全であるかを応力の次元の比として比較した無次元量である。

安全率が1 よりも十分大きいとき安全。



最大せん断応力説 (Trescaの条件)

最大せん断応力 $\tau_{\max}$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) \quad (\sigma_{\max}, \sigma_{\min} \text{ はそれぞれ主応力の最大, 最小のもの})$$

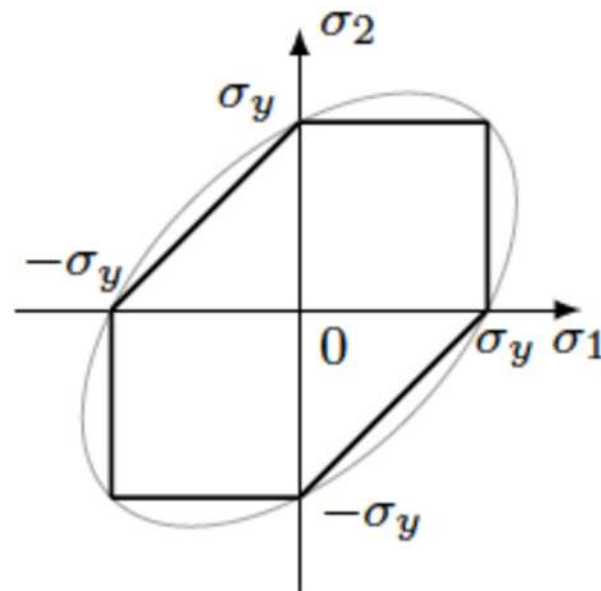
(一般に, 3つの主応力から2つを取り出したときに, それらそれぞれをそれを直径とする3つのモールの応力円を描くことができるが, そのうち半径が最大のものの半径に相当) が, 値 τ_{cr} に達する条件を降伏条件とする説.

降伏基準値: 単軸引張試験の降伏 $\sigma_{\max} = \sigma_y$, $\sigma_{\min} = 0$ から

$$\tau_{\text{cr}} = \frac{\sigma_y}{2}$$

安全率 n

$$n = \frac{\tau_{\text{cr}}}{\tau_{\max}} = \frac{\sigma_y}{2\tau_{\max}}$$



降伏曲面の二次元応力平面
への射影 ($\sigma_3 = 0$ の場合)

$$f(\sigma_1, \sigma_2; \sigma_y) = 0$$

材料力学p.291 図14.11

最大せん断ひずみエネルギー説 (von Misesの条件)

降伏条件 $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_y^2$

相当応力(equivalent stress), **ミーゼス応力** $\bar{\sigma}$ (σ_{eq} などとも表記)

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

八面体せん断応力 3つの主応力軸に対して等しい傾きを持った面
(原点を中心とした正八面体の面) に働くせん断応力

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

降伏曲面の二次元応力平面への射影 ($\sigma_3 = 0$ の場合)

降伏条件, 相当応力, 八面体せん断応力は

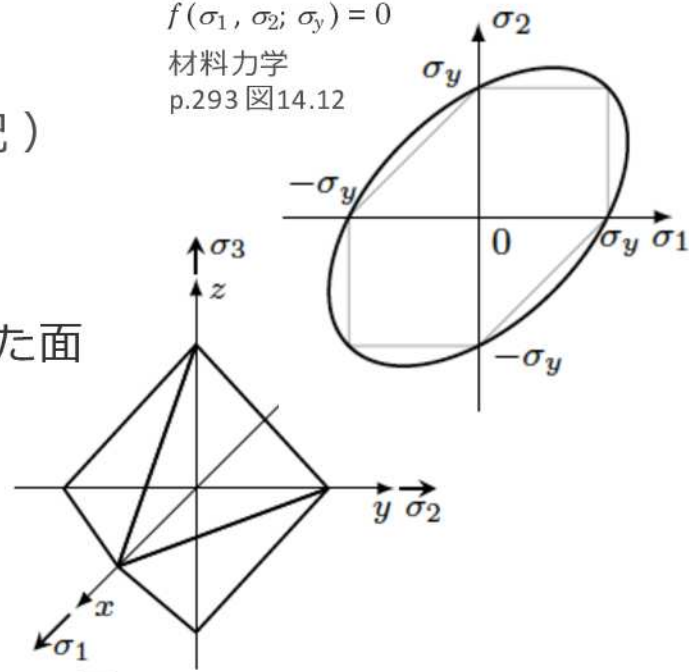
$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_y^2 \quad \bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \quad \tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}$$

安全率 n

$$n = \frac{\sigma_y}{\bar{\sigma}} = \frac{\tau_{oct,cr}}{\tau_{oct}} \quad \text{ただし} \quad \tau_{oct,cr} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_y$$

$$f(\sigma_1, \sigma_2; \sigma_y) = 0$$

材料力学
p.293 図14.12



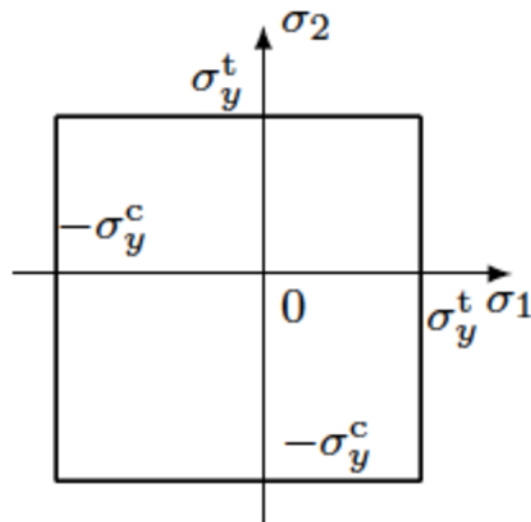
最大主応力説（Rankine の条件）

降伏条件：脆性材料の多くは降伏直後に破断する。最大主応力 $\sigma_{\max}$ が限界値に達すると降伏・破断が生じるとする説を最大主応力説といい、この条件をランキンの条件という。

降伏応力の基準値：単軸引張試験で得られた降伏・破断応力 σ_y^t （多くの場合引張側が危険であり、圧縮側では異なる値 σ_y^c が基準となる）となる。

安全率：降伏・破断応力と最大主応力の比で定義される

$$n = \frac{\sigma_y^t}{\sigma_{\max}}$$

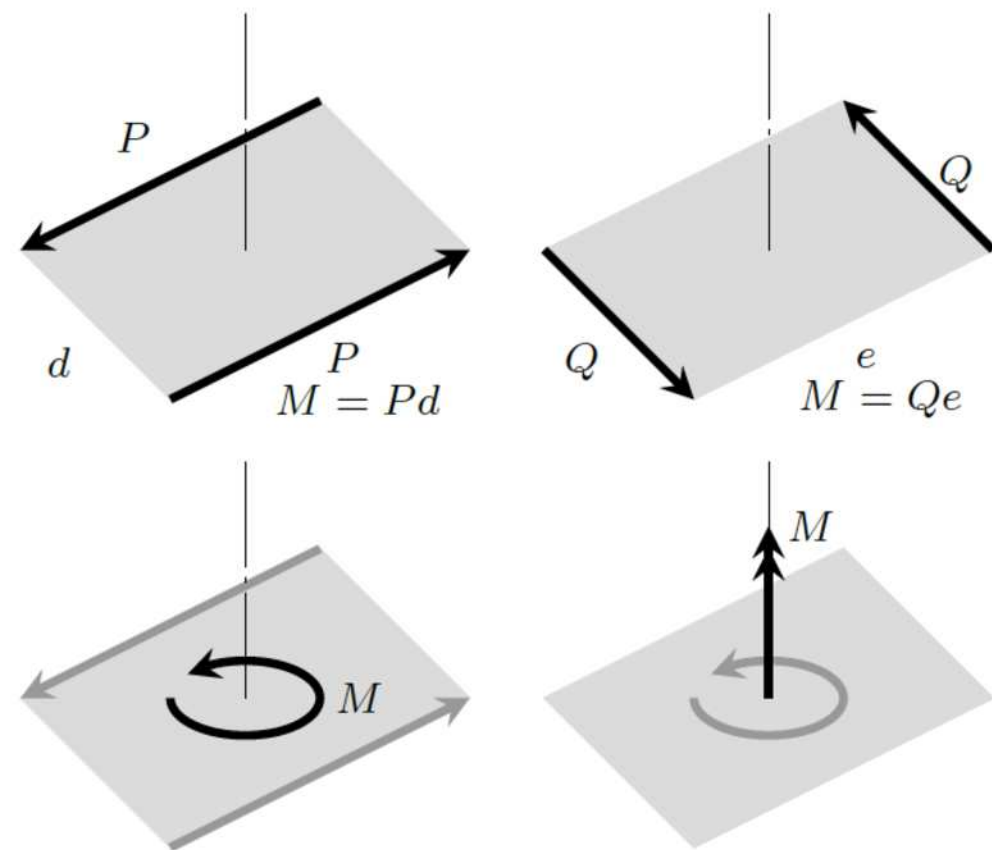


降伏曲面の二次元応力平面への射影（ $\sigma_3 = 0$ の場合）

$$f(\sigma_1, \sigma_2; \sigma_y^t, \sigma_y^c) = 0$$

材料力学p.293 図14.13

モーメント (moment) ・ 偶力 (couple)



偶力 (couple) は大きさが上段左側図のように、同じ向きが互いに反対である力 P (上段右側図では Q) が垂直距離 d (同 e) だけ離れて作用する一組の力である。

面積 $M = Pd = Qe$ のことを偶力のモーメント, あるいは単にモーメント (moment) といい, 下段のように図示することができる。

材料力学では力・偶力の作用点近傍の複雑な力学状態は論じない。またその作用点から遠方に与える影響は同一とみなせる (サン・ブナンの原理) ので, 偶力とモーメントは同じ意味で使われる。

モーメントベクトルの性質 (下段右側図)

矢印を重ねて描いているモーメントベクトルは, モーメントによる回転が右ねじが進む方向につけると約束。通常の力のベクトルと同様に, 大きさと方向が保持される限りどこに移動してもつりあいに関しては影響がない。

また力のベクトルと同様にモーメントベクトルについても合成することもまた逆に分解することもできる。

モーメントベクトルによる図示と モーメントの分解の例

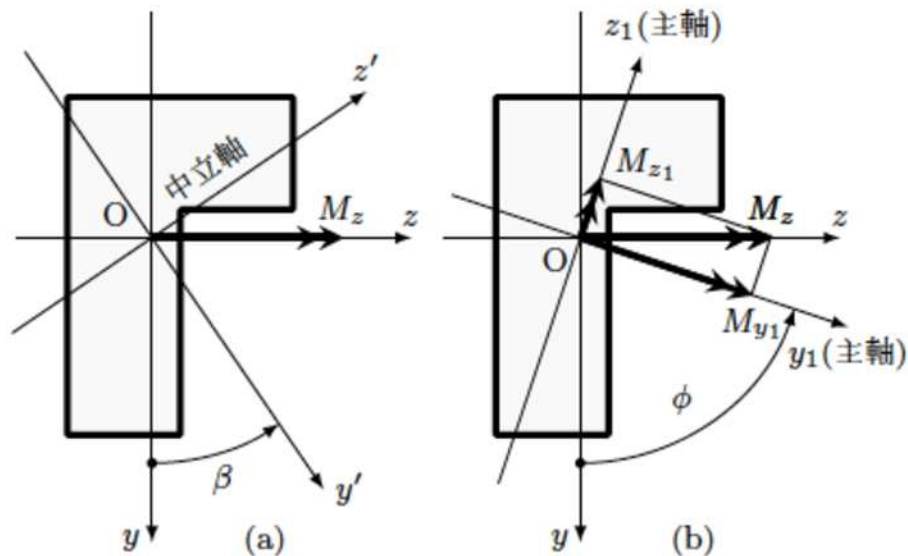
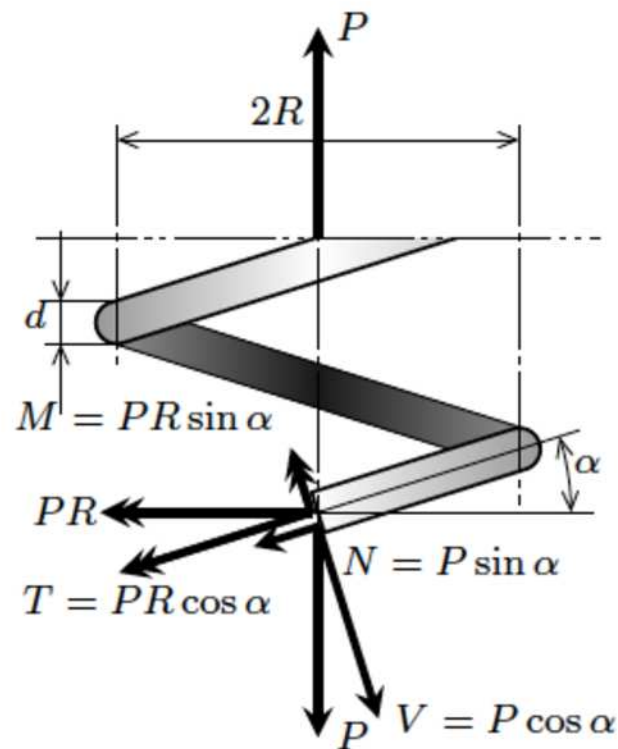


図 5.10 非対称荷重を受けるはり

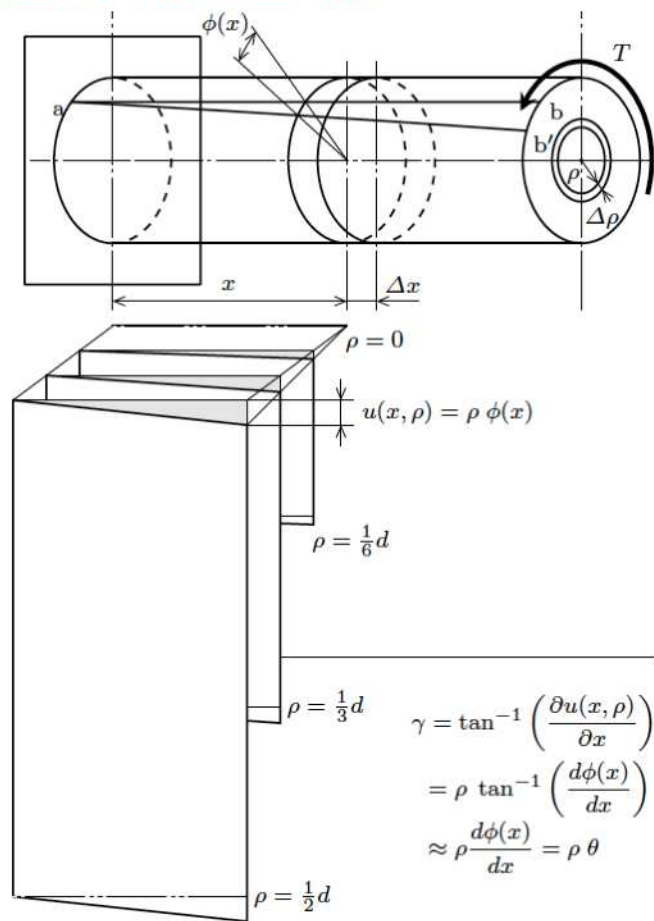
断面の慣性主軸の方向に分解



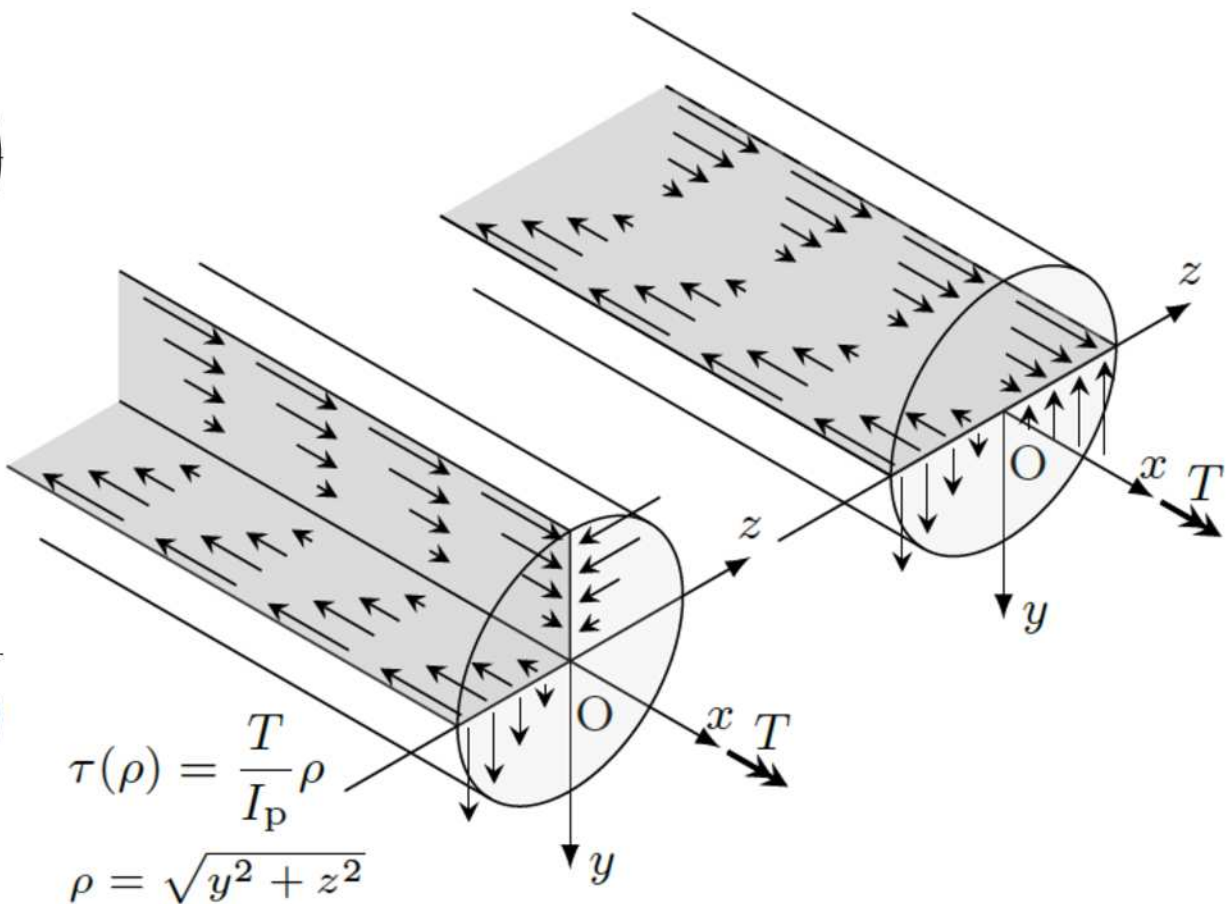
曲げモーメント（軸線に垂直な成分）
ねじりモーメント（軸線に平行な成分）
に分解

ねじりモーメントによるせん断ひずみとせん断応力

(復習, 補足説明)



$$\begin{aligned}\gamma &= \tan^{-1} \left(\frac{\partial u(x, \rho)}{\partial x} \right) \\ &= \rho \tan^{-1} \left(\frac{d\phi(x)}{dx} \right) \\ &\approx \rho \frac{d\phi(x)}{dx} = \rho \theta\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\tau(\rho) &= \frac{T}{I_p} \rho \\ \rho &= \sqrt{y^2 + z^2}\end{aligned}$$

航空機にはたらく組み合わせモーメント

航空機の翼には曲げ・ねじりモーメントが作用する。

迎え角は揚力に直に影響するのでねじりに対しては注意が必要である。翼は大きくたわんでも強度的には許容範囲であれば影響は小さいので曲げ剛性は適度な大きさに設定される。一方、ねじり剛性を大きくする工夫がなされている。合力がせん断中心に作用するように設計することも重要である。

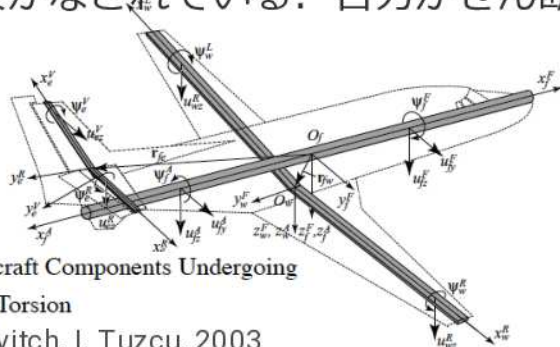


Figure 2. Aircraft Components Undergoing

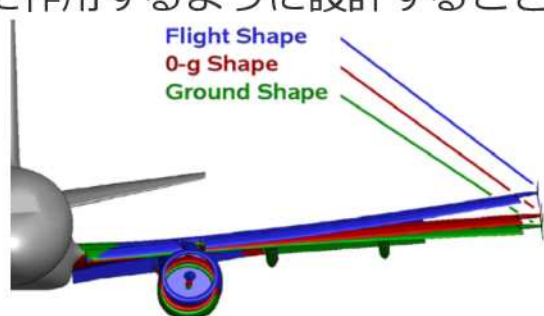
Bending and Torsion

L Merirovitch, I. Tuzcu, 2003



Deflection profiles of Boeing 787

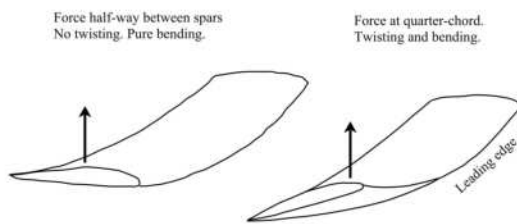
for different flight loads (FlightBlogger)



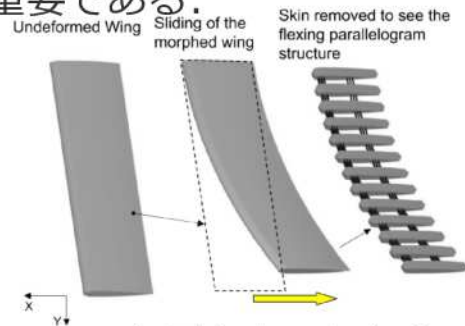
鉛直方向のたわみ

Matthew G Paul, 2017 (DOI:10.15368/theses.2017.65)

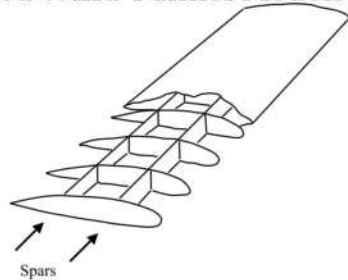
Wing Deflection Analysis of 3D Printed Wind Tunnel Models



横荷重によるねじれ



水平方向のたわみ



横荷重によるねじれ

J.E. Gordon. Structures: Or Why Things Don't Fall Down. DeCapo Press. 2nd Edition, 2003

1921年7月4日発行の雑誌記事（およそ100年前）



D. GARDNER
PRESIDENT
W. D. MOFFAT
VICE-PRESIDENT
W. I. SEAMAN
TREASURER
GEORGE NEWBOLD
BUSINESS MANAGER

AVIATION AND AIRCRAFT JOURNAL

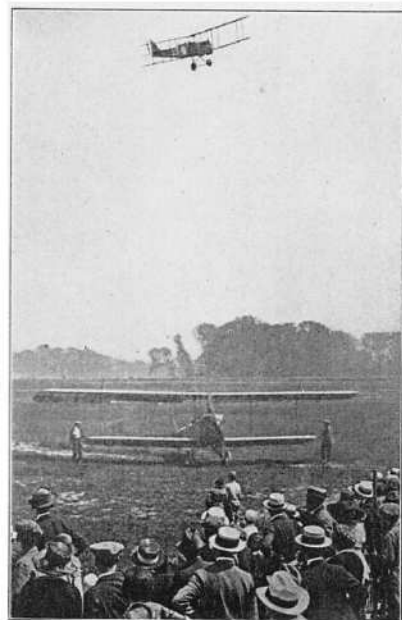
LADISLAS D'ORCY
EDITOR
ALEXANDER KLEMIN
TECHNICAL EDITOR
EDWARD P. WARNER
CONTRIBUTING H. T. A. EDITOR
RALPH H. UPSON
CONTRIBUTING L. T. A. EDITOR



Vol. XI

JULY 4, 1921

No. 1



A GLIMPSE OF BRAINARD FIELD, HARTFORD, CONN., RECENTLY
INAUGURATED

AVIATION

23

Congratulations

an inves-
purpose
andoned
ial aero-
stmaster
the best
first, it
nstantly
personnel
develops

For the first time in its history, the Air Mail Service for the week ending June 11 had 100 per cent performance on all divisions.

Changes in the Air Mail Service, which become effective July 1, involve the discontinuance of the route from Chicago to Minneapolis, and the route from Chicago to St. Louis. The aviation fields at College Park, Maryland, Bustleton, Pennsylvania, Newark, New Jersey, St. Louis, Missouri, Minneapolis, Minnesota, and LaCrosse, Wisconsin, will be abandoned

1921年6月11日 米国のAir Mail Service が全ての地域で100%運用

L. D. GARDNER
PRESIDENT
W. D. MOFFAT
VICE-PRESIDENT
W. I. SEAMAN
TREASURER
GEORGE NEWBOLD
BUSINESS MANAGER

AVIATION AND AIRCRAFT JOURNAL

LADISLAS D'ORCY
EDITOR
ALEXANDER KLEMIN
EDWARD P. WARNER
RALPH H. UPSON
CONTRIBUTING EDITORS

Vol. XI

OCTOBER 10, 1921

No. 15

Monoplanes or Biplanes?

In connection with the article *Single Engine Cabin Airplanes* by Donald W. McIlhenny which was published in our issue of Sept. 26, 1921, we are reproducing below in free translation an article by André Herbemont, chief engineer of the Blériot-Spad company of France, and designer of the well-known Spad airplanes. M. Herbemont contributed this article to our contemporary *L'Air* in response to an inquiry as to whether the airplanes of the immediate future would be thick wing cantilever monoplanes, or biplanes built along the orthodox ideas of external bracing.

M. Herbemont's views are of particular interest in this case, not only because he is the designer of one of the most efficient commercial airplanes of recent date, but also because the

should be noted, however, that laboratory tests are made scale models of considerable reduction. Now, it is easy to reproduce the strutless monoplane in a scale model but it is more difficult to do so with externally braced biplane, the bracing of which cannot be exactly reproduced. results of wind tunnel tests may therefore be at variance the performance of a full size machine.

Aside from these practical difficulties one cannot insist strongly on that the L/D figures obtained in laboratory are the result of an L which is the total lift of the machine and of a D which is the total drag of the machine.

The internally trussed thick wing monoplane affords possibility of achieving a performance equal to that of externally trussed thin wing biplane, but with higher wing and power loading. Full flight tests of machines such as the Junker confirm this superiority in efficiency, although to a lesser extent than the laboratory tests showed, which is due to the difficulty of correctly reproducing airplanes in scale models, mentioned above.

But all cantilever monoplanes have a serious handicap: their net weight, or weight empty.

The efficiency of an airplane is obviously independent of the total weight of the machine. The only factor which determines the commercial efficiency is the ratio Pay load/Horsepower, or pounds of pay load per horsepower, all other things being equal, including the speed and the range.

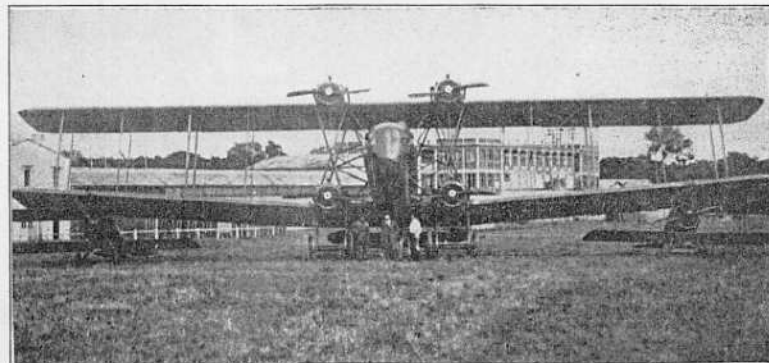
Now a strutless cantilever monoplane will have a greater structural weight than an externally trussed biplane of equivalent characteristics, and this for the following reasons. In a biplane the distance between the extreme limits of attachment of the wing cell is equal to the interplane gap. In a

The question "Metal or wood airplanes?" cannot be answered by stating an absolute principle. The two types of wings are each advantageous in their own way, and embody at the same time serious drawbacks.

The airplane of the future will probably be a sort of semi-biplane, or double monoplane, by which I mean a machine with medium thick wings, braced by a small number of interplane struts and wires.

In laboratory tests struts and wires strikingly demonstrate the parasite resistance they cause, and the internally braced thick wing monoplane gives an L/D which is far superior to that shown by the best biplanes. It

follows the example set by nature in bird flight. Granting this argument, it may be pointed out that the wings of a cantilever monoplane differ from bird wings by their great thickness and that they must needs always be thicker than those of externally



BLÉRIOT "MAMMOUTH" (FOUR 250 HP. HISPANO-SUIZA ENGINES)



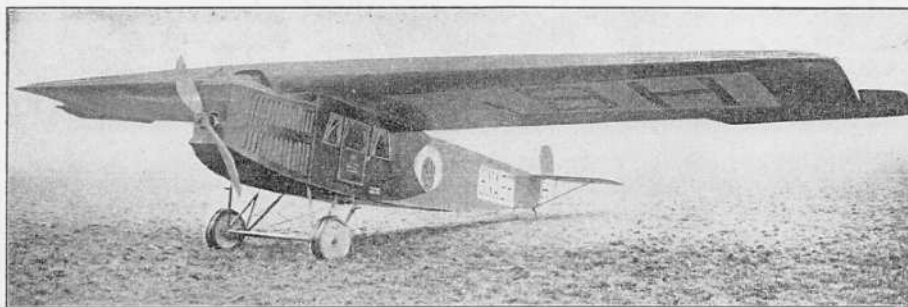
SPAD S-33 SIX-SEATER (245 HP. SALMSON ENGINE). PAY LOAD, 1452 LB.

単葉機が複葉機がよいのか？
材料は木材がいいか？金属がいいか？
など議論してある記事

October 10, 1921

AVIATION

421



FOKKER F-3 SIX-SEATER (220 HP. B.M.W. ENGINE). PAY LOAD, 1050 LB.

trussed biplanes. Consequently they will be much heavier per unit of surface area. This high initial weight is the great drawback of cantilever monoplanes, just as their high L/D is their main asset. In the biplane, on the other hand, light weight per unit area is the principal advantage, while high

The accompanying table conclusively proves the chief defect of internally trussed monoplanes: the great structural weight of the wings. In this connection it is worth noting that the ratio Useful Load/Weight Empty, which nearly attains 100 per cent in the Spad S-33, and is 0.660 in the

Distribution of Load over Wing Tips and Stress Analysis

By B. V. Korvin-Kroukovsky, M.Sc.

Aeromarine Plane and Motor Co.

It is a well known fact, that load per inch run of a wing drops off in proximity of wing tip. The necessity of taking this drop into account in strength computations was recognized long ago, and several approximate methods were in use. Study of pressure distribution along model wings was made by the National Physical Laboratory, and led to the conclusion, that distribution of the load over a wing tip is practically independent of the plan form of the tip. Accordingly a mean curve was deduced, which was standardized by Technical Department in England, as the basis for strength computations. This load curve is reproduced on Fig. 2.

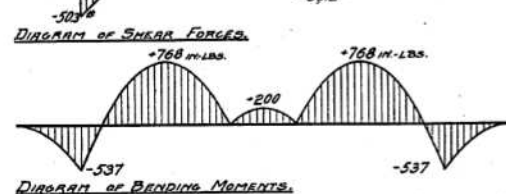
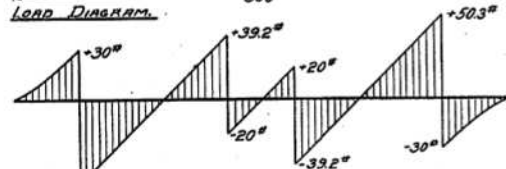
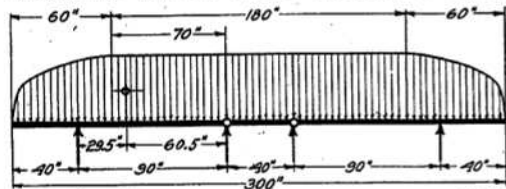


Fig. 1.

Total load:
 $900 = 180X + 2 \times 49.5X = 279$
 or $X = 900/279 = 3.23 \text{ lb. per inch run}$
 Bending moments and reactions of supports most conveniently in terms of load of 1 lb. Actual reactions and moments for any one readily found then by multiplying results by run and by proper load factor.

Upper sketch of Fig. 1 shows, that outer struts in, or 0.8 chord from the wing tip. Consulting Fig. 2, we find that at this distance bending moment due to $0.215 \times \text{Chord}^2 \times \text{Load per inch run}$. Hence moment due to overhang is:

$$0.215 \times 50^2 \times 1 = 537 \text{ in.-lb.}$$

In order to find the reactions of supports, it is necessary to find first the center of gravity of the load diagram. This

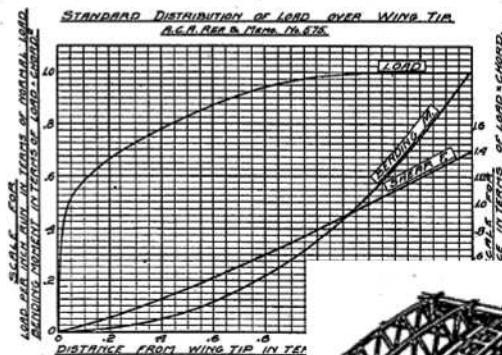


Fig. 2.

is accomplished best by taking moment from the wing tip (1.2 chord):

Moment due to uniform load = 7
 Moment due to tip load = 0.525

Net 1

L. D. GARDNER
 PRESIDENT
 W. D. MOFFAT
 VICE-PRESIDENT
 W. I. SEAMAN
 TREASURER
 GEORGE NEWBOLD
 BUSINESS MANAGER

Vol. XI

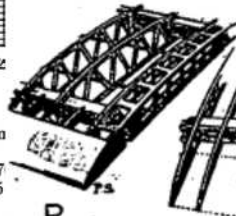
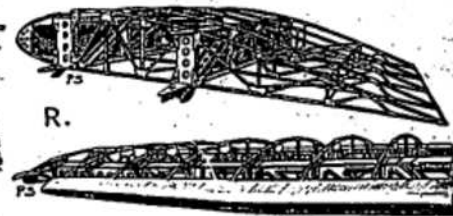
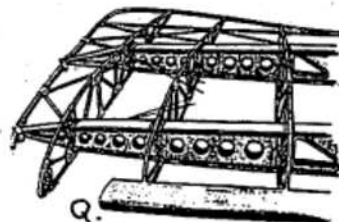
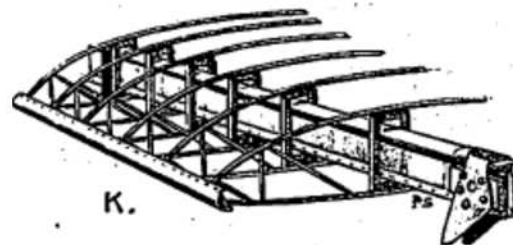
AVIATION AND AIRCRAFT JOURNAL

December 12, 1921

LADISLAS D'ORCY
 EDITOR
 ALEXANDER KLEMIN
 EDWARD P. WARNER
 RALPH H. UPSON
 CONTRIBUTING EDITORS

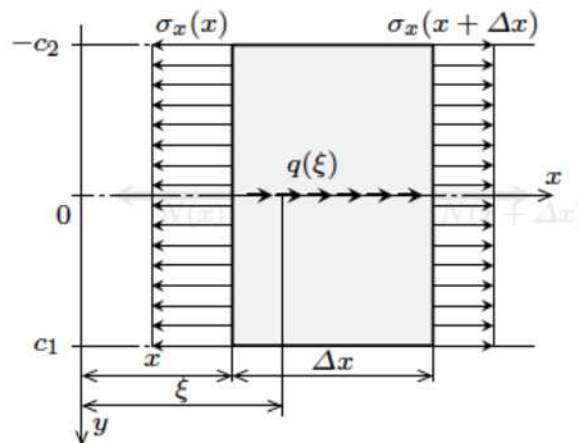
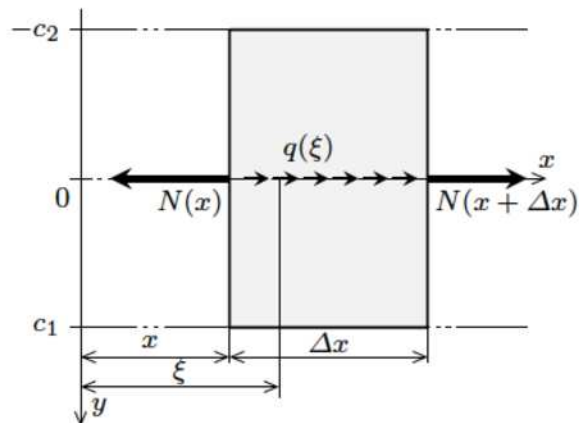
No. 24

The Seventh Paris Aero Show

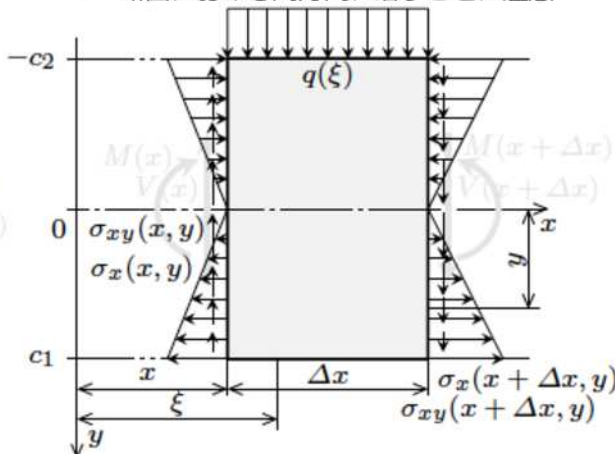
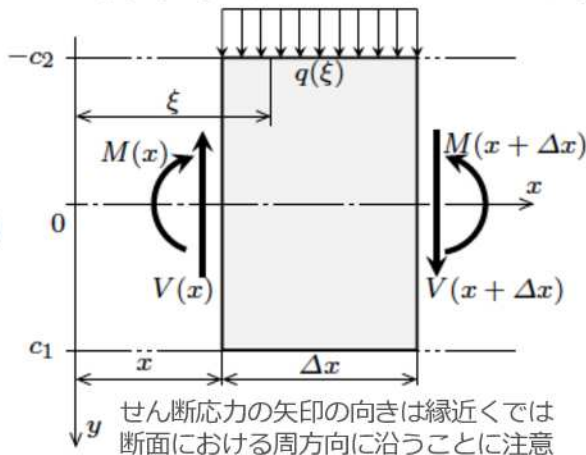


横断面にはたらく力・モーメントと応力分布のまとめ

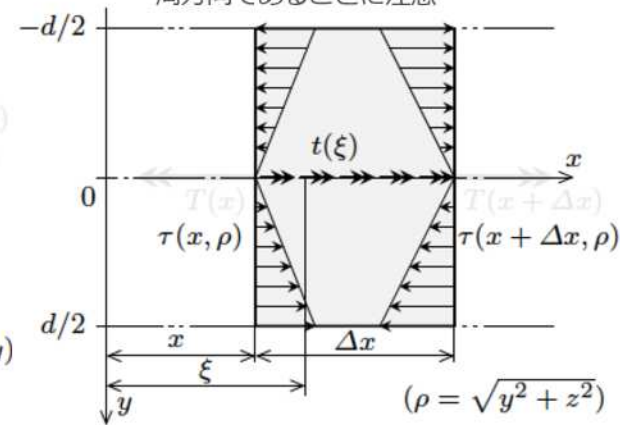
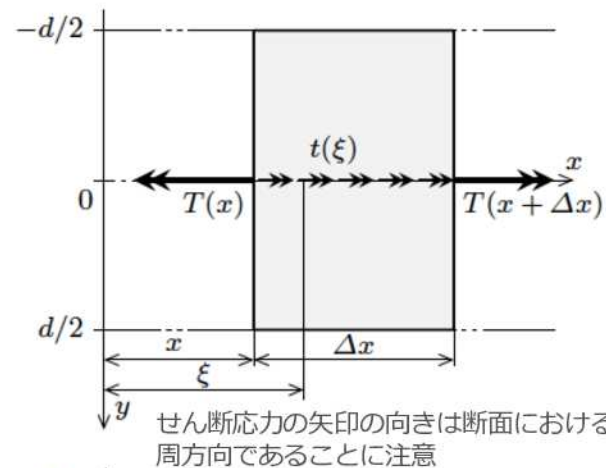
引張・圧縮（軸力）



曲げ（曲げモーメント・せん断力）



ねじり（ねじりモーメント）



マクロ
問題

軸線 (x)

ミクロ
問題

点 (x, y, z)

組合せ荷重による横断面の応力

横断面の応力は y, z の関数

もっとも大きな値が重要（断面係数などで表現）

曲げモーメントによる曲げ応力

$$\sigma = \frac{M}{Z}$$

ねじりモーメントによるせん断応力

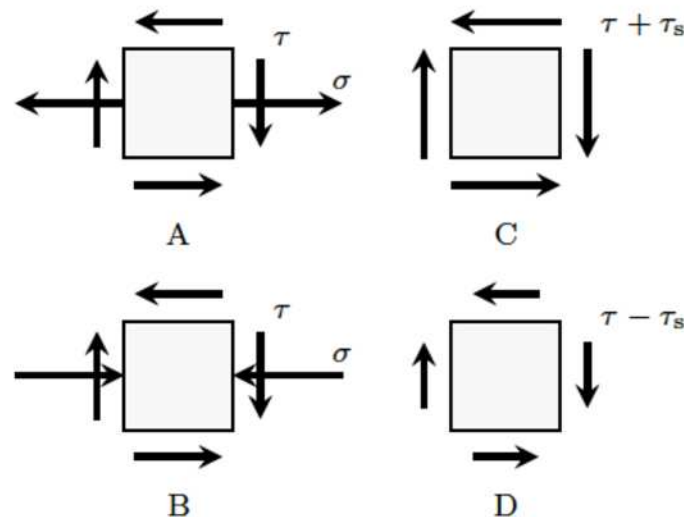
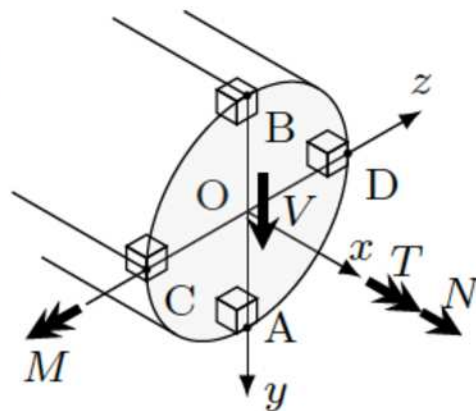
$$\tau = \frac{T}{Z_p}$$

軸力による垂直応力

$$\sigma_N = \frac{N}{A}$$

せん断力によるせん断応力（円形断面はり）

$$\tau_s = \frac{4}{3} \frac{V}{A}$$



曲げモーメント，ねじりモーメント，せん断力による
応力分布（円柱の側面の法線方向からみたとき）

（ $N=0$ の場合）

組合せ荷重による横断面の応力

横断面の応力

曲げ応力（曲げ）

$$\sigma = \frac{M}{Z}$$

せん断応力（ねじり）

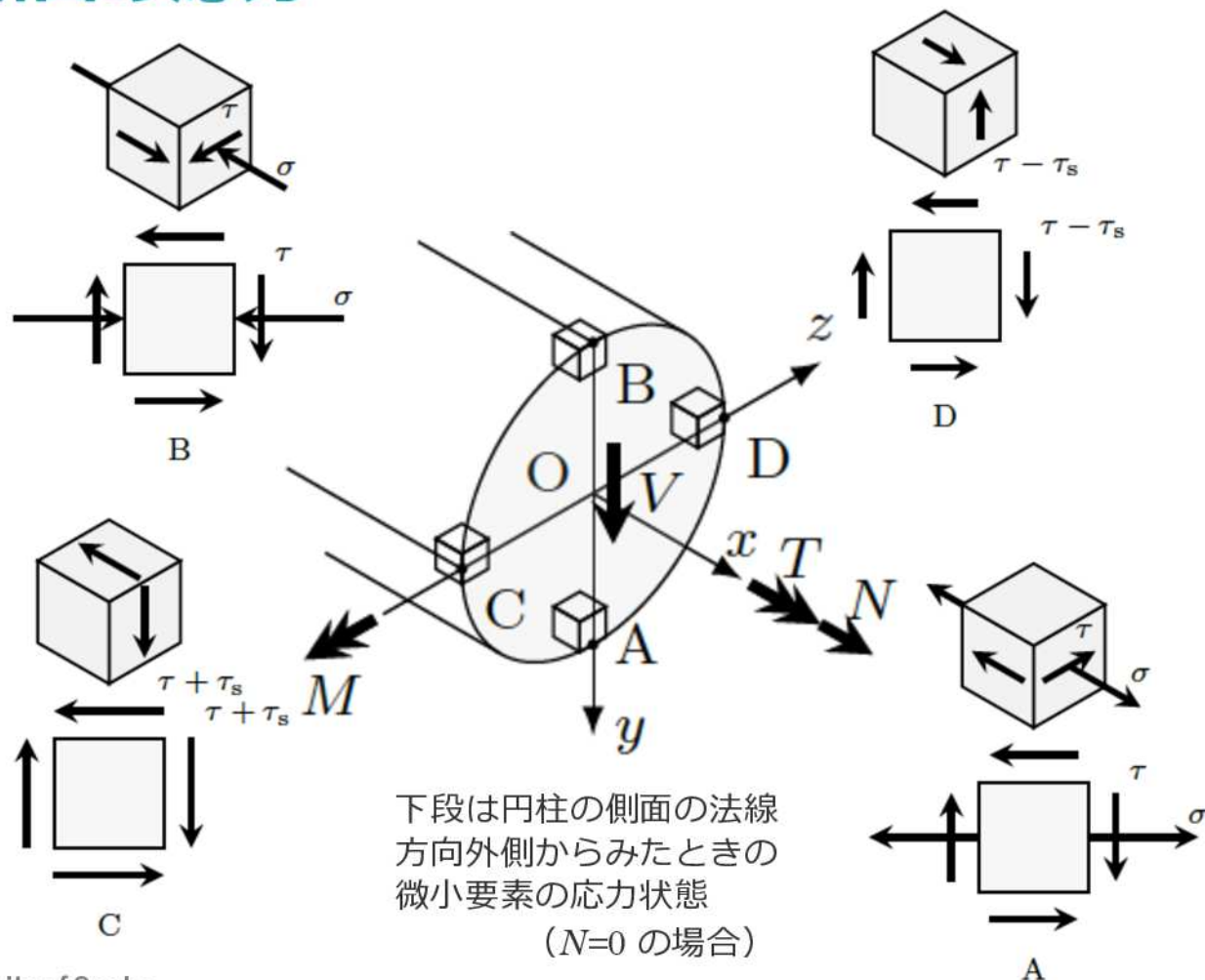
$$\tau = \frac{T}{Z_p}$$

垂直応力（引張・圧縮）

$$\sigma_N = \frac{N}{A}$$

せん断応力（せん断力）
（円形断面はり）

$$\tau_s = \frac{4V}{3A}$$



曲げとねじりの組合せ

垂直応力 せん断応力

$$\sigma = \frac{M}{Z} \quad \tau = \frac{T}{Z_p}$$

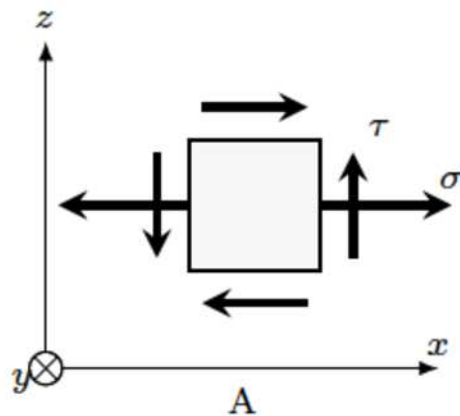
主応力, 最大せん断応力, その方向

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}$$

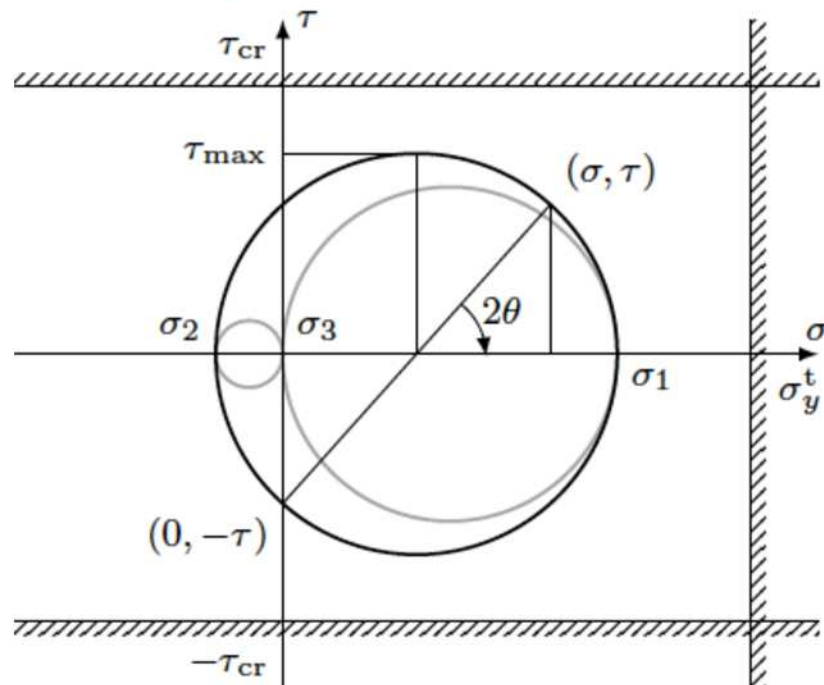
$$\sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \frac{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau}{\sigma}$$



円柱の側面の法線方向内
側から外にみたときの
微小要素の応力状態
($N=0$ の場合)



相当曲げモーメント，相当ねじりモーメント

曲げの
垂直応力

$$\sigma = \frac{M}{Z} \quad \text{plus} \quad \tau = \frac{T}{Z_p}$$

ねじりの
せん断応力

$$\tau = \frac{T}{Z_p} \quad \text{plus} \quad \sigma = \frac{M}{Z}$$

最大主応力(その1)

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}$$

最大せん断応力(その1)

$$\tau_{\max} = \frac{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}$$

断面係数

$$Z = \pi d^3 / 32$$

極断面係数

$$Z_p = \pi d^3 / 16$$

最大主応力(その2)

$$\sigma_1 = \frac{16}{\pi d^3} (M + \sqrt{M^2 + T^2})$$

最大せん断応力(その2)

$$\tau_{\max} = \frac{16}{\pi d^3} \sqrt{M^2 + T^2}$$

相当曲げモーメント

$$M_e = \frac{1}{2} (M + \sqrt{M^2 + T^2})$$

相当ねじりモーメント

$$T_e = \sqrt{M^2 + T^2}$$

最大主応力(その3)

$$\sigma_{\max} = \frac{M_e}{Z}$$

最大せん断応力(その3)

$$\tau_{\max} = \frac{T_e}{Z_p}$$

曲げとねじりの組合せ時の安全率

(中間主応力 $\sigma_3 = 0$ の場合)

垂直応力 せん断応力

$$\sigma = \frac{M}{Z} \quad \tau = \frac{T}{Z_p}$$

主応力, 最大せん断応力

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \frac{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}$$

最大主応力

$$\sigma_{\max} = \sigma_1$$

安全率

最大せん断応力説 (トレスカの条件)

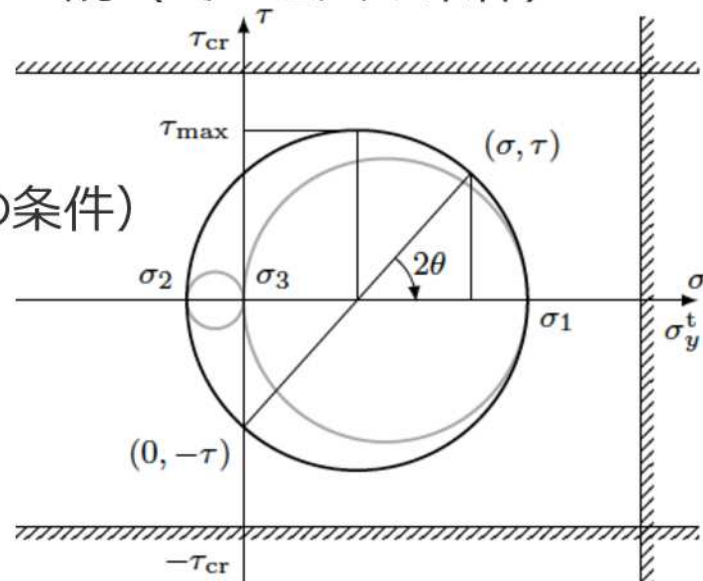
$$n = \frac{\tau_{\text{cr}}}{\tau_{\max}} = \frac{\sigma_y}{2\tau_{\max}}$$

最大せん断ひずみエネルギー説 (ミーゼスの条件)

$$n = \frac{\sigma_y}{\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}}$$

最大主応力説 (ランキンの条件)

$$n = \frac{\sigma_y^t}{\sigma_{\max}}$$



ねじり変形による破壊

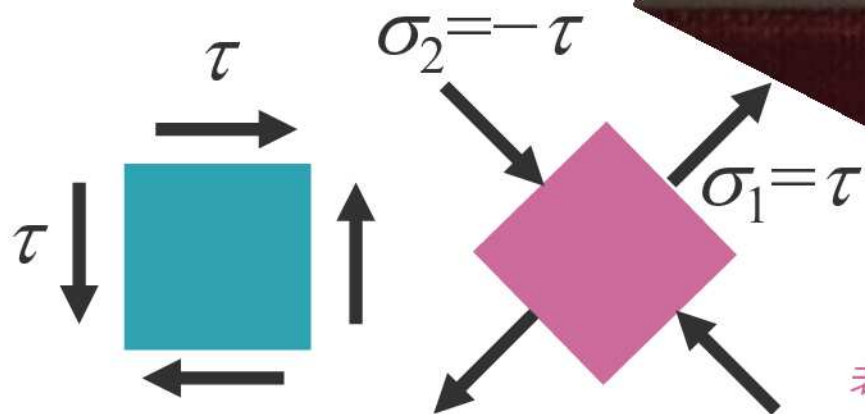
考えてみよう♪



ねじり変形による破壊



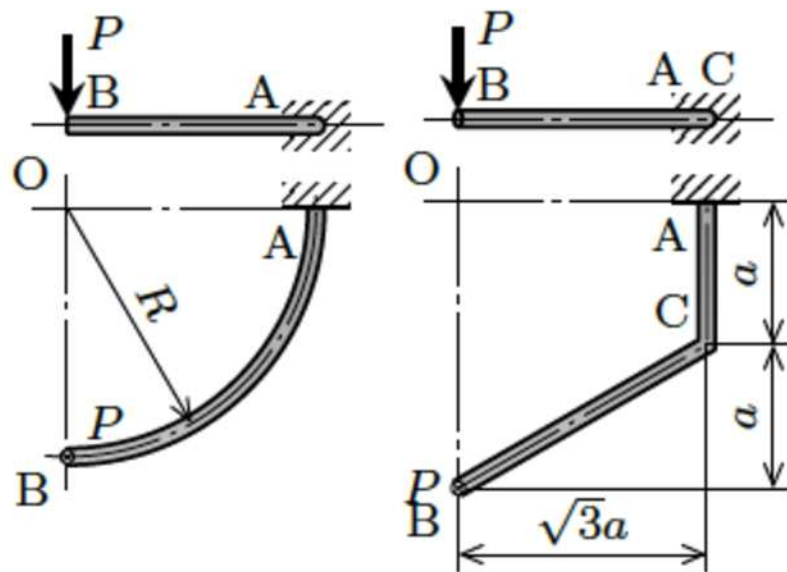
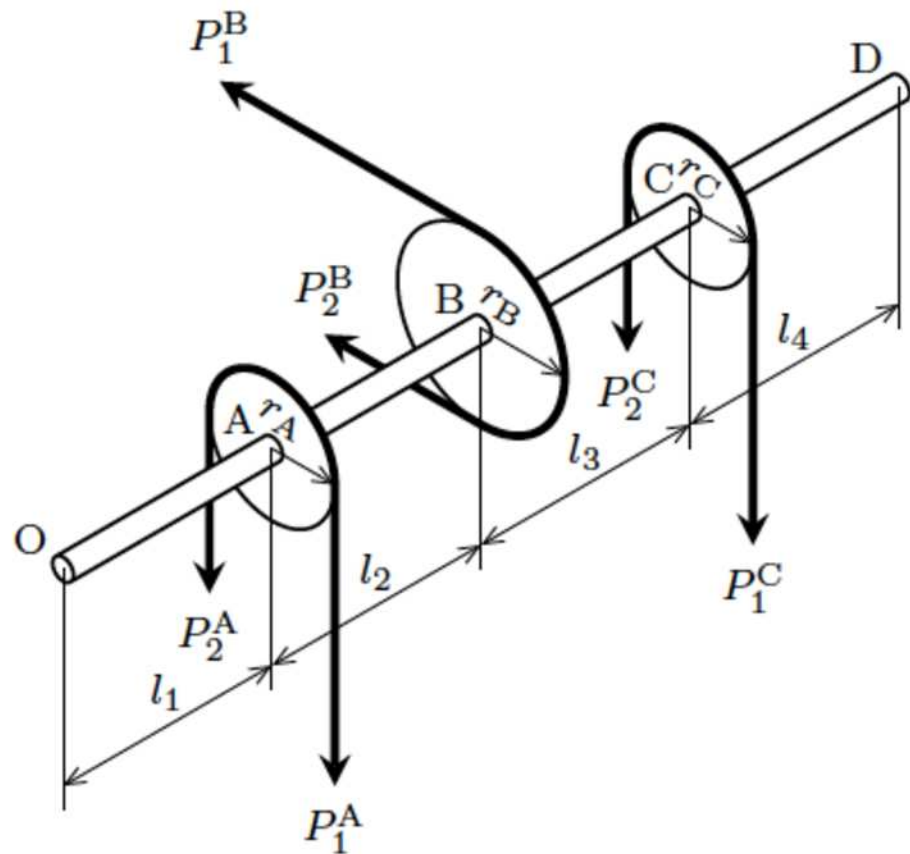
純せん断応力場の主応力と主方向を考えると理解できる。



最大主応力説

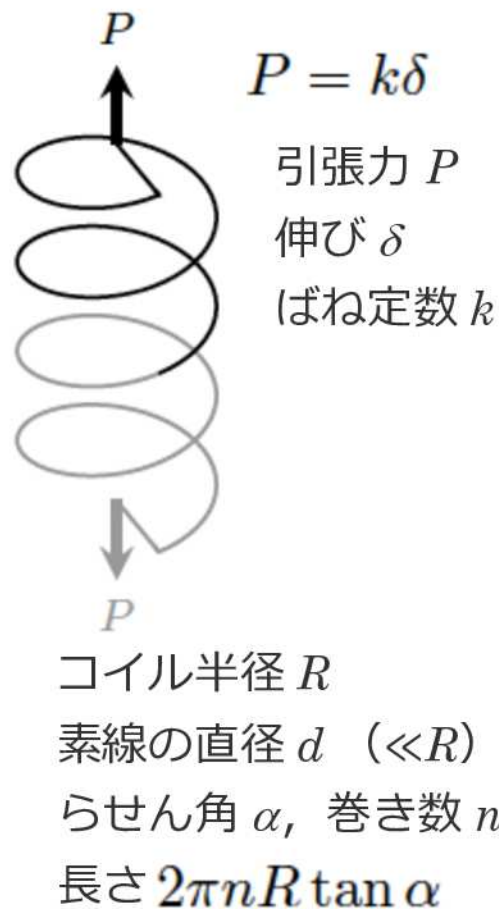
考えてみよう♪

組合せモーメントが作用する問題例



考えてみよう♪

コイルばね



素線の配置に対して
力・モーメントをベクトルの的に分解

荷重 P を分解

引張力

$$N = P \sin \alpha$$

せん断力

$$V = P \cos \alpha$$

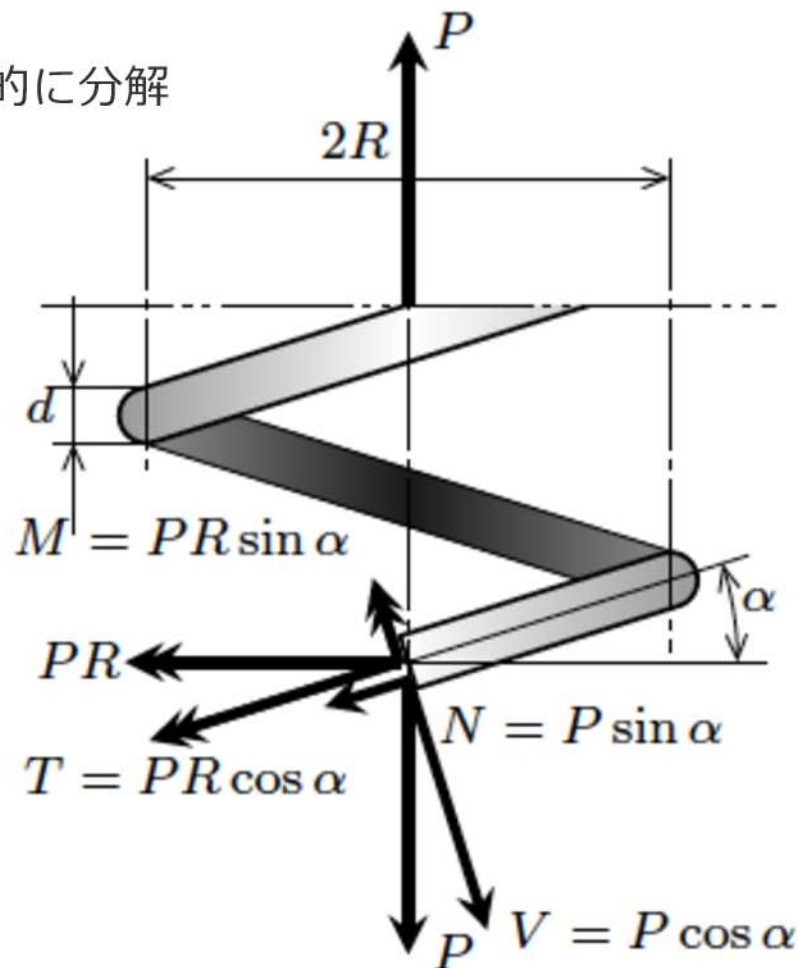
モーメント PR を分解

曲げモーメント

$$M = PR \sin \alpha$$

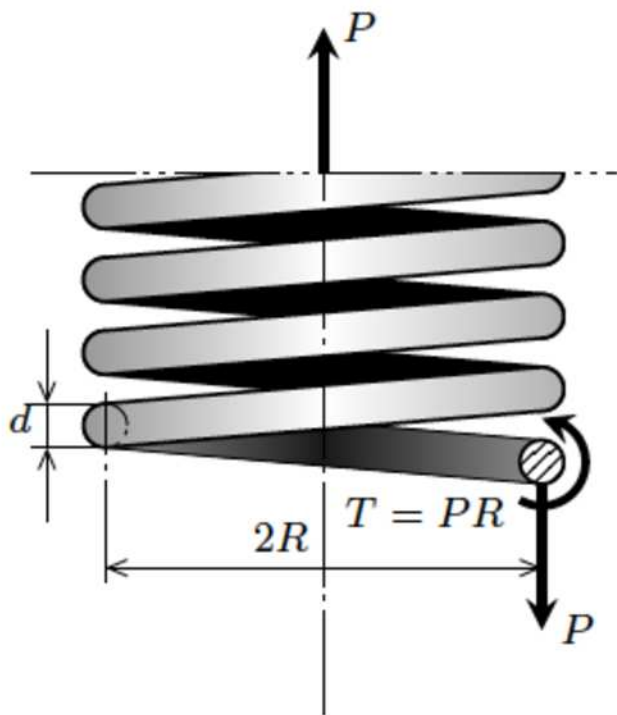
ねじりモーメント

$$T = PR \cos \alpha$$



密巻コイルばね

らせん角 α が小さく場合
 $\sin \alpha \simeq 0 \quad \cos \alpha \simeq 1$



せん断力 $V = P$ と, ねじりモーメント $T = PR$ のみ考慮
 せん断応力

$$\tau_1 = \frac{T}{I_p} \frac{d}{2} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16PR}{\pi d^3} \quad \tau_2 = \frac{V}{A} \frac{4}{3} = \frac{16V}{3\pi d^2} = \frac{16P}{3\pi d^2}$$

$$\tau_{\max} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{16PR}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{3R} \right)$$

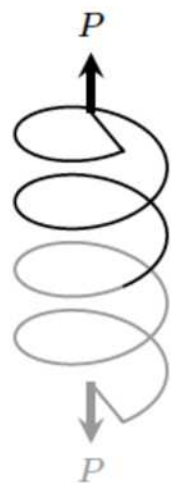
長さ ds の素線要素については, ねじれ角 θds に R を乗じたものが, コイル軸方向伸び変位に寄与する

$$\theta = \frac{T}{GI_p} = \frac{32T}{G\pi d^4} \quad d\delta = R\theta ds = \frac{T}{GI_p} R ds = \frac{32PR^2}{G\pi d^4} ds$$

全長にわたり積分すると, 伸び d と, ばね定数 k を得る.

$$\delta = \int_0^{2\pi Rn} \frac{32PR^2}{G\pi d^4} ds = \frac{64nPR^3}{Gd^4} \quad k = \frac{Gd^4}{64nPR^3}$$

らせん角の大きいコイルばね (応力と強度評価)



$$P = k\delta$$

引張力 P

伸び δ

ばね定数 k

回転角 ω

曲げモーメントとねじりモーメント

$$M = PR \sin \alpha \quad T = PR \cos \alpha$$

曲げ応力, せん断応力

$$\sigma = \frac{M d}{I \cdot 2} = \frac{32M}{\pi d^3} = \frac{32PR \sin \alpha}{\pi d^3}$$

$$\tau = \frac{T d}{I_p \cdot 2} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16PR \cos \alpha}{\pi d^3}$$

コイル半径 R

素線の直径 d ($\ll R$)

らせん角 α , 巻き数 n

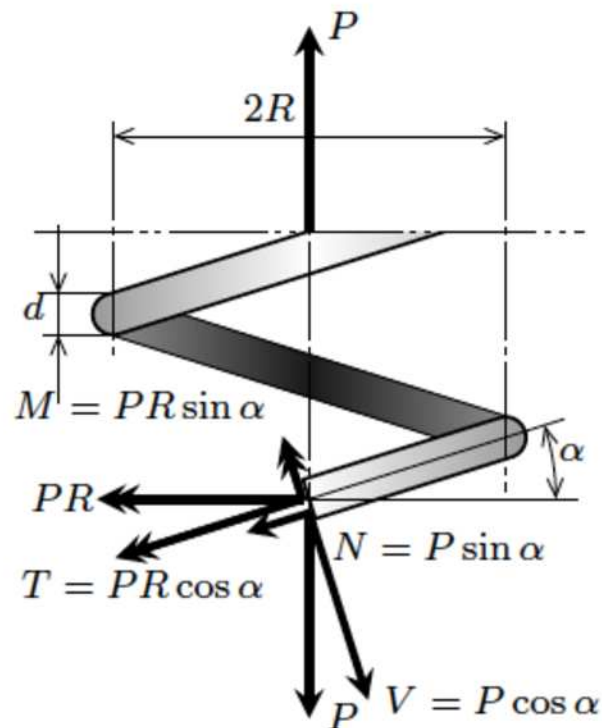
コイルの長さ $2\pi n R \tan \alpha$

素線の全長 $\frac{2\pi R n}{\cos \alpha}$

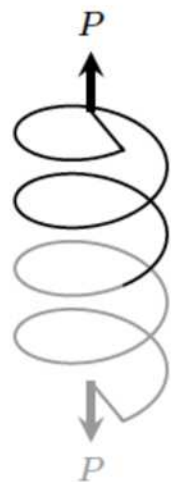
最大主応力と最大せん断応力

$$\sigma_{\max} = \frac{16PR}{\pi d^3} (1 + \sin \alpha)$$

$$\tau_{\max} = \frac{16PR}{\pi d^3}$$



らせん角の大きいコイルばね（伸縮とねじれの考え方）



$$P = k\delta$$

引張力 P

伸び δ

ばね定数 k

回転角 ω

コイル半径 R

素線の直径 d ($\ll R$)

らせん角 α , 巻き数 n

コイルの長さ

$$2\pi n R \tan \alpha$$

長さ ds の素線要素の変形

$$\text{ねじれ角 } \left(\frac{T}{GI_p} \right) ds$$

$$\text{曲げによるたわみ角 } \left(\frac{M}{EI} \right) ds$$

コイル軸方向変位 δ への寄与：

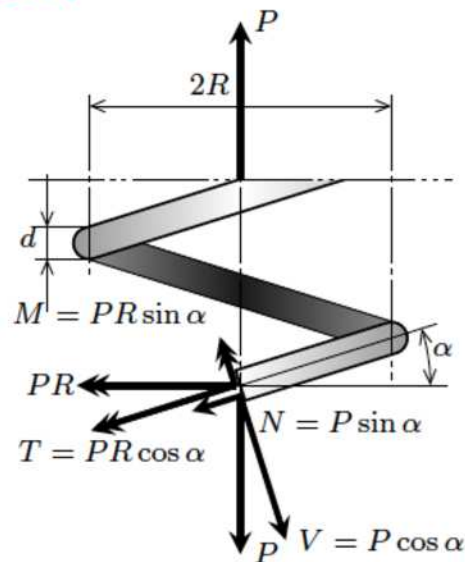
それぞれに $R \cos \alpha$, $R \sin \alpha$ を乗じたもの

$$d\delta = R \left(\frac{T}{GI_p} \right) ds \cos \alpha + R \left(\frac{M}{EI} \right) ds \sin \alpha$$

コイルの軸まわりの回転角 ω への寄与：

それぞれに $\sin \alpha$, $-\cos \alpha$ を乗じたもの

$$d\omega = \left(\frac{T}{GI_p} \right) ds \sin \alpha - \left(\frac{M}{EI} \right) ds \cos \alpha$$



素線の全長

$$\frac{2\pi R n}{\cos \alpha}$$

にわたって積分すれば
 δ , ω を得る。

らせん角の大きいコイルばね（伸縮とねじれの計算結果）

引張力 P

コイル半径 R

$$P = k\delta$$

素線の直径 d ($\ll R$)

らせん角 α , 巻き数 n (コイルの長さ $2\pi nR \tan \alpha$)

伸び δ

$$\delta = \frac{2\pi n R^3}{\cos \alpha} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{GI_p} + \frac{\sin^2 \alpha}{EI} \right) P = \frac{64n R^3}{d^4 \cos \alpha} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{G} + \frac{2 \sin^2 \alpha}{E} \right) P$$

ばね定数 k

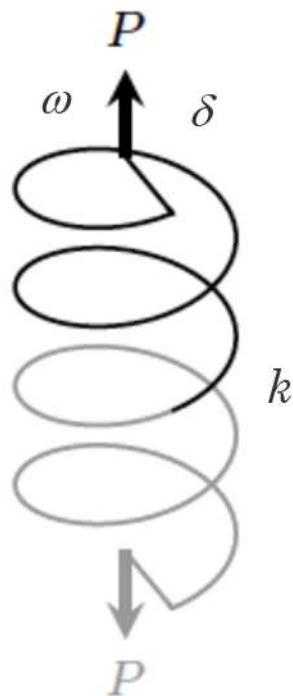
$$k = \frac{d^4 \cos \alpha}{64n R^3 \left(\frac{\cos^2 \alpha}{G} + \frac{2 \sin^2 \alpha}{E} \right)}$$

コイルが自由に回転できる
場合のばね定数である

もし回転しないように拘束
すればばね定数は変化する

回転角 ω

$$\omega = 2\pi n R^2 \sin \alpha \left(\frac{1}{GI_p} - \frac{1}{EI} \right) = \frac{64n R^2 \sin \alpha}{d^4} \left(\frac{1}{G} - \frac{2}{E} \right)$$



次回

材料力学2025 シーズン2

第10話 ねじり 補足 / エネルギー法 前編

2025年7月8日 (火)

Coming Soon . . .