材料力学2025 シーズン2

第６話　複雑なはりの問題　前編

2025年**6**月**24**日（火）

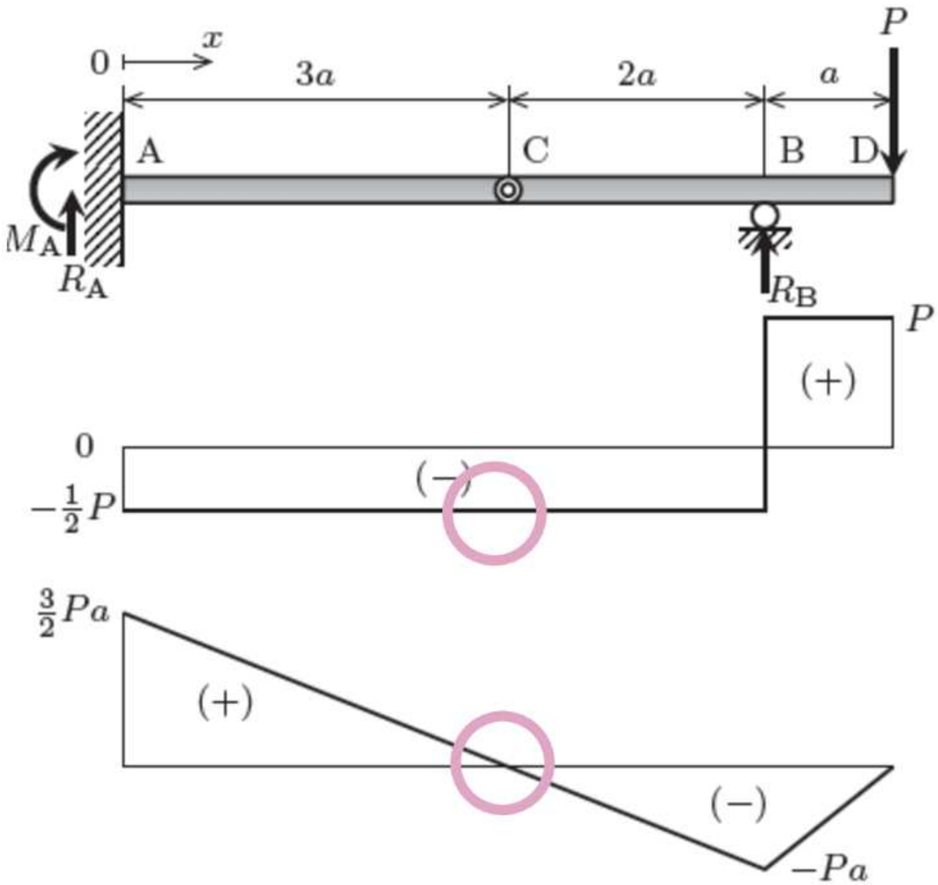
中谷 彰宏

教科書「渋谷陽二，中谷彰宏，材料力学，(2017)，コロナ社」
1, 2, 3, 4, 10, 11章（春学期の授業）を学習し終えて、
5, 6, 7, 8, 9, 12, 13章（夏学期の授業）をこれから学ぶ諸君のために

機械工学の基本哲学としての材料力学

- 材料力学の理念（ひとつの例）
  - 力の世界と幾何の世界の間に成り立つ系の特性（関係性）と関連する現象の発現機構を探究する学問
    - 構成要素間の力の釣合い（力学的に許容される内力）
    - 構成要素間の運動学（幾何学的に許容される変形）
  - 系とその構成要素間の関係を記述することを通じて系を理解する考え方は「力学」の概念を拡大することによってさまざまな分野に応用できる
    - 部品とその集合体である製品，個人とその集まりである社会など
- ハイゼンベルクの自伝「部分と全体」
  （Der Teil Und Das Ganze, 英題 The part and the whole）

ヒンジを持つ固定はり（ゲルバーはり）のたわみの考察（材料力学 p.19 例題2.3 も参照）



ヒンジ部

たわみ：連続
たわみ角：不連続
曲げモーメント（曲率）は0
せん断力：連続

注意！

BMDとSFDだけではヒンジの特徴的な変形様式を推察することができない。

ヒンジを持つ固定はり（ゲルバーはり）のたわみ

ヒンジ部（点 C : $x = 3a$）では，曲げモーメント $M(3a) = 0$ であるから，

$$M_A = \frac{3}{2}Pa, \quad R_A = -\frac{1}{2}P, \quad R_B = \frac{3}{2}P$$

まず，AB 間について考える．この問題の場合，AB 間で，せん断力 $V(x) = -P/2$ は一定，曲げモーメント $M(x)$ は

$$M(x) = \frac{P}{2}(3a - x)$$

のように直線状に変化する．しかし，ヒンジ部（点 C）で，たわみ $y(x)$ は連続であるが，たわみ角 $\theta(x)$ はで不連続になるので，たわみの方程式の積分やモーメント面積法の適用の際には注意が必要である．

ヒンジを持つ固定はり（ゲルバーはり）のたわみ（つづき）

例えば，一般には AC 間，CB 間で場合分けする必要があり，それらを添字 1，添字 2 をつけて表記するとする．つまり，曲げモーメント分布は，

$$M_1(x) = M_2(x) = \frac{P}{2}(3a - x)$$

のように両区間で同一の表現となり，たわみの方程式も

$$EIy_1'' = EIy_2'' = \frac{1}{2}Px - \frac{3}{2}Pa$$

のように両区間で同一の表現になる．しかしその積分では以下のように積分定数を区間ごとに別々の値をとるものとして考える必要がある．

$$EIy_1' = \frac{1}{4}Px^2 - \frac{3}{2}Pax, \qquad EIy_2' = \frac{1}{4}Px^2 - \frac{3}{2}Pax + C_1$$

$$EIy_1 = \frac{1}{12}Px^3 - \frac{3}{4}Pax^2, \quad EIy_2 = \frac{1}{12}Px^3 - \frac{3}{4}Pax^2 + C_1x + C_2$$

ヒンジを持つ固定はり（ゲルバーはり）のたわみ（つづき）

ただし，点A（$x=0$）でのたわみ，たわみ角が $y_{\mathrm{A}} = y_1(0) = 0$，$y'_{\mathrm{A}} = y'_1(0) = 0$ という条件を用いて，AC 間の表式 $y_1(x)$ と，$y'_1(x)$ の積分定数は 0 とした．

CB 間の表式 $y_2(x)$ と，$y'_2(x)$ に現れる C_1 と，C_2 は，点B（$x=5a$）でのたわみについて $y_2(5a)=0$ の条件，および，ヒンジ部（点C）でたわみが連続 $y_1(3a) = y_2(3a) = 0$ という条件から決定することができる．

次に，BD 間について考える．曲げモーメント分布は，

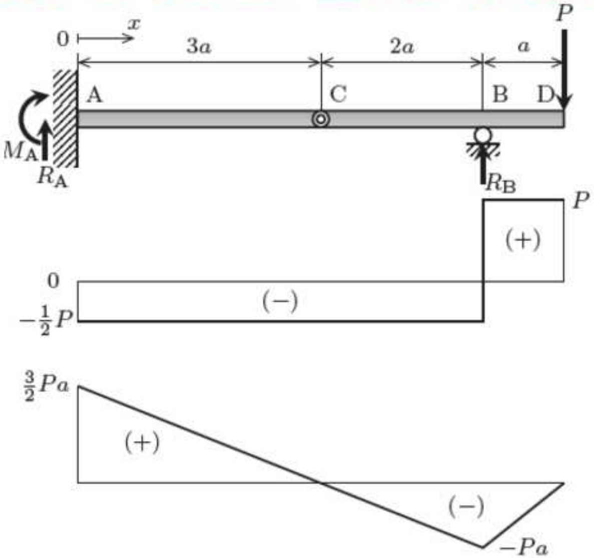
$$M(x) = P(x-6a)$$

たわみ方程式（添字 3 をつける）は，

$$EIy''_3 = -Px + 6Pa$$

積分し，点B でのたわみ $y_3(5a)=0$ と，たわみ角の連続性 $y'_2(5a) = y'_3(5a)$ から，積分定数を決定することができ，最終的に区分多項式の形でたわみ角分布，たわみ曲線を得ることができる．

ヒンジを持つ固定はり（ゲルバーはり）のたわみ
特異関数法と特異関数の応用



外力が作用しないヒンジ部では，たわみは連続，たわみ角は不連続，曲げモーメントは 0（連続），せん断力は連続である．

AD 間全体のせん断力分布，曲げモーメント分布は

$$V(x) = -\frac{1}{2}P + \frac{3}{2}PH(x-5a)$$

$$M(x) = \frac{3}{2}Pa - \frac{1}{2}Px + \frac{3}{2}P\langle x-5a\rangle$$

点 C でのたわみ角の跳躍量を C とすると，$y'(x)$ に $CH(x-3a)$ のような項が含まれると考えることができる．この項は，$y(x)$ には $C\langle x-3a\rangle$ のように連続関数として含まれる[1]．このことを考慮すると，たわみの方程式と，その積分によって得られるたわみ角分布の方程式，たわみ曲線の方程式は，

$$EIy''(x) = -\frac{3}{2}Pa + \frac{1}{2}Px - \frac{3}{2}P\langle x-5a\rangle$$

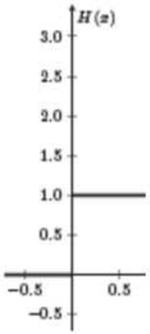
$$EIy'(x) = -\frac{3}{2}Pax + \frac{1}{4}Px^2 + CH(x-3a) - \frac{3}{4}P\langle x-5a\rangle^2$$

$$EIy(x) = -\frac{3}{4}Pax^2 + \frac{1}{12}Px^3 + C\langle x-3a\rangle - \frac{1}{4}P\langle x-5a\rangle^3$$

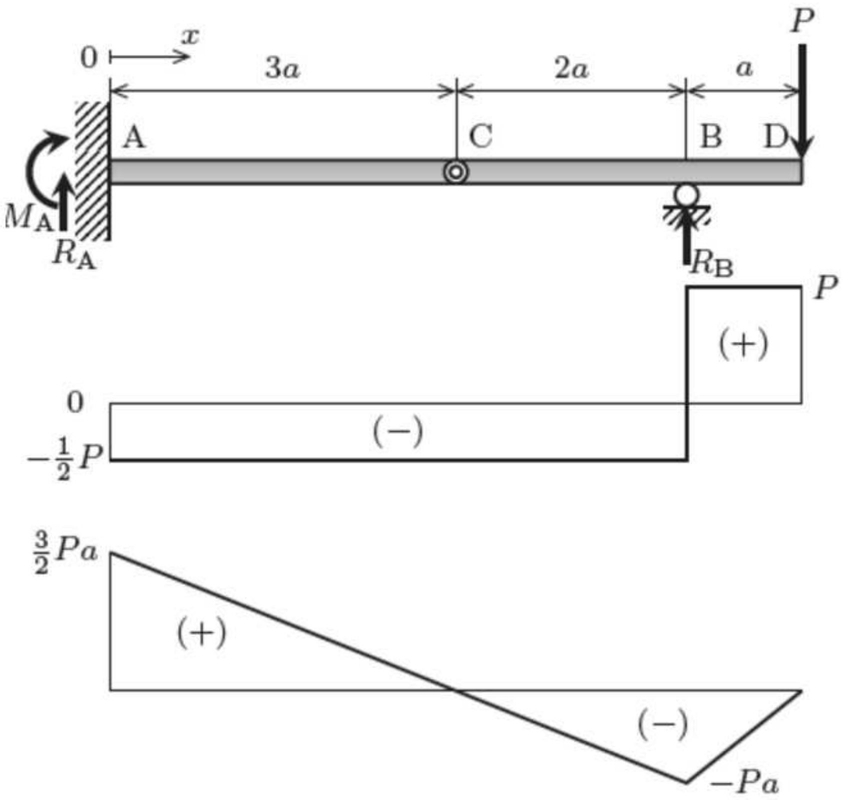
ヘビサイドの階段関数 (Heaviside step function)

$$H(x-a)$$

$$\frac{d}{dx}\langle x-a\rangle = \begin{cases} 0, & (x<a), \\ 1, & (x>a). \end{cases}$$



ヒンジを持つ固定はり（ゲルバーはり）のたわみ 特異関数法と特異関数の応用（つづき）



である．ただし，点 A（$x=0$）でのたわみ，たわみ角が $y_A=y(0)=0$, $y'_A=y'(0)=0$ を用いて，$y'(x)$，$y(x)$ の積分定数は最初から 0 とした．

たわみ角の不連続量 C は，点 B（$x=5a$）で，$y_B=y(5a)=0$ という条件

$$-\frac{3}{4}Pa(5a)^2+\frac{1}{12}P(5a)^3+C(5a-3a)=0$$

から決定することができ，

$$C=\frac{25}{6}Pa^2$$

である．したがって，$\theta(x)=y'(x)$，$y(x)$ は

$$\theta(x)=\frac{P}{EI}\left\{-\frac{3}{2}ax+\frac{1}{4}x^2+\frac{25}{6}a^2H(x-3a)-\frac{3}{4}\langle x-5a\rangle^2\right\}$$

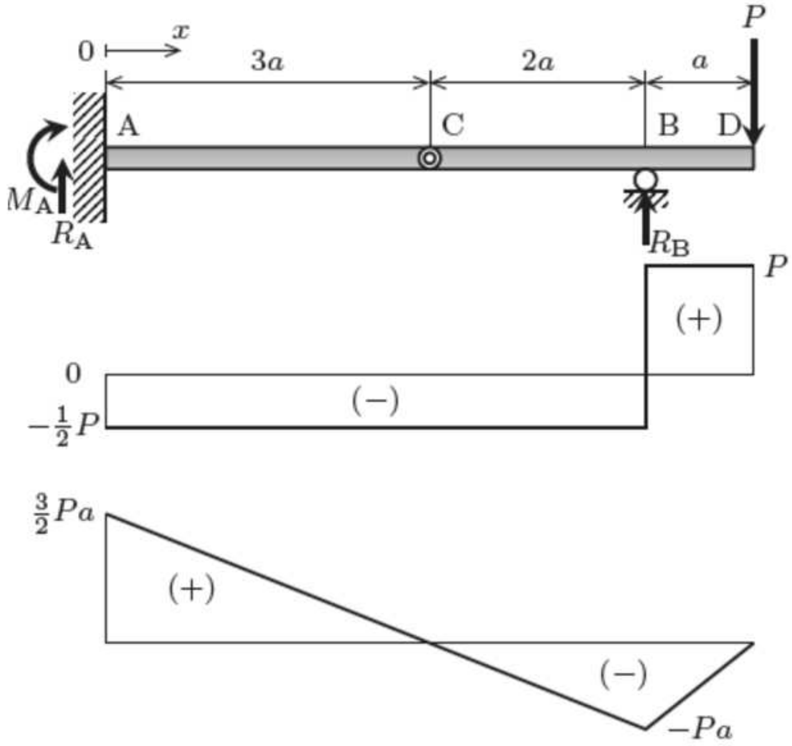
$$y(x)=\frac{P}{EI}\left\{-\frac{3}{4}ax^2+\frac{1}{12}x^3+\frac{25}{6}a^2\langle x-3a\rangle-\frac{1}{4}\langle x-5a\rangle^3\right\}$$

荷重作用点のたわみ y_D は，

$$y_D=y(6a)=\frac{13Pa^3}{4EI}$$

である．

ヒンジを持つ固定はり（ゲルバーはり）のたわみ
カスチリアーノの定理の応用（12章で講義します）



AD 間全体の曲げモーメント分布は，

$$M(x) = \frac{3}{2}Pa - \frac{1}{2}Px + \frac{3}{2}P\langle x - 5a\rangle$$

である．表現を簡単にするために，AB 間については，点 A を原点にして右方向を正に x_1 軸，DB 間については，点 D を原点にして左方向を正に x_2 軸をとると，

$$M_1(x_1) = \frac{1}{2}P(3a - x_1), \quad M_2(x_2) = -Px_2$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial P} = \frac{1}{2}(3a - x_1), \quad \frac{\partial M_2}{\partial P} = -x_2$$

カスチリアーノの定理より，荷重作用点のたわみ y_D は，

$$\begin{aligned} y_D = \frac{\partial U_c}{\partial P} &= \int_0^{5a} \frac{M_1}{EI}\frac{\partial M_1}{\partial P}dx_1 + \int_0^{a} \frac{M_2}{EI}\frac{\partial M_2}{\partial P}dx_2 \\ &= \frac{P}{EI}\left\{\int_0^{5a} \frac{1}{4}(x_1 - 3a)^2 dx_1 + \int_0^{a} x_2^2 dx_2\right\} \\ &= \frac{Pa^3}{EI}\left\{\frac{8}{12} + \frac{27}{12} + \frac{1}{3}\right\} = \frac{13Pa^3}{4EI} \end{aligned}$$

となる．このように，ヒンジ部のたわみ角の不連続条件を陽に考えることなくたわみを求めることができるカスチリアーノの定理がこの問題においては非常に有効であることがわかる．

たわみの方程式の解法（不静定問題）

静定問題については講述しました

要素技術（レベル１の技術）

直接積分法（たわみの方程式を出発点）

直接積分法（たわみの基礎式を出発点）

モーメント面積法

エネルギー法（12章）

・・・

有用なテクニック（レベル２の技術）

重ね合せの原理を用いる方法

特異関数を用いる方法

ミオソテス法

・・・

現在公開可能な情報

不静定問題と支点等による拘束数の変化

模式図	支持等の呼び名	支点等による拘束数の変化 N_{Q} の変化
	自由端	0 (0)
	固定支持	+2(+1)
	回転支持	+1(+1)
	移動支持	+1(0)
	ヒンジ	-1(0)
	はり途中の移動支持（または回転支持）	+1(0)

( )は水平方向の拘束に関するもの
（一般に、曲げ変形とは独立している）

冗長度 (degree of redundancy)
不静定次数 N_{R}
未知反力の総数 N_{Q}

$$N_{\mathrm{R}} = N_{\mathrm{Q}} - 3$$

適合条件をつりあい式で表現

そのためには

応力–ひずみ関係
構成関係式 (constitutive relation)

を考える必要がある。

不静定はりの解法の例

未知反力の総数

$$N_{\mathrm{Q}} = 4$$

不静定次数

$$N_{\mathrm{R}} = N_{\mathrm{Q}} - 3 = 1$$

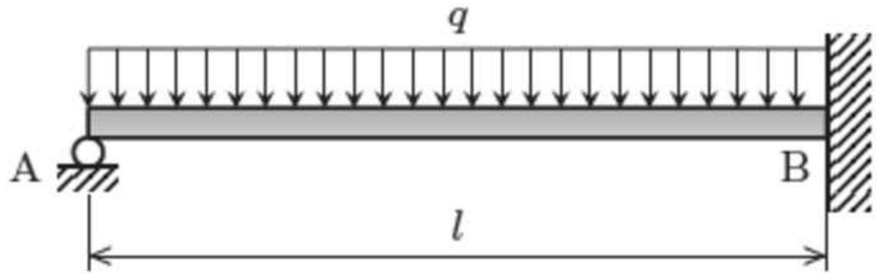


図 8.1　一様分布荷重を受ける一端固定他端支持はり

ポイント

不静定力というものがあるわけではない。不静定反力（支持点）のどれを不静定力に選んでもよいし、不静定内力（部材のある断面）はどの位置に選んでもいいので、その選択パターンは無限にある。

不静定次数の数だけの独立な量を不静定力として選択すると、力学状態はその量を用いて一意に表現できる（ただし、この段階ではその量と外力の関係は未決定である）。

力学的な条件を満足する不静定力について、不静定の原因となる幾何学的な条件を満足するものを決定する。

静定問題のたわみの方程式の直接積分法（再掲，復習）

たわみの方程式を二回積分する。得られるのは微分方程式の一般解なので、任意定数を含む

$$\kappa(x) \equiv y''(x) = -\frac{M(x)}{EI}$$
$$\theta(x) \equiv y'(x) = -\int_0^x \frac{M(x_1)}{EI}\,dx_1 + C_1$$
$$y(x) = -\int_0^x \int_0^{x_2} \frac{M(x_1)}{EI}\,dx_1 dx_2 + C_1 x + C_2$$

任意定数が2つ現れるイメージをつかんでもらうためにこのように表記してみたが、3行目の式は実際はたわみの方程式にもどって重積分をするわけではない

$$\kappa(x) \equiv y''(x) = -\frac{M(x)}{EI}$$
$$\theta(x) \equiv y'(x) = \int_0^x y''(x_1)\,dx_1 + C_1$$
$$y(x) = \int_0^x y'(x_1)\,dx_1 + C_2$$

こちらの手順の方が、実際に行う計算のイメージに近い。３行目の式には、任意定数C_1も含まれることになるが、2行目の式で、たわみ角の条件式からC_1を決定した後に3行目の積分を行う。

上記は、積分により得られる関数を x の関数とするために、x_1（および x_2）などのダミー変数を用いて数学的に混乱のない形で表記しているため、かえってわかりにくいかもしれない

実際には、$M(x)$ が具体的な関数で与えられており、積分の都度、被積分関数の原始関数に任意定数を付加するという手順になる

たわみの方程式からの直接積分

ある不静定内力（部材のある断面）、あるいは不静定反力（支持点）の決定は後回しにして、未知数のまま、曲げモーメント分布を表現する。

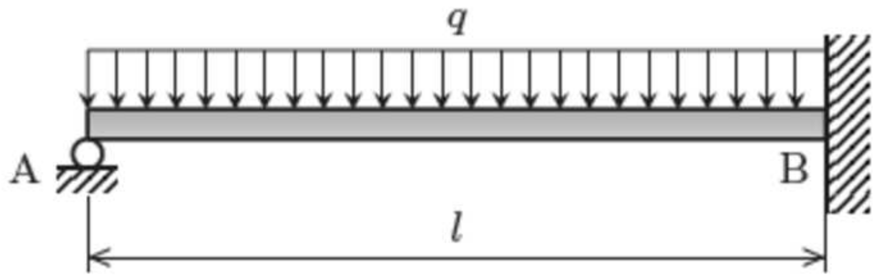
つまり、曲げモーメント分布は外力と不静定力と構造を特徴付ける寸法と座標の関数。

たわみの方程式

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M(x) \qquad (6.7)\ (8.1)$$

を積分する。

積分定数だけでなく不静定力を幾何学的な条件から決定する。



ポイント

不静定次数に等しい個数の未知数は力・モーメントの釣り合いだけからは決定することができない。

2つの積分定数を決定するための幾何条件は静定問題と同様である。

不静定の原因はそもそも冗長な幾何学的な拘束にあるので、不静定力を決定するための追加の幾何学的な条件式必ず存在する。

たわみの方程式とたわみの基礎式

幾何の世界

たわみ曲線 $y(x)$

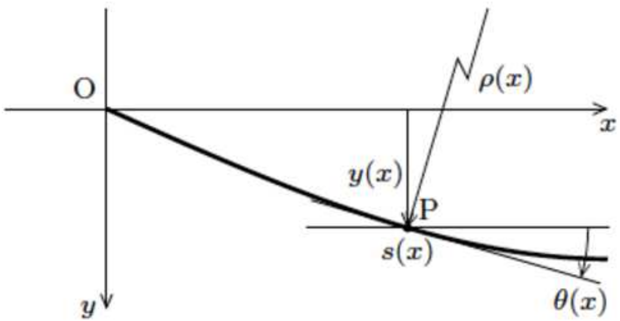
微分

たわみ角 $\theta = \dfrac{dy}{dx}$

微分

曲率

$$\kappa = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{\rho}$$



たわみの方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}$$

微分

EIが一定の場合

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{dM}{dx} = -V(x)$$

微分

たわみの基礎式

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{d^2M}{dx^2} = -\frac{dV}{dx} = q(x)$$

力の世界

曲げモーメント

$M(x)$

微分

$$\frac{dM}{dx} = V(x)$$ せん断力

微分

$$\frac{dV}{dx} = -q(x)$$

横荷重（分布荷重）に負号をつけたもの

たわみの基礎式からの直接積分

たわみの基礎式

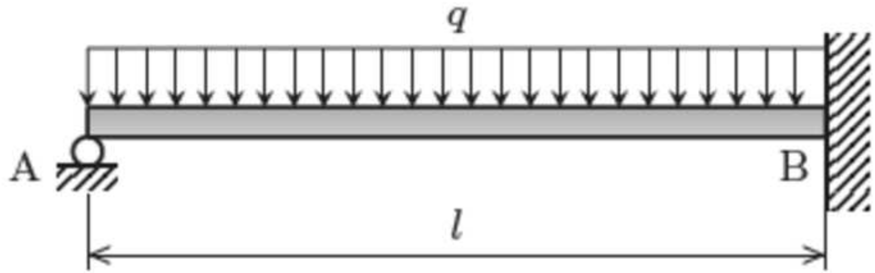
$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = q(x) \quad (6.10)\ (8.2)$$

を積分する。

境界条件に依らずに成り立つので、出発点では静定問題と不静定問題を区別する必要がない。

積分によって積分定数が現れる。また、区分的に積分定数の値に違いがあり、適切に表現する工夫が必要な場合がある（ヒンジや支点での力学的条件など）。

幾何条件によって積分定数などの未知量を決定する。



ポイント

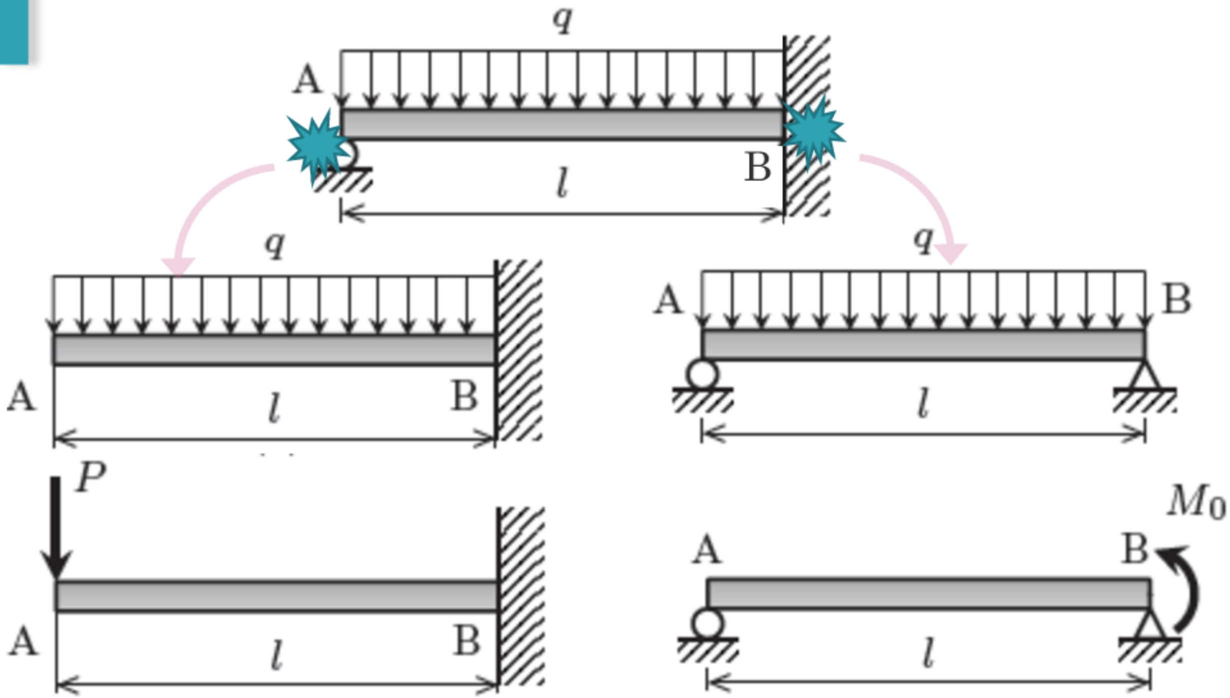
未知量を決定するための条件式は必ず存在する。

たわみやたわみ角を直接計算することができる。

積分の回数が増えることが難点。

式展開の過程で、反力の表現やせん断力分布、曲げモーメント分布は陽には現れないので、これらを求める場合には工夫が必要になる。

重ね合わせの原理



もとの拘束：点Aのたわみ

静定問題：片持ちはり

不静定力：点Aの反力

→　点Aに作用する集中荷重

もとの拘束：点Bのたわみ角

静定問題：単純支持はり

不静定力：点Bの支持モーメント

→　点Bに作用するモーメント

拘束を除去（すなわち、移動支持の拘束を除去）して静定問題にする。

(1)外力 負荷条件下での力学問題と、(2)除去した拘束に対応する力が作用する問題の重ね合わせで表現

除去する前の拘束を表す幾何条件を満足する不静定力を決定する。

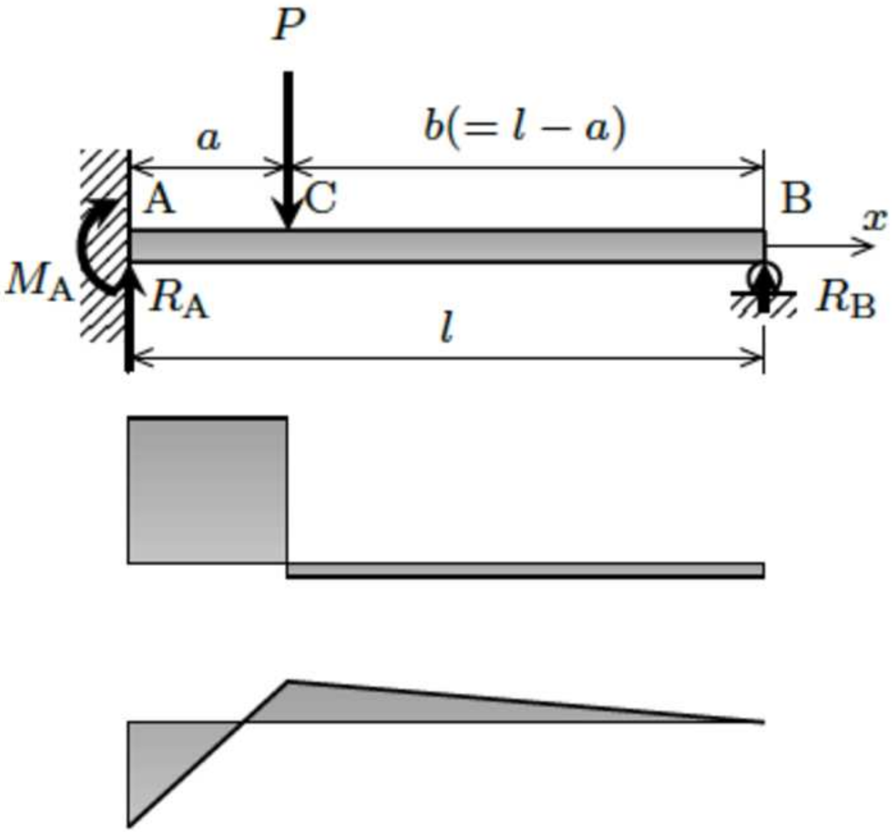
ポイント

切断法の極意：斬鉄！

支点の呪縛からの解放

不静定内力・不正定反力の見える化

例題：集中荷重を受ける一端固定他端移動支持されたはり



はりの問題では，力・モーメントのつり合いを考えて得られる独立な方程式はの2 つである．

図の問題は，点A の支持反力 R_A，支持モーメント M_A，点B の支持反力 R_B の3つの未知反力がある．2つのつり合いの関係式に対して，未知数が3つあるので，方程式の数が1つ不足している．つまり，不静定次数が1 次の不静定問題である．

鉛直方向の力のつり合いに加えて，モーメントのつり合いを考えると（着目する点はどこでもよいが，例えば，ここでは点B に関するモーメントを考えると）次式を得る．

$$\begin{cases} P - R_{\mathrm{A}} + R_{\mathrm{B}} = 0 \\ M_{\mathrm{A}} + R_{\mathrm{A}} l - Pb = 0 \end{cases}$$

この問題について，くるしまぎれに，別の点（例えば点A）に関するモーメントのつり合いなどを考えて，

$$\begin{cases} P - R_{\mathrm{A}} + R_{\mathrm{B}} = 0 \\ M_{\mathrm{A}} + R_{\mathrm{A}} l - Pb = 0 \\ M_{\mathrm{A}} + Pa - R_{\mathrm{B}} l = 0 \end{cases}$$

として，問題を解けるようにしようと考えるひとがいるが，意味をなさない．第2 式と第3 式の辺々で差をとると，第1 式と等価になることから，この連立方程式は解は一意に定まらない．

例題：直接積分法（たわみの方程式から始める方法）

点Aの支持反力を$X = R_{\mathrm{A}}$と置くと，力のつり合いと，モーメントのつり合いから，次式となる．

$$R_{\mathrm{B}} = P - X, \quad M_{\mathrm{A}} = Pb - Xl$$

せん断力分布，および曲げモーメント分布は，

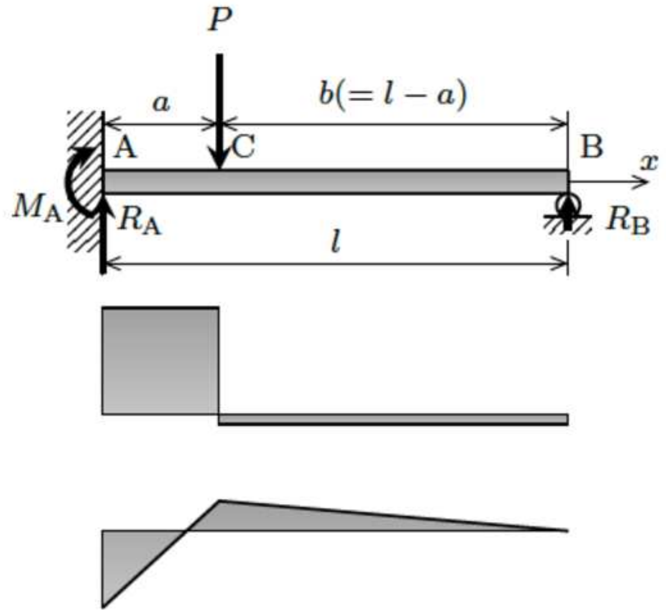
$$V(x) = X - PH(x-a), \quad M(x) = Pb - Xl + Xx - P\langle x-a \rangle$$

たわみの方程式，およびその積分は，C_1，C_2を積分定数とすると次式となる．

$$EIy'' = -Pb + Xl - Xx + P\langle x-a \rangle$$

$$EIy' = EI\theta = -Pbx + Xlx - \frac{1}{2}Xx^2 + \frac{1}{2}P\langle x-a \rangle^2 + C_1$$

$$EIy = -\frac{1}{2}Pbx^2 + \frac{1}{2}Xlx^2 - \frac{1}{6}Xx^3 + \frac{1}{6}P\langle x-a \rangle^3 + C_1x + C_2$$



付帯条件は，　$y'(0) = 0$，$y(0) = 0$，$y(l) = 0$　である．

$y'(0) = 0$，$y(0) = 0$　より　$C_1 = 0$，$C_2 = 0$　また，$y(l) = 0$　より，

$$-\frac{1}{2}Pbl^2 + \frac{1}{2}Xl^3 - \frac{1}{6}Xl^3 + \frac{1}{6}Pb^3 = 0$$

これを，Xについて解くと，

$$X = R_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}\frac{b}{l}\left\{3 - \left(\frac{b}{l}\right)^2\right\}P \qquad R_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{l}\right)^2\left(3 - \frac{a}{l}\right)P \qquad M_{\mathrm{A}} = -\frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{b}{l}\right)^2\right\}bP$$

例題：直接積分法（たわみの基礎式から始める方法）

たわみの基礎式，およびその積分は，C_1，C_2，C_3，C_4 を積分定数とすると次式となる．

$$EIy^{(4)} = P\delta(x-a)$$

$$EIy^{(3)} = PH(x-a) + C_1$$

$$EIy'' = P\langle x-a\rangle + C_1 x + C_2$$

$$EIy' = EI\theta = \frac{1}{2}P\langle x-a\rangle^2 + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

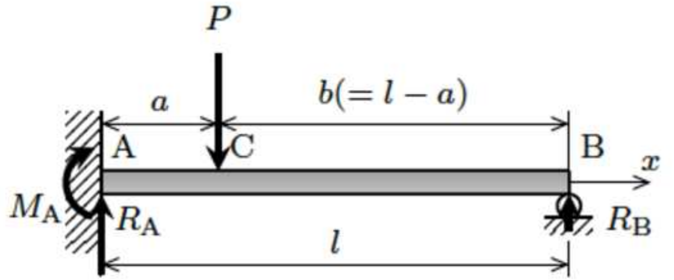
$$EIy = \frac{1}{6}P\langle x-a\rangle^3 + \frac{1}{6}C_1 x^3 + \frac{1}{2}C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$

付帯条件は，$y'(0)=0$，$y(0)=0$，$y(l)=0$，$y''(l)=0$ である．

$y(l)=0$，$y''(l)=0$ より，$C_3=0$，$C_4=0$ である．

$y'(0)=0$，$y(0)=0$ は，$b=l-a$ を用いて，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{6}Pb^3 + \dfrac{1}{6}l^3 C_1 + \dfrac{1}{2}l^2 C_2 = 0 \\ Pb + lC_1 + C_2 = 0 \end{cases}$$



これを解くと，

$$C_1 = -\frac{1}{2}\frac{b}{l}\left\{3-\left(\frac{b}{l}\right)^2\right\}P, \quad C_2 = \frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{b}{l}\right)^2\right\}bP$$

点A の支持モーメントM_A，点A の反力R_A，点B の反力R_B は，それぞれ次式となる．

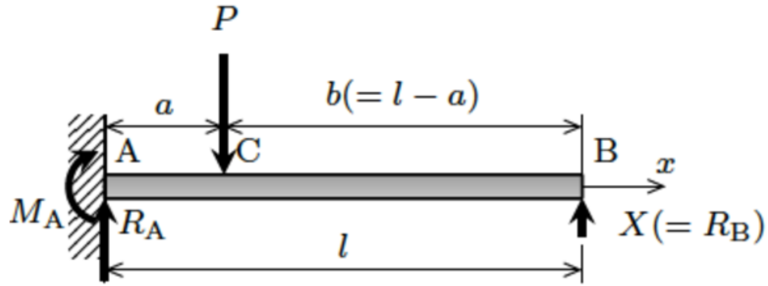
$$M_A = -EIy''(0) = -C_2 = -\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{b}{l}\right)^2\right\}bP$$

$$R_A = -EIy^{(3)}(0) = -C_1 = \frac{1}{2}\frac{b}{l}\left\{3-\left(\frac{b}{l}\right)^2\right\}P$$

$$R_B = EIy^{(3)}(l) = PH(l-a) + C_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{l}\right)^2\left(3-\frac{a}{l}\right)P$$

例題：モーメント面積法（片持ちはりの考え方）

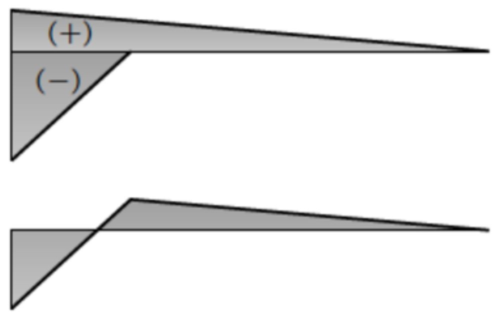
点B の支点を取り除き，支点反力 R_{B} に相当する横荷重 X を上向き（y 軸負の方向）に加えた問題を考えて，区間AB にモーメント面積法を適用する．点B の点A に対する接線たわみ t_{BA} は，点B が点A の接線からどれだけ上方に（y 軸負の方向に）あるかを表しており，次式となる．



$$t_{\mathrm{BA}} = \bar{x}_{\mathrm{B}}\mathcal{A} = \left(b + \frac{2}{3}a\right) \cdot \left\{\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{Pa}{EI}\right) \cdot a\right\} + \frac{2}{3}l \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{Xl}{EI} \cdot l\right)$$

一方，

1. 点A は固定支持されているので，点A のたわみ角A は0 である．すなわち点A の接線は水平線であり，変形前の点B を通る．
2. 点B は支点を取り除いて自由に変位できる問題として考えているが，もともと本来の問題設定では移動支持されており，点B のたわみ y_{B} は本来は0 である．



から，$t_{\mathrm{BA}} = -y_{\mathrm{B}} = 0$ を満たさなければならない．

これをX について解いて，

$$X = R_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{l}\right)^2\left(3 - \frac{a}{l}\right)P \qquad R_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}\frac{b}{l}\left\{3 - \left(\frac{b}{l}\right)^2\right\}P \qquad M_{\mathrm{A}} = -\frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{b}{l}\right)^2\right\}bP$$

例題：モーメント面積法（単純支持はりの考え方）

点A の支持を固定支持から回転支持に変更し，支持モーメント M_{A} に相当する集中モーメント X を時計回りの方向に加えた問題を考えて，区間AB にモーメント面積法を適用する．点B の点A に対する接線たわみ t_{BA} は，点B が点A の接線からどれだけ上方に（y 軸負の方向に）あるかを表しており，次式となる．

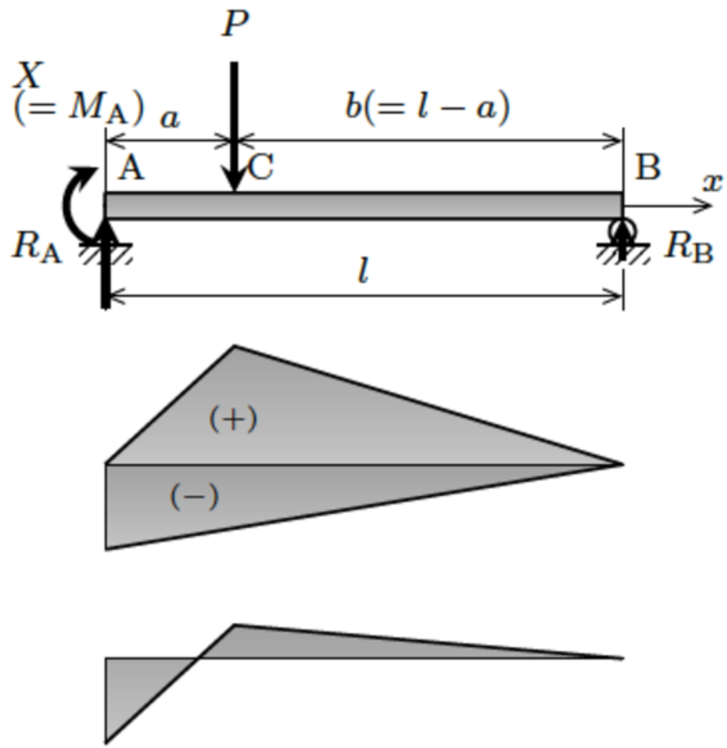
$$t_{\mathrm{BA}} = \bar{x}_{\mathrm{B}}\mathcal{A} = \left(b+\frac{1}{3}a\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{Pab}{EIl}\cdot a\right)+\frac{2}{3}b\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{Pab}{EIl}\cdot b\right)+\frac{2}{3}l\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{X}{EI}\cdot l\right)$$

1. 点B は移動支持されており点B のたわみ y_{B} は0 である．
2. 点A は回転支持に変更しているため自由に回転できる問題として考えているが，もともと本来の問題設定では固定支持されており点A のたわみ角A は0 である．すなわち点A の接線は水平線であり，点B を通る．

から，$t_{\mathrm{BA}} = -y_{\mathrm{B}} = 0$ を満たさなければならない．これを X について解いて，

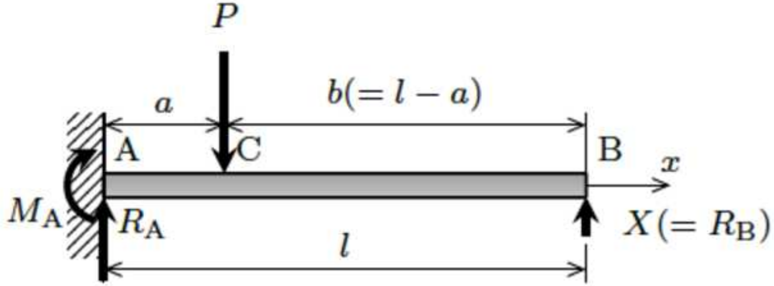
$$X = M_{\mathrm{A}} = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{b}{l}\right)\frac{ab}{l}P$$

$$R_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}\frac{b}{l}\left\{3-\left(\frac{b}{l}\right)^2\right\}P \qquad R_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{l}\right)^2\left(3-\frac{a}{l}\right)P$$



例題：重ね合わせの原理による方法（片持ちはりの解を利用）

点B の支点を取り除き，支点反力 R_{B} に相当する横荷重 X を上向き（y 軸負の方向）に加えた問題を考える．

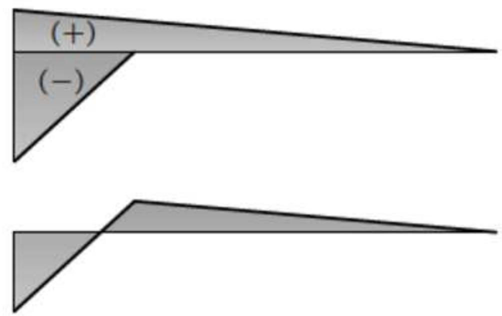


点C に集中荷重P が作用する問題1 の点B のたわみは，
材料力学 p.112，式(6.17) より，

$$y_{\mathrm{Prob.1,B}} = y_{\mathrm{Prob.1}}(l) = \frac{Pa^2(3l-a)}{6EI}$$

点B に集中荷重 $-X$ が作用する問題2 の点B のたわみは，
材料力学 p.111，式(6.14) において $P=-X$ とおくことにより，

$$y_{\mathrm{Prob.2,B}} = y_{\mathrm{Prob.2}}(l) = -\frac{Xl^3}{3EI}$$



点B は支点を取り除いて自由に変位できる問題として考えているが，もともと本来の問題設定でははは移動支持されており，点B のたわみ y_{B} は本来は0 である．すなわち，問題1 と問題2 の解の重ね合わせた解が，次式を満たす．

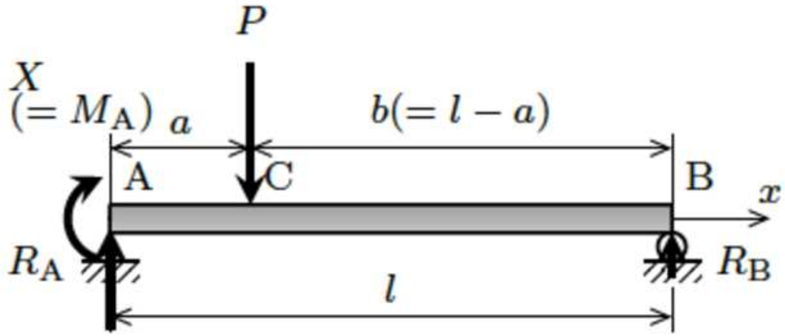
$$y_{\mathrm{B}} = y_{\mathrm{Prob.1,B}} + y_{\mathrm{Prob.2,B}} = 0$$

これを X について解いて，

$$X = R_{\mathrm{B}} = \left(\frac{a}{l}\right)^2\left(3-\frac{a}{l}\right)P \qquad R_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}\frac{b}{l}\left\{3-\left(\frac{b}{l}\right)^2\right\}P \qquad M_{\mathrm{A}} = -\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{b}{l}\right)^2\right\}bP$$

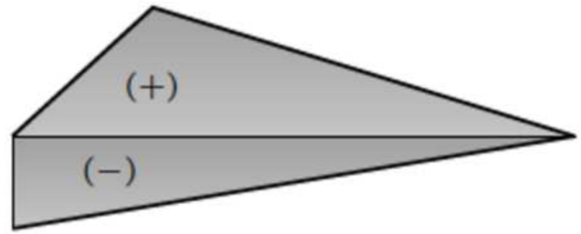
例題：重ね合わせの原理による方法（単純支持はりの解を利用）

点A の支持を固定支持から回転支持に変更し，支持モーメント M_{A} に相当する集中モーメント X を時計回りの方向に加えた問題を考える．



点C に集中荷重 P が作用する問題1 の点A のたわみ角は，
材料力学 p.114 式$(6.27)_1$ より，

$$\theta_{\mathrm{Prob.1,A}} = \theta_{\mathrm{Prob.1}}(0) = \frac{Pab(l+b)}{6EIl}$$

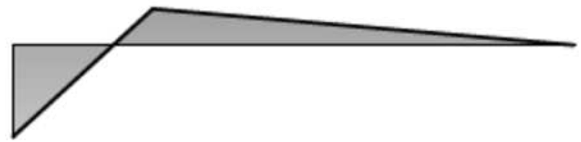


点A にモーメントXが作用する問題2 の点A のたわみ角は，
材料力学 p.117 式$(6.43)_1$ において $M_{\mathrm{A}} = X$，$M_{\mathrm{B}} = 0$　とおくと，

$$\theta_{\mathrm{Prob.2,A}} = \theta_{\mathrm{Prob.2}}(0) = \frac{Xl}{3EI}$$

点A は回転支持に変更しているため自由に回転できる問題として考えているが，もともと本来の問題設定では固定支持されており点A のたわみ角 θ_{A} は0 である．すなわち，問題1 と問題2 の解の重ね合わせた解が，次式を満たす．

$$\theta_{\mathrm{A}} = \theta_{\mathrm{Prob.1,A}} + \theta_{\mathrm{Prob.2,A}} = 0$$



これを X について解いて，

$$X = M_{\mathrm{A}} = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{b}{l}\right)\frac{ab}{l}P \quad R_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}\frac{b}{l}\left\{3-\left(\frac{b}{l}\right)^2\right\}P \quad R_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{l}\right)^2\left(3-\frac{a}{l}\right)P$$

次回

材料力学2025 シーズン 2

第７話　複雑なはりの問題　後編

2025年6月27日（金）

Coming Soon . . .