材料力学2025 シーズン 2

第４話　はりのたわみ 後編

2025年6月17日（火）

中谷 彰宏

教科書「渋谷陽二，中谷彰宏，材料力学，(2017)，コロナ社」
1, 2, 3, 4, 10, 11章（春学期の授業）を学習し終えて、
5, 6, 7, 8, 9, 12, 13章（夏学期の授業）をこれから学ぶ諸君のために

たわみの方程式（再掲、復習）

たわみの方程式
（equation of deflection）

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}$$

たわみの2階微分と曲げモーメントの関係
曲げ剛性を比例定数とする

曲率とたわみの2階微分の関係

$$\kappa = \frac{d^2y}{dx^2} \qquad (6.5)$$

曲率と曲率半径の関係

$$\kappa = -\frac{1}{\rho} \qquad (5.2)$$

曲率半径と曲げモーメントの関係

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} \qquad (5.11)$$

$$M(x)$$

曲げモーメント

$$\frac{1}{\rho}$$

曲率半径の逆数

力の世界と幾何の世界をつなぐ
材料の（ばね的な）関係性

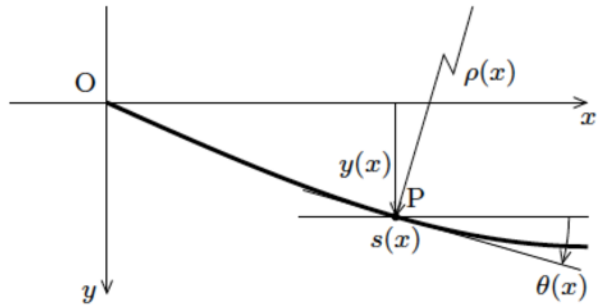
力の世界

幾何の世界

たわみの方程式の境界値問題
（再掲、復習）

たわみの方程式
（equation of deflection）

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}$$



たわみ $y(x)$ を未知関数とする2階常微分方程式

曲げモーメント分布 $M(x)$ は、力学的平衡の条件のみから求めることができる（ただし静定問題の場合に限られる）

ヤング率 E は材料定数として与えられる（問題によっては x の関数$E(x)$ ）

断面二次モーメント I は既知
（断面形状によって決まる。問題によっては x の関数 $I(x)$ ）

組合せはりなど、より一般的な場合には、EI のかわりに、
等価曲げ剛性 D が必要（そして、さらに問題によっては x の関数 $D(x)$）

一般解は任意定数を2つ含む。解を一意に決定するためには、付帯条件が2つ必要
通常は支持点でのたわみやたわみ角が解を一意に決定する条件として与えられる

たわみの方程式とたわみの基礎式（再掲，復習）

幾何の世界

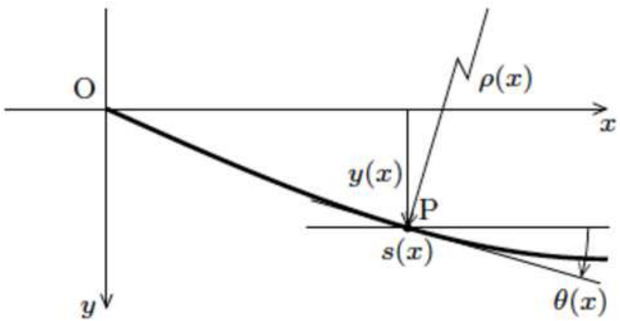
たわみ曲線 $y(x)$

↓ 微分

たわみ角 $\theta = \dfrac{dy}{dx}$

↓ 微分

曲率 $\kappa = \dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{1}{\rho}$



たわみの方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}$$

↓ 微分　EIが一定の場合

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{dM}{dx} = -V(x)$$

↓ 微分

たわみの基礎式

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{d^2M}{dx^2} = -\frac{dV}{dx} = q(x)$$

力の世界

曲げモーメント

$M(x)$

↓ 微分

$\dfrac{dM}{dx} = V(x)$ せん断力

↓ 微分

$\dfrac{dV}{dx} = -q(x)$

横荷重（分布荷重）に負号をつけたもの

付帯条件（支持条件）：○が既知：一般には0（ゼロ）に規定（再掲，復習）

模式図	支持等の 呼び名	y	$\theta = \dfrac{dy}{dx}$	$\kappa = \dfrac{d^2y}{dx^2}$	$\dfrac{d^3y}{dx^3}$
	自由端	未知	未知	○	○
	固定支持	○	○	未知	未知
	回転支持	○	未知	○	未知
	移動支持	○	未知	○	未知
	ヒンジ	未知：左右で 連続	未知：一般に 不連続	○：一般に0	未知：左右で 連続
	はり途中の 移動支持（また は回転支持）	○	未知：左右で 連続	未知：左右で 連続	未知：一般に 不連続

（曲げモーメント）　（せん断力）

たわみの方程式の直接積分法（再掲，復習）

たわみの方程式を二回積分する。得られるのは微分方程式の一般解なので、任意定数を含む

$$\kappa(x) \equiv y''(x) = -\frac{M(x)}{EI}$$

$$\theta(x) \equiv y'(x) = -\int_0^x \frac{M(x_1)}{EI}\,dx_1 + C_1$$

$$y(x) = -\int_0^x \int_0^{x_2} \frac{M(x_1)}{EI}\,dx_1 dx_2 + C_1 x + C_2$$

任意定数が2つ現れるイメージをつかんでもらうためにこのように表記してみたが、3行目の式は実際はたわみの方程式にもどって重積分をするわけではない

$$\kappa(x) \equiv y''(x) = -\frac{M(x)}{EI}$$

$$\theta(x) \equiv y'(x) = \int_0^x y''(x_1)\,dx_1 + C_1$$

$$y(x) = \int_0^x y'(x_1)\,dx_1 + C_2$$

こちらの手順の方が、実際に行う計算のイメージに近い。 3 行目の式には、任意定数C_1も含まれることになるが、2行目の式で、たわみ角の条件式からC_1を決定した後に3行目の積分を行う。

上記は、積分により得られる関数を x の関数とするために、x_1（および x_2）などのダミー変数を用いて数学的に混乱のない形で表記しているため、かえってわかりにくいかもしれない

実際には、$M(x)$ が具体的な関数で与えられており、積分の都度、被積分関数の原始関数に任意定数を付加するという手順になる

たわみの方程式の解法（静定問題）

要素技術（レベル１の技術）

直接積分法（たわみの方程式を出発点）

直接積分法（たわみの基礎式を出発点）

前回はここまで講述しました

モーメント面積法

エネルギー法（12章）

・・・

有用なテクニック（レベル２の技術）

重ね合せの原理を用いる方法

特異関数を用いる方法

ミオソテス法

演習で説明があるので講述項目に追加

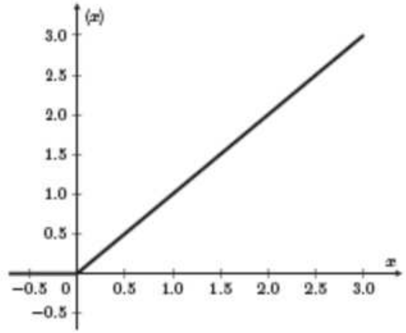
・・・

特異関数（その微積分のルール）

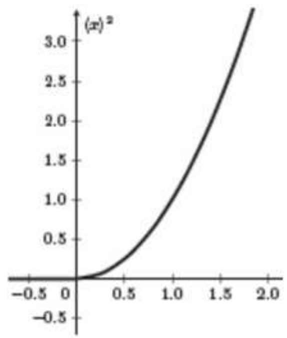
マコーレーの括弧 (Macauley brackets)

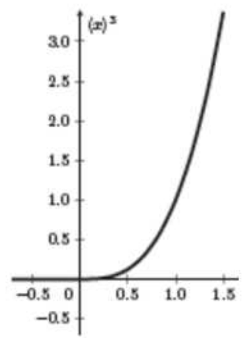
ランプ関数 (ramp function)

$$\langle x \rangle = \begin{cases} 0, & (x \leqq 0), \\ x, & (x > 0). \end{cases} \tag{6.51}$$



$$\langle x - a \rangle^n = \begin{cases} 0, & (x \leqq a), \\ (x-a)^n, & (x > a). \end{cases} \tag{6.52}$$





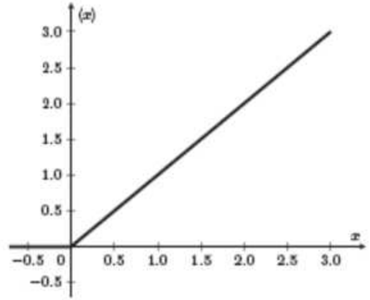
$$\int \langle x - a \rangle^n dx = \frac{\langle x - a \rangle^{n+1}}{n+1} + C, \tag{6.53}$$

$$\frac{d}{dx} \langle x - a \rangle^{n+1} = (n+1) \langle x - a \rangle^n \tag{6.54}$$

特異関数と超関数　マコーレーの括弧 (Macauley brackets)

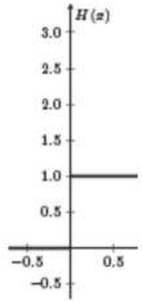
ランプ関数 (ramp function)

$$\langle x \rangle = \begin{cases} 0, & (x \leqq 0), \\ x, & (x > 0). \end{cases}$$



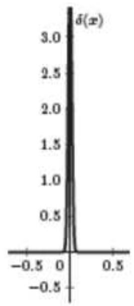
ヘビサイドの階段関数 (Heaviside step function)

$$H(x-a) = \frac{d}{dx}\langle x-a \rangle = \begin{cases} 0, & (x < a), \\ 1, & (x > a). \end{cases}$$



ディラックのデルタ関数 (Dirac delta function)

$$\delta(x-a) = \frac{d}{dx} H(x-a)$$



材料力学で用いるための形式的な表現

数学的な厳密性については、もっと丁寧な検討が必要であることに注意する

固定端と自由端の中間に集中荷重を受ける片持ちはり（材料力学 p.111 例題6.2）場合分けによる解法（再掲，復習）

AC 間 $(0 < x < a)$

$$M_1(x) = P(x-a)$$

$$EIy_1'' = -Px + Pa$$

$$EIy_1' = -\frac{P}{2}x^2 + Pax + C_1$$

$$EIy_1 = -\frac{P}{6}x^3 + \frac{P}{2}ax^2 + C_1x + C_2$$

CB 間 $(a < x < l)$

$$M_2(x) = 0$$

$$EIy_2'' = 0$$

$$EIy_2' = C_3$$

$$EIy_2 = C_3x + C_4$$

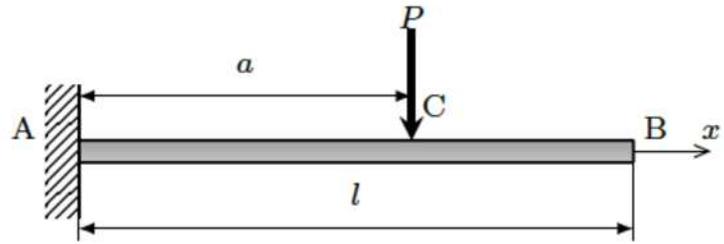


図 6.3　固定端と自由端の中間に集中荷重を受ける片持ちはり

点 A の境界条件 $y_1(0) = 0,\ y_1'(0) = 0$ より　$C_1 = 0,\quad C_2 = 0$

点 C でのたわみ角とたわみの連続条件 $y_1(a) = y_2(a),\ y_1'(a) = y_2'(a)$ より

$$C_3 = \frac{Pa^2}{2},\quad C_4 = -\frac{Pa^3}{6}$$

$$y_1' = \frac{P}{2EI}x(2a-x)$$

$$y_1 = \frac{P}{6EI}x^2(3a-x)$$

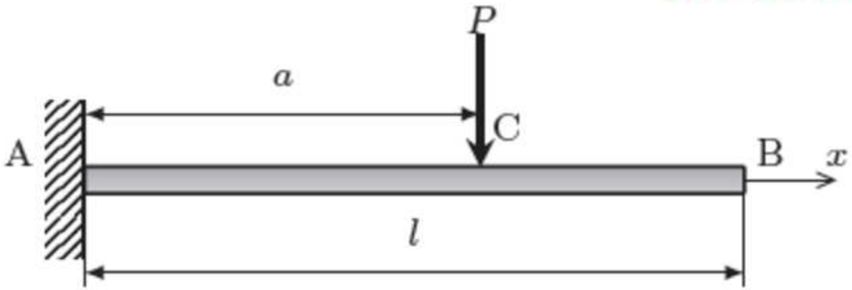
$$y_2' = \frac{P}{2EI}a^2$$

$$y_2 = \frac{P}{6EI}(3x-a)a^2$$

特異関数を用いると場合分けしないで一行にまとめることができる

材料力学 p.111 例題6.2

So cool!



特異関数を用いて表現すると

$$V(x) = P - PH(x-a)$$

$$M(x) = -Pa + Px - P\langle x-a \rangle$$

$$\frac{EI}{P}y'' = a - x + \langle x-a \rangle$$

←ただし1/*P*にしている表現はほめられたものではない！（零割になる場合があるから）

$$\frac{EI}{P}y' = ax - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\langle x-a \rangle^2 + C_1$$

$$\frac{EI}{P}y = \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}\langle x-a \rangle^3 + C_1 x + C_2$$

点 A の境界条件（$y_1(0) = 0$、$y_1'(0) = 0$）より

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0$$

反力、$M_A = Pa$、$R_A = P$ なので

$$q(x) = Pa\delta'(x) - P\delta(x) + P\delta(x-a)$$

$$V(x) = -Pa\delta(x) + PH(x) - PH(x-a)$$

$$M(x) = -PaH(x) + P\langle x \rangle - P\langle x-a \rangle$$

のように議論を出発してもよいが、結局 $0 < x < l$ では、

$$\delta'(x) = 0, \quad \delta(x) = 0, \quad H(x) = 1, \quad \langle x \rangle = x$$

と書き直すことができる。

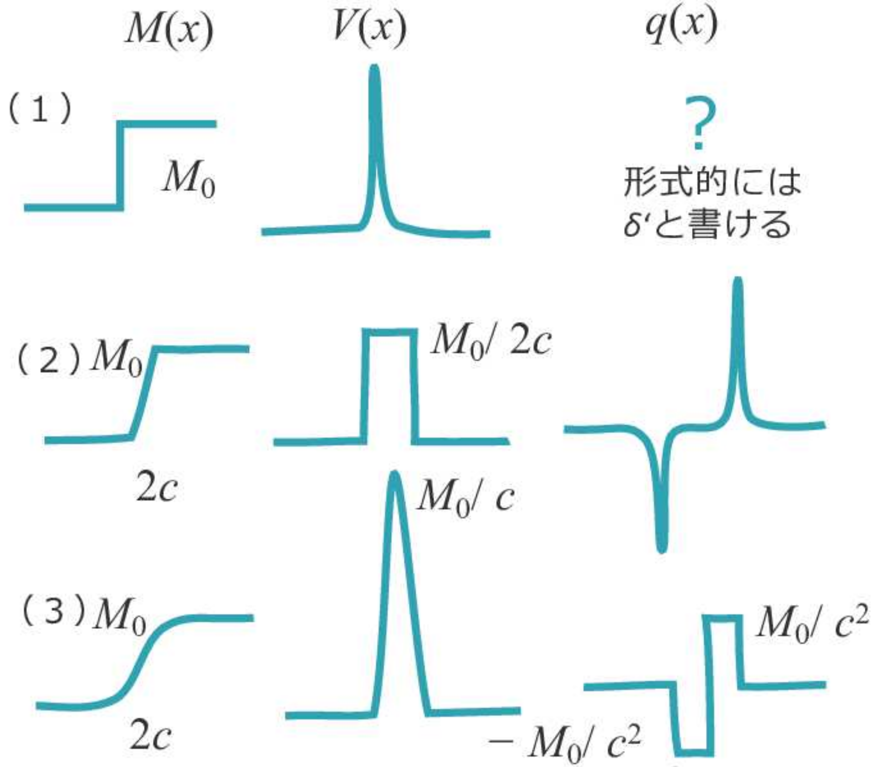
モーメントが作用するはり

材料力学で用いるための形式的な表現
数学的な厳密性については、もっと丁寧な検討が必要であることに注意する

$$\frac{dM}{dx} = V(x) \qquad \frac{dV}{dx} = -q(x)$$

$$H(x-a) \quad \delta(x-a)$$

さらなる微分は？



(1) $x = a$ にモーメント M_0 が作用するはり

$$q(x) = -M_0\delta'(x-a)$$
$$V(x) = M_0\delta(x-a)$$
$$M(x) = M_0H(x-a)$$

$H(x)$、$\delta(x)$ あたりまではイメージしやすいが、$\delta'(x)$ のイメージは湧きにくい。そもそも、曲げモーメント分布に不連続を生じさせるモーメントに対応する分布荷重を想像しにくい。例えば、以下のように考えてみよう。

(2) $x = a - c$ に上向き、$x = a + c$ に上向きに、集中力 $P = M_0/(2c)$ が作用するはり

$$q(x) = -\frac{M_0}{2c}\left\{\delta(x-(a-c)) - \delta(x-(a+c))\right\}$$
$$V(x) = \frac{M_0}{2c}\left\{H(x-(a-c)) - H(x-(a+c))\right\}$$
$$M(x) = \frac{M_0}{2c}\left\{\langle x-(a-c)\rangle - \langle x-(a+c)\rangle\right\}$$

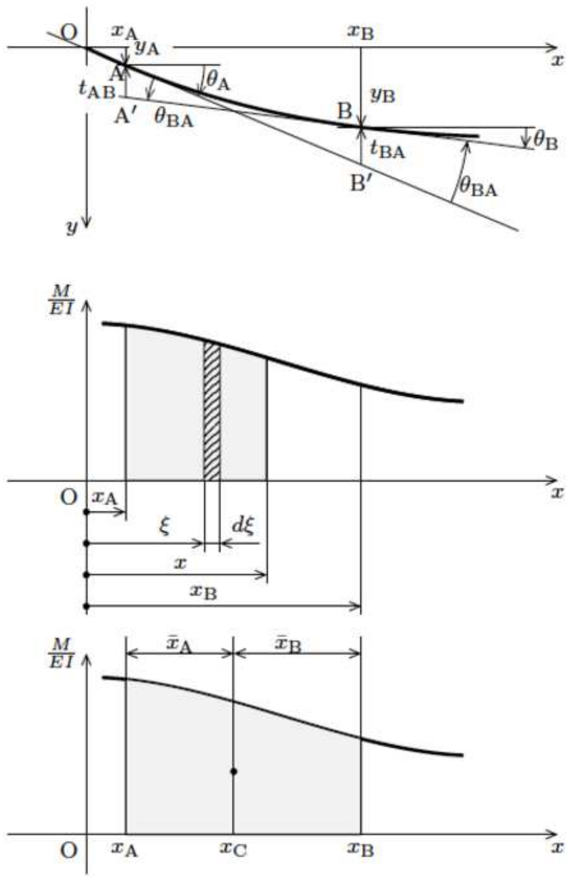
(3) $a - c < x < a$ に上向き、$a < x < a + c$ に下向きに、分布力 $q = M_0/c^2$ が作用するはり

$$q(x) = -\frac{M_0}{c^2}\left\{H(x-(a-c)) - 2H(x-a) + H(x-(a+c))\right\}$$
$$V(x) = \frac{M_0}{c^2}\left\{\langle x-(a-c)\rangle - 2\langle x-a\rangle + \langle x-(a+c)\rangle\right\}$$
$$M(x) = \frac{M_0}{2c^2}\left\{\langle x-(a-c)\rangle^2 - 2\langle x-a\rangle^2 + \langle x-(a+c)\rangle^2\right\}$$

(2), (3) において、M_0 を一定に保ったまま $c \to 0$ の極限を考えると (1) になりそうだということがわかる。

モーメント面積法(Moment-Area Method)

モールの共役はり理論の発展形



手順

1. M/EI 線図を描く
2. 適用区間（AB）を決める
3. 面積$\mathcal{A}$と図心$\bar{x}_A$,$\bar{x}_B$を求める

C. E. Greene (1842–1903)
MIT，ハーバード大出身
ミシガン大学教授

$$\theta_{BA} = -(\theta_B - \theta_A) = \mathcal{A}$$

点Aの接線と点Bの接線のなす角

（点Aの接線を反時計まわりに回転させて
点Bの接線に一致させるための角度）

$$t_{AB} = \bar{x}_A \mathcal{A} \qquad t_{BA} = \bar{x}_B \mathcal{A}$$

点A，点Bの接線たわみ

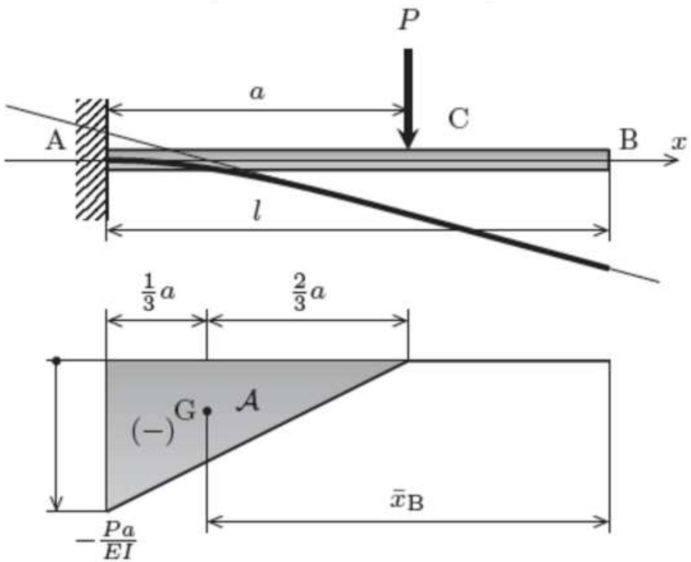
（点Aが，点Bの接線からどれだけ上方にあるか）

（点Bが，点Aの接線からどれだけ上方にあるか）

理解るとパワフルなモーメント面積法♪

特定の点のたわみ角やたわみ。M/EI 線図を計算しやすいように分割
接線たわみなので、適用に工夫が必要（実は楽しい！）
固定端や最大たわみ点（接線が水平になる）を利用
たわみ角が、相対的なたわみ量÷相対距離という裏技も

例題6.2 (材料力学 p.111)



M/EI 線図を描き、AB 間にモーメント面積法を用いると

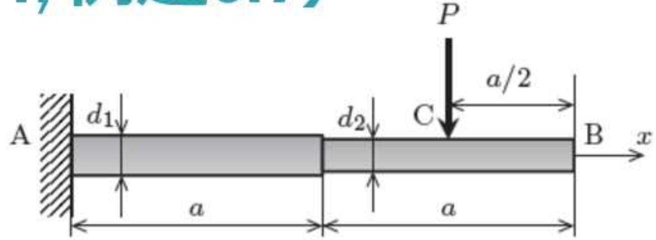
$$\theta_{BA} = \mathcal{A} = \frac{1}{2}\left(-\frac{Pa}{EI}\right)a = -\frac{Pa^2}{2EI},$$

$$t_{BA} = \bar{x}_B\mathcal{A} = \left\{(l-a)+\frac{2}{3}a\right\}\left(-\frac{Pa^2}{2EI}\right) = -\frac{Pa^2}{6EI}(3l-a)$$

点 A は固定支持（$y_A = 0$、$\theta_A = 0$）であることを考慮すると、点 B のたわみ角とたわみは、

$$\theta_B = -\theta_{BA} = \frac{Pa^2}{2EI}, \quad y_B = -t_{BA} = \frac{Pa^2}{6EI}(3l-a)$$

断面が変化するはり（材料力学p.124, 例題6.7）

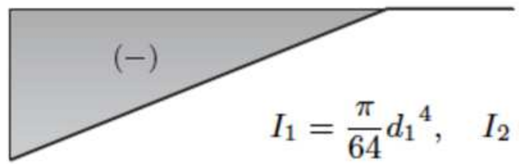


部分領域に分けて面積と図心を考える

$$\mathcal{A}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\frac{Pa}{EI_1}\right)\left(\frac{3}{2}a\right) = -\frac{9}{8}\frac{Pa^2}{EI_1},$$

$$\mathcal{A}^{(2)} = \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{2}\frac{Pa}{E}\left(\frac{1}{I_2}-\frac{1}{I_1}\right)\right\}\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{1}{8}\frac{Pa^2}{E}\left(\frac{1}{I_2}-\frac{1}{I_1}\right)$$

$$\bar{x}_{\mathrm{B}}^{(1)} = \frac{3}{2}a, \quad \bar{x}_{\mathrm{B}}^{(2)} = \frac{5}{6}a$$

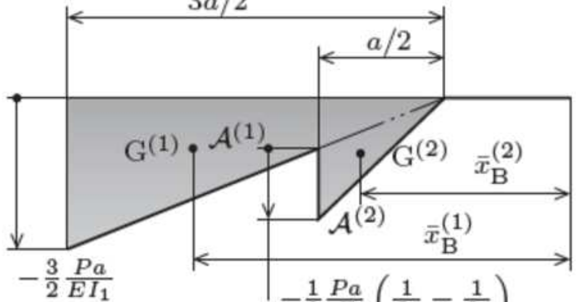


$$I_1 = \frac{\pi}{64}{d_1}^4, \quad I_2 = \frac{\pi}{64}{d_2}^4$$

$$\theta_{\mathrm{BA}} = \mathcal{A}^{(1)} + \mathcal{A}^{(2)} = -\frac{Pa^2}{8E}\left(\frac{8}{I_1}+\frac{1}{I_2}\right)$$

$$= -\frac{8Pa^2}{\pi E}\left(\frac{8}{d_1^4}+\frac{1}{d_2^4}\right) \qquad \theta_{\mathrm{B}} = -\theta_{\mathrm{BA}} = \frac{8Pa^2}{\pi E}\left(\frac{8}{d_1^4}+\frac{1}{d_2^4}\right)$$

部分領域ごとの寄与を考えればよい
（全体領域の図心を陽に求める必要はない）



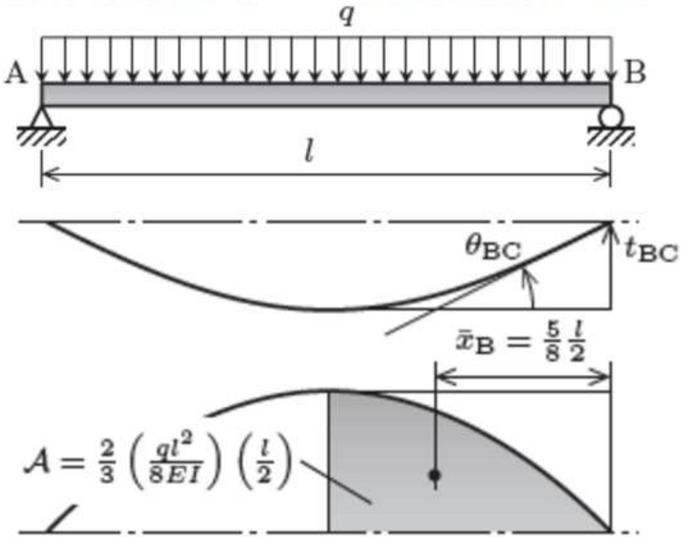
$$t_{\mathrm{BA}} = \mathcal{A}^{(1)}\bar{x}_{\mathrm{B}}^{(1)} + \mathcal{A}^{(2)}\bar{x}_{\mathrm{B}}^{(2)} = -\frac{27}{16}\frac{Pa^3}{EI_1} - \frac{5}{48}\frac{Pa^3}{E}\left(\frac{1}{I_2}-\frac{1}{I_1}\right)$$

$$= -\frac{Pa^3}{48E}\left(\frac{76}{I_1}+\frac{5}{I_2}\right) = -\frac{4Pa^3}{3\pi E}\left(\frac{76}{d_1^4}+\frac{5}{d_2^4}\right).$$

$$y_{\mathrm{B}} = -t_{\mathrm{BA}} = \frac{4Pa^3}{3\pi E}\left(\frac{76}{d_1^4}+\frac{5}{d_2^4}\right).$$

曲げモーメント分布は単純だが
M/EI線図は不連続形状

対称性などから既知の最大たわみ点を利用（材料力学p.125, 例題6.8）



中央点Cのたわみ角は0であることに着眼

$$\theta_{\mathrm{BC}} = \mathcal{A} = \left(\frac{2}{3}\frac{ql^2}{8EI}\frac{l}{2}\right) = \frac{ql^3}{24EI},$$

$$t_{\mathrm{BC}} = \mathcal{A}\bar{x}_{\mathrm{B}} = \left(\frac{ql^3}{24EI}\right)\left(\frac{5}{8}\frac{l}{2}\right) = \frac{5ql^4}{384EI}$$

支点のたわみ角，中央点の最大たわみ

$$\theta_{\mathrm{A}} = -\theta_{\mathrm{B}} = \theta_{\mathrm{BC}} = \frac{ql^3}{24EI}$$

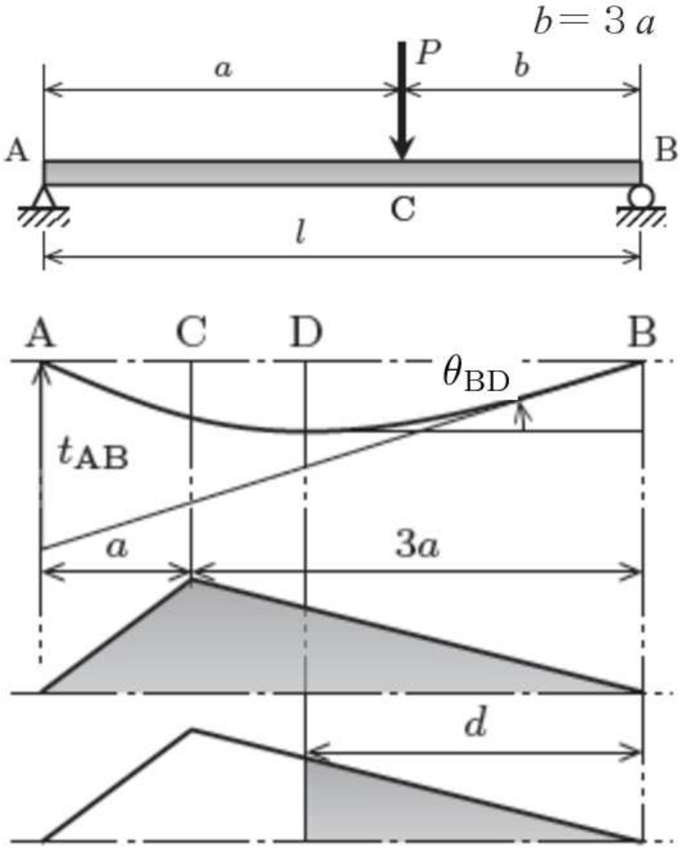
$$y_{\mathrm{C}} = t_{\mathrm{BC}} = \frac{5ql^4}{384EI}$$

5/8チップス

(S&B, 1979-2003)

放物線について：
面積2/3，図心位置5/8
覚えておこう！

最大たわみの位置と値を知る（材料力学p.126, 例題6.9）



AB間

$$t_{AB} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3Pa}{4EI}\cdot a\cdot\frac{2a}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3Pa}{4EI}\cdot 3a\cdot 2a$$
$$= \frac{Pa^3}{4EI} + \frac{9Pa^3}{4EI} = \frac{5Pa^3}{2EI}$$

裏わざ！

$$\theta_B = -\frac{t_{AB}}{4a} = -\frac{5Pa^2}{8EI}$$

DB間

$$\theta_{BD} = \frac{1}{2}\frac{Pd}{4EI}d = \frac{Pd^2}{8EI}$$

$$\boxed{\theta_B = -\theta_{BD} = -\frac{Pd^2}{8EI}}$$

平行線の錯角

互いに独立な別の考え方から得られた値を等置

最大たわみの発生位置と最大たわみ

$$d = \sqrt{5}a$$

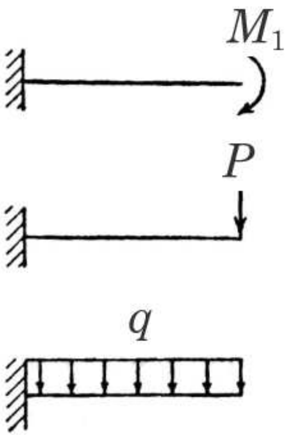
$$y_D = t_{BD} = \left(\frac{1}{2}\frac{Pd}{4EI}d\right)\left(\frac{2d}{3}\right) = \frac{Pd^3}{12EI} = \frac{5\sqrt{5}Pa^3}{12EI}$$

ミオソテス法（忘れないで！）

Myosotis (forget-me-nots)

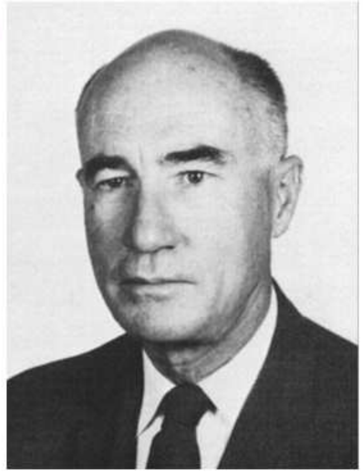
忘れな草をあなたに♪
covered by 比嘉栄昇 (2014)

The Myosotis Method. ..... we now quote six little formulae for the angular and linear deflections of a cantilever beam under three different loadings:



	Angle	Deflection
M_1	$\dfrac{M_1 l}{EI}$	$\dfrac{M_1 l^2}{2EI}$
P	$\dfrac{Pl^2}{2EI}$	$\dfrac{Pl^3}{3EI}$
q	$\dfrac{ql^3}{6EI}$	$\dfrac{ql^4}{8EI}$

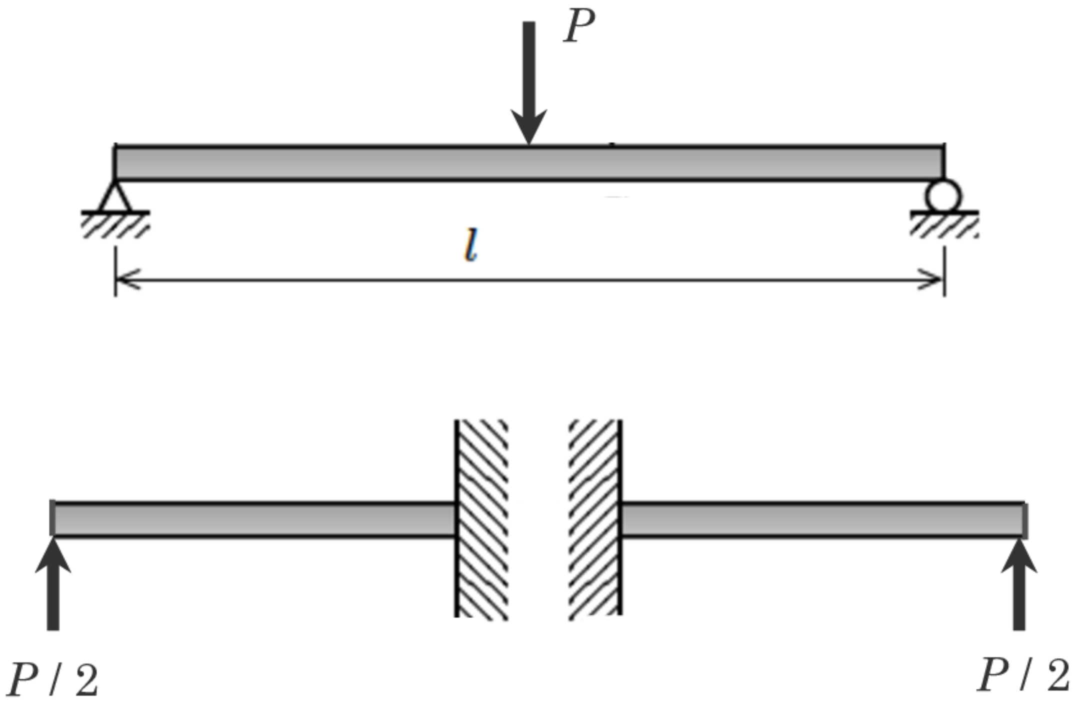
The expressions should be memorized from the start, which is not difficult if we only remember the sequence 122368. If the exponent of the length l is forgotten, it can be reestablised in each case by dimensional reasoning.



J. P. Den Hartog (1901-1989)
Strength of Materials,
McGraw Hill (1949)

See also,
Beams and forget-me-nots,
Aug. 18, 2015 by Dr. Drang
Basic equations of beam deflection,
18 Aug. 2015 by John D. Cook

ミオソテス法のための問題の分割例



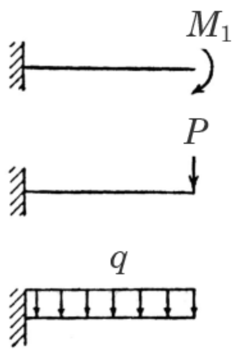
ミオソテス法

モーメント図が同一であれば、
原始関数は同一であり、

たわみ角は、$+C_1$

たわみは、$+C_1 x + C_2$

という事実を利用している

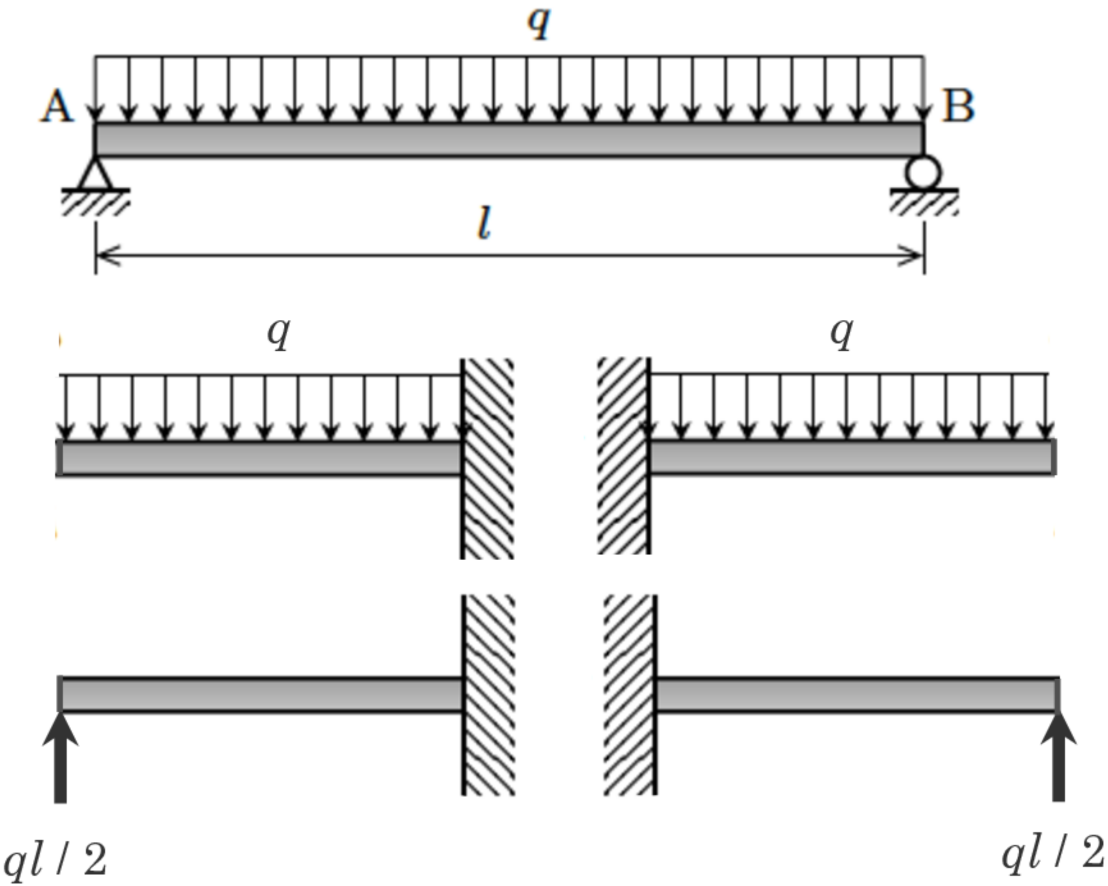


	Angle	Deflection
M_1	$\dfrac{M_1 l}{EI}$	$\dfrac{M_1 l^2}{2EI}$
P	$\dfrac{Pl^2}{2EI}$	$\dfrac{Pl^3}{3EI}$
q	$\dfrac{q l^3}{6EI}$	$\dfrac{q l^4}{8EI}$

122368

Myosotis (forget-me-nots)

ミオソテス法のための問題の分割例と重ね合わせの原理



ミオソテス法

モーメント図が同一であれば、原始関数は同一であり、

たわみ角は、$+\,C_1$

たわみは、$+\,C_1 x + C_2$

という事実を利用している

重ね合わせの原理

複数の荷重が作用する問題を単一種類の荷重が作用する複数の問題に分ける

この方法はさまざまな方法と組み合わせて頻繁に用いられる

次回

材料力学2025 シーズン 2

第５話　はりのせん断力

2025年6月20日（金）

Coming Soon . . .