

材料力学2025 シーズン2

第3話 はりのたわみ 前編

2025年6月13日（金）

中谷 彰宏

教科書「渋谷陽二，中谷彰宏，材料力学，(2017)，コロナ社」
1, 2, 3, 4, 10, 11章（春学期の授業）を学習し終えて、
5, 6, 7, 8, 9, 12, 13章（夏学期の授業）をこれから学ぶ諸君のために

コンセプト

“考えてみようたのしいことを♪”

目標

外力（横荷重やモーメント）が作用するはりについて、外力の作用点およびその他の任意点におけるたわみとたわみ角を知る。

6章では静定はりのみについて考える。すなわち、外力と支持条件が与えられて、反力や支持モーメント、曲げモーメント分布、せん断力分布が、釣り合いのみを考えることによってあらかじめ解かれている問題を考える。

目的（何のためにこの目標があるのか、何の役に立つのか）

材料の各点の応力状態等が基準値にくらべて十分に安全であることを保証するための強度設計については既に学んだ。一方、変形や変位が機能を損なわない程度に十分に小さいことを保証するための剛性設計においては、たわみやたわみ角の評価が必要不可欠である。逆に、外力によって生じる変位を利用したいという機能設計にもこれらの評価が役立つ。

8章で扱う不静定はりでは、力の釣り合いと、たわみやたわみ角に対する幾何条件を同時に満足する解を求める必要がある。はりに作用する横荷重やモーメントとたわみやたわみ角の関係を理解することは、その準備としての意味がある。実際、不正定問題は静定問題にの重ね合わせ問題に帰着させて解くことができるので、静定問題の考え方をマスターしておくことは重要である。

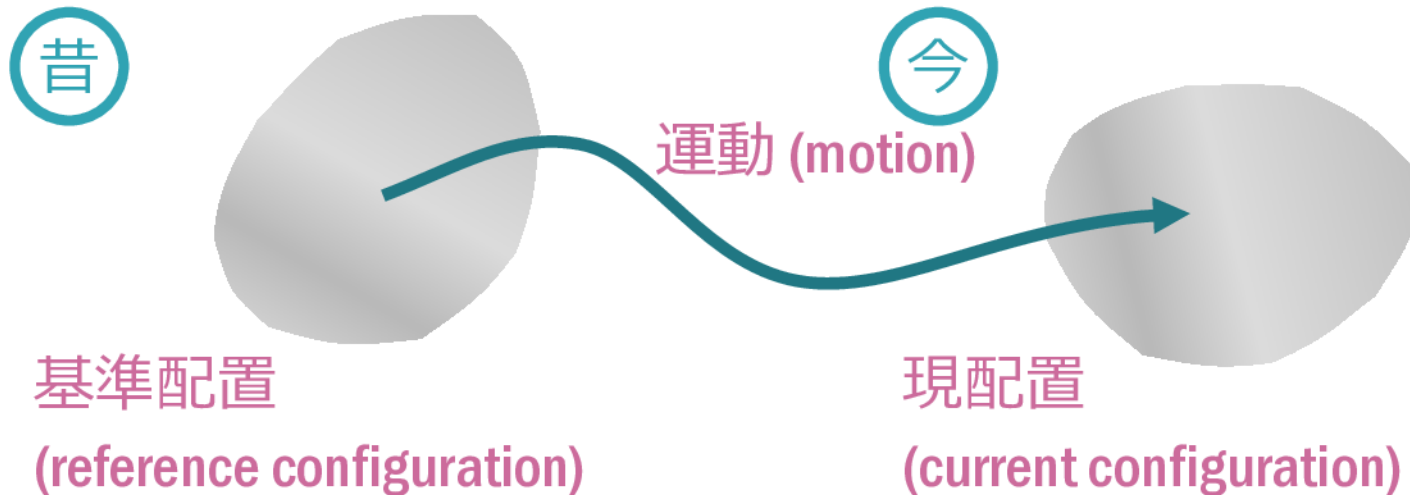
運動：配置の時間変化

運動 (motion)

配置の（時間）変化

「ゆく河の流れは絶えずして、しかももとの水にあらず
淀みに浮かぶうたかたは、かつ消えかつ結びて、
久しくとどまりたるためしなし」鴨長明，方丈記（1212）

万物は運動する



固体

「そういう流動性自体がいわばひとつの固体をつくっているのだ」
(ポール・ヴァレリー 「エウパリノス」(1921))

固体 (solid)

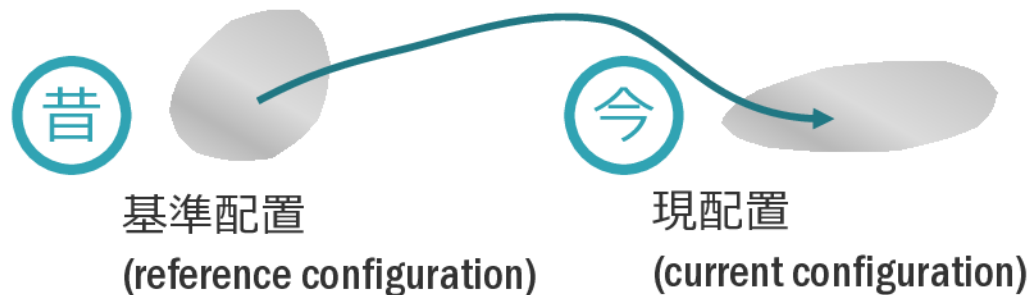
基準配置が明確に定義できる（と信じられている）もの

基準配置は存在するはずだがわからないこともある（例えば，地盤，転位を含む金属は，昔どうだったかは今となっては知る由もない．そこでは運動という時間の矢に対応する写像が，時間の矢を遡って一意に定まらない）

減退記憶 (fading memory)

物質自身は基準配置を〈忘れている〉かのように振る舞う

しかしながら，ひとが理解する際には何らかの基準配置を考えると都合のよいものが固体である



運動の表現法

運動の表現法 (description of motion)

ラグランジュ表示法 (Lagrange description)

物質表示法 (material description)ともいう
基準配置の座標で物理量を表現

オイラー表示法 (Euler description)

空間表示法 (spatial description)
現配置の座標で物理量を表現

今そこにある現象の本質はただひとつ

両者はものの見方や見かけ上の表現が異なっている
理解の根底にある本質に違いはない
材料力学では両者の区別がない程度の微小な変形を扱う



Joseph-Louis Lagrange
(1736-1813)



Leonhard Euler
(1707-1783)

オイラー・ラグランジュ方程式 (18世紀解析学)

19歳のときに等周問題を問いた若きラグランジュは、オイラー(48歳)にその研究を送った。オイラーは、その一般性にいたく感銘を受け、ラグランジュが論文を発表できるようになるまで、自身の論文発表を差し控えた。(Finlayson, 1972)

運動の表現法

決勝写真撮影 (JRA) 運動している物体を定点観測により認識

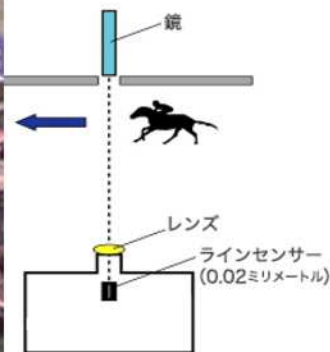
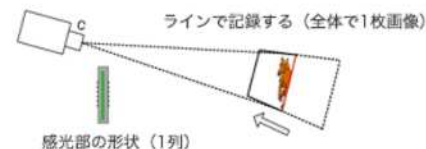
動画 2次元画像（縦横）の時系列（3次元空間の情報）

静止画 動画の2次元空間への射影である

通常の静止画（スナップショット）は、時間を規定して運動の射影をみている

この特殊カメラは、空間軸の横軸を（スリットで）規定して運動をみている
縦軸は実空間、横軸は時間軸に対応する、すなわち画面全体はすべてが
（異なる時刻の）ゴールである

<ラインセンサー>



変形と剛体運動・剛体

変形 (deformation)

運動において、2基本構造間（2点間，2原子間など）の**距離**が変化する現象

剛体運動 (rigid motion)

変形が生じない運動

すなわち、**任意の2基本構造間**の距離が変化しない運動

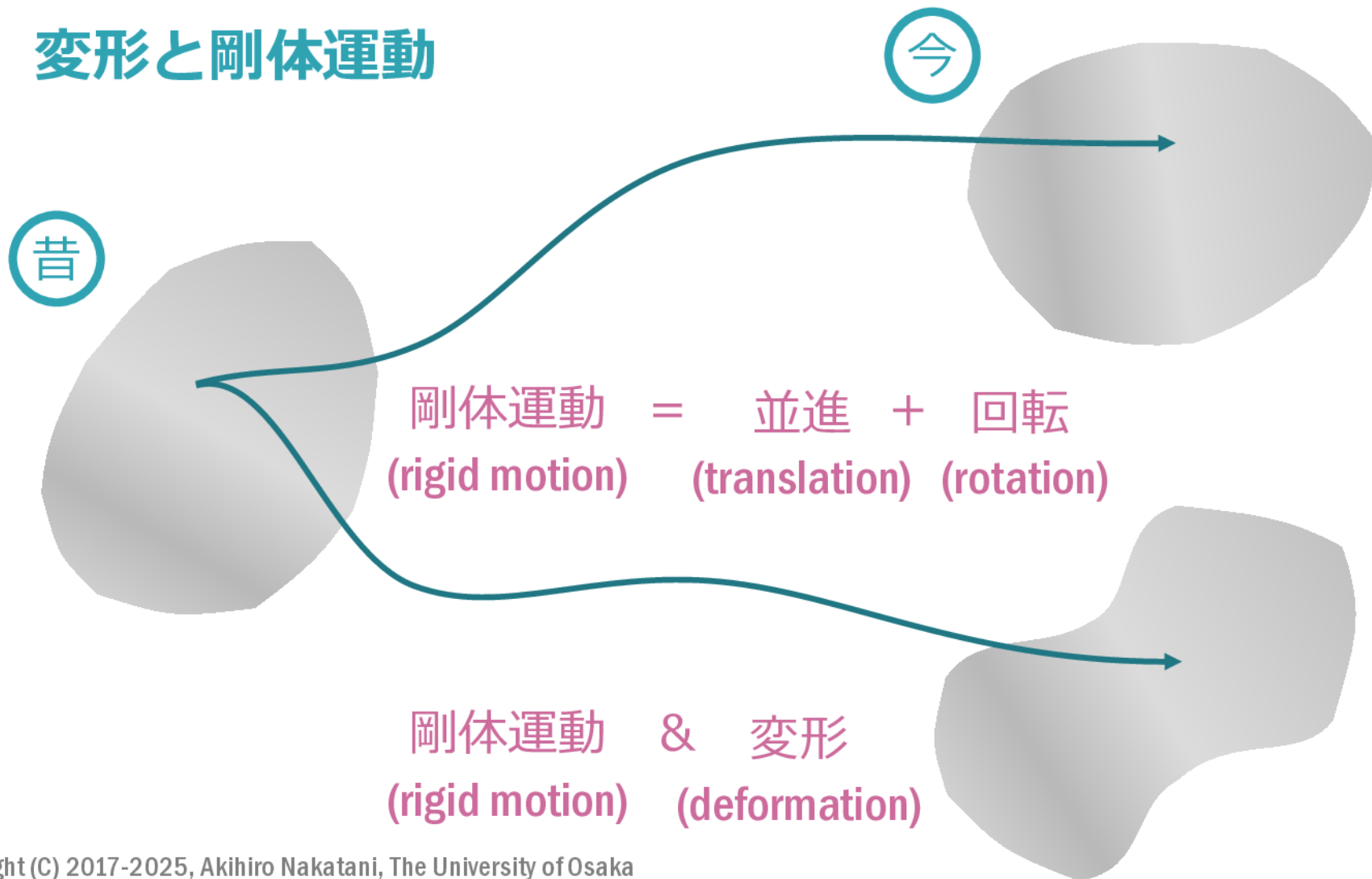
距離（ノルム）の数学的定義により剛体運動の定義は変わる

直角座標などでは、**並進運動**と**回転運動**の線形和となる

剛体 (rigid motion)

想定されるいかなる状況においても**変形**しない物体

変形と剛体運動



はりのたわみ：問題の前提・考え方と用語

無負荷時に軸線が直線である**真直はり** (straight beam) が、負荷（横荷重やモーメント）を受ける場合を考える。慣例として、自重等についても無負荷時には 0 とみなし、横荷重やモーメントなどの負荷を受ける時にあわせて考慮するものとする。また軸線（中面上の直線）は紙面右方向を正に x 軸 ($y = 0$) とし、鉛直方向に（紙面下方向を正に） y 軸をとることを慣例とする。

運動 (motion) : 座標 $(x, 0)$ の点が、負荷などによって座標 (x_1, y) に移ること

変位 (displacement) : 運動によって定義される相対位置ベクトル $(x_1 - x, y)$ のこと

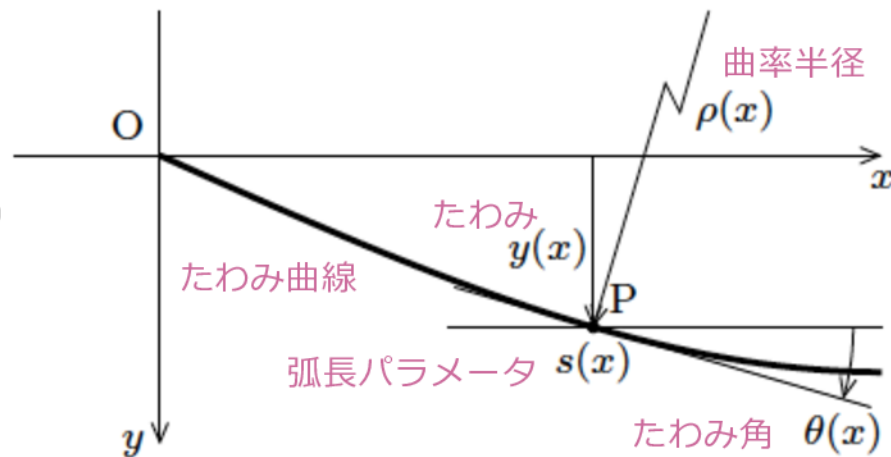
たわみ (deflection) : はりの問題における変位の鉛直方向成分 y のこと（材料力学では、微小変形が仮定できて $x_1 \cong x$ とみなすことができ、変位は y 方向成分（鉛直方向成分）のみと考える）

たわみ曲線 (deflection curve) : たわみ y を x の関数とみなして表した曲線 $y(x)$ のこと
（弾性曲線 (elastic curve) とよばれる）

たわみ角 (deflection angle) : たわみ曲線上の点 $P(x, y)$ における接線と x 軸のなす角 $\theta(x) = \tan^{-1}(dy/dx)$ のこと

以下では、たわみ曲線上の点 $P(x, y)$ の

曲率 $\kappa(x)$ 、**曲率半径** $\rho(x)$ を議論の起点に、たわみ角、たわみと力学状態との関係性を考えていく。



たわみ曲線の曲率

曲率 $\kappa(x)$ は、弧長パラメータ $s(x)$ に関するたわみ角の変化と定義される。

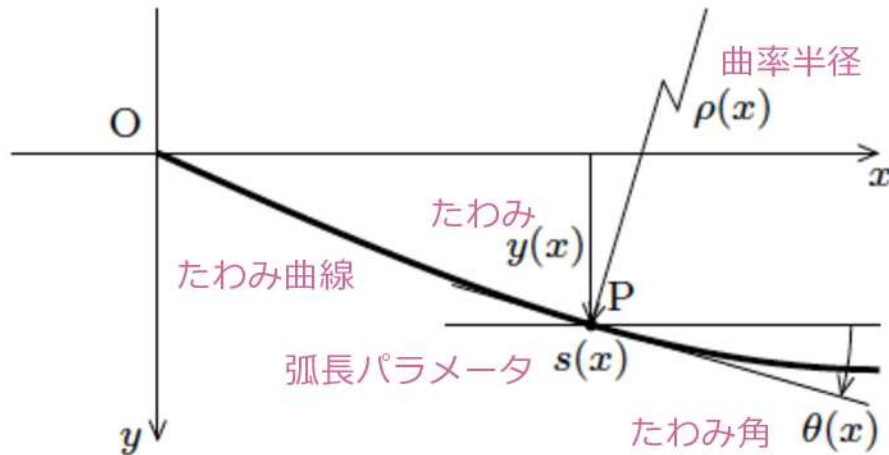
$$\kappa = \frac{d\theta}{ds}$$

一方、

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} \quad \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \cos \theta$$

の関係があるので、曲率は、たわみ曲線の導関数を用いて以下のように表現できる

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \frac{dx}{ds} \\ &= \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}} \end{aligned}$$



たわみ $y(x)$ は、たわみ角 $\theta(x)$ は微小であり、 $y(x) \ll l$ (スパン長など) , $dy/dx \ll 1$, $\theta(x) \ll 1$ が仮定できるとき、

$$\sin \theta \simeq \theta \quad \tan \theta \simeq \theta \quad \cos \theta \simeq 1$$

$$1 + (dy/dx)^2 \simeq 1$$

などに（線形化）近似でき、以下を得る

$$\kappa = \frac{d^2y}{dx^2}$$

角度 θ が十分小さい場合の近似の考え方の基本

テイラー展開（マクローリン展開）

近似

$$\sin \theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 + \dots$$


$$\sin \theta \simeq \theta$$

$$\tan \theta = \theta + \frac{1}{3}\theta^3 + \frac{2}{15}\theta^5 + \frac{17}{315}\theta^7 + \dots$$


$$\tan \theta \simeq \theta$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \frac{1}{6!}\theta^6 + \dots$$


$$\cos \theta \simeq 1$$

近似が妥当とみなせる範囲の感覚的理解 角度 θ が十分小さい場合に妥当

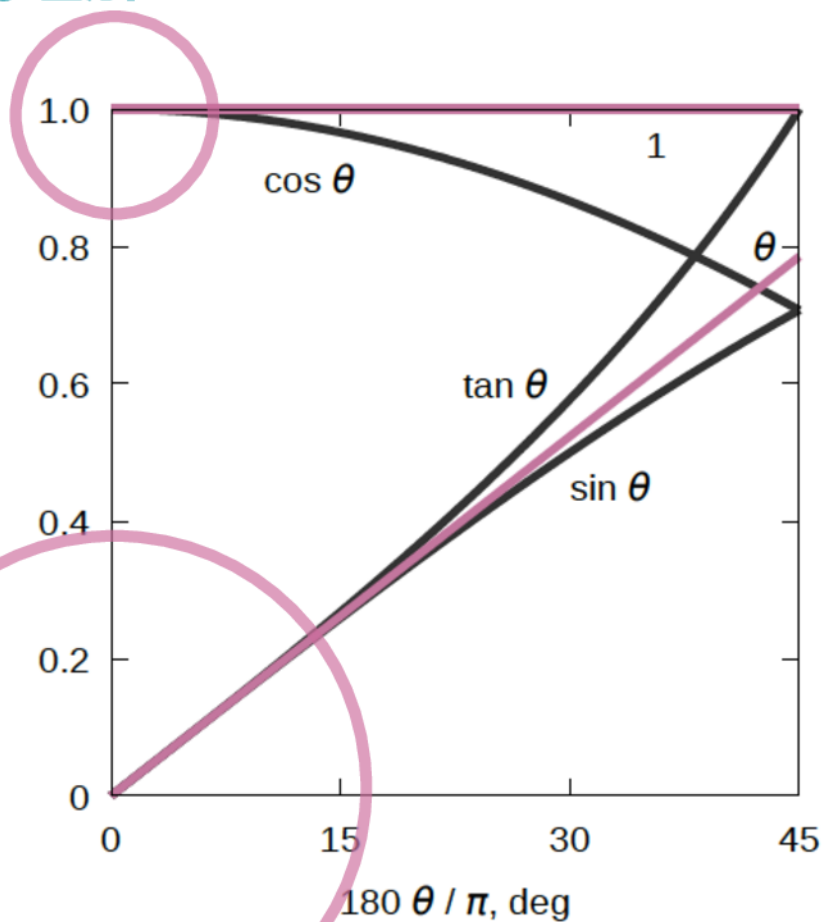
近似（線形化）

$$\sin \theta \simeq \theta$$

$$\tan \theta \simeq \theta$$

$$\cos \theta \simeq 1$$

感覚的理解にはなるが、この近似は
小さい角度なら概ね妥当である
と考えてよさそうである



角度 θ が十分小さい場合の近似の妥当性

$\cos \theta \simeq 1$ は、妥当な近似である

$$\cos \theta = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \frac{1}{6!}\theta^6 + \dots \quad \text{テイラー展開}$$

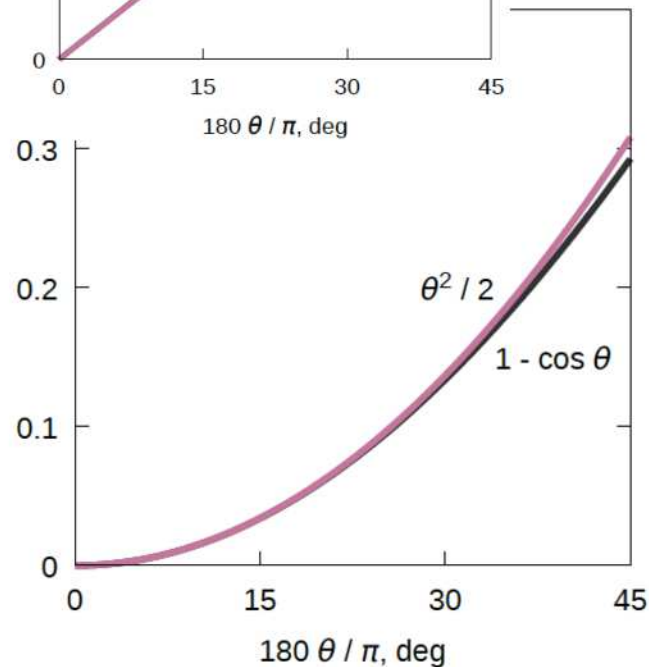
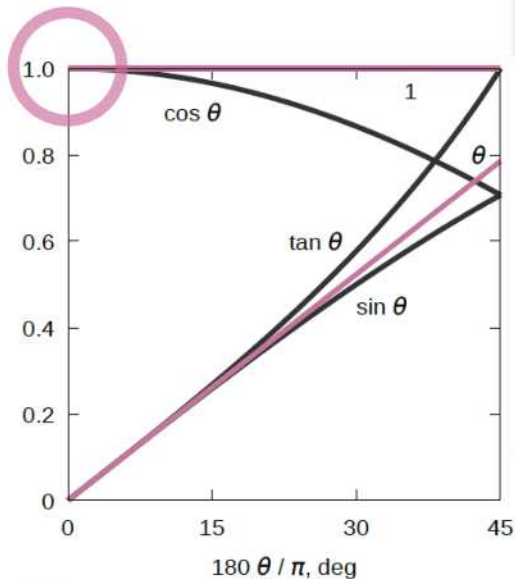
$$\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \simeq 1 - \frac{1}{2}\theta^2 \simeq 1 \quad \text{半角の公式}$$

しかしながら、 $1 - \cos \theta \neq 0$ である（0としてはいけない）

$1 - \cos \theta \simeq \frac{1}{2}\theta^2$ として、近似値を表現するのが妥当である

$$1 - \cos \theta = \frac{1}{2!}\theta^2 - \frac{1}{4!}\theta^4 + \frac{1}{6!}\theta^6 - \frac{1}{8!}\theta^8 + \dots \quad \text{テイラー展開}$$

$$1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \simeq \frac{1}{2}\theta^2 \quad \text{半角の公式}$$



放物線による円弧の近似

頂点において、共通の接線を有し、曲率が等しい場合

曲率 $\kappa(x)$ の厳密な表現

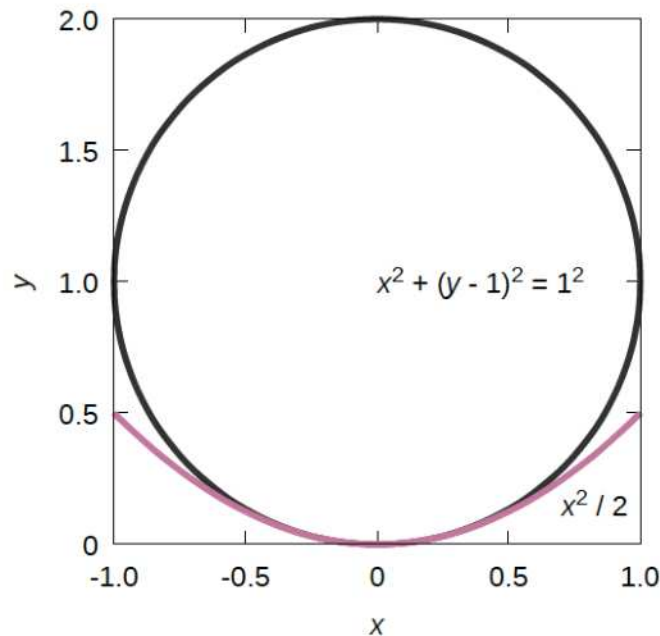
$$\kappa = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{3/2}}$$

に、円の方程式を代入すれば、座標に依らず一定となることを確認できる。

放物線は座標によって曲率は異なるはずだが、近似式

$$\kappa = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

で評価した曲率は、座標によらず一定値になる。このことは、逆に、曲率一定の曲線を近似式で考えると、円ではなく放物線になってしまうことを意味する



しかしながら、図から、たわみ、たわみ角が微小な区間であれば、円弧と放物線の違いは顕著ではなく、微小変形の条件下で、曲率の近似式を用いることは妥当であることがわかる。

現在公開可能な情報

たわみの方程式 (equation of deflection)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}$$

たわみの2階微分と曲げモーメントの関係
曲げ剛性を比例定数とする

曲率とたわみの2階微分の関係

$$\kappa = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (6.5)$$

曲率と曲率半径の関係

$$\kappa = -\frac{1}{\rho} \quad (5.2)$$

曲率半径と曲げモーメントの関係

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} \quad (5.11)$$

$M(x)$

曲げモーメント

力の世界

力の世界と幾何の世界をつなぐ
材料の（ばね的な）関係性

$\frac{1}{\rho}$

曲率半径の逆数

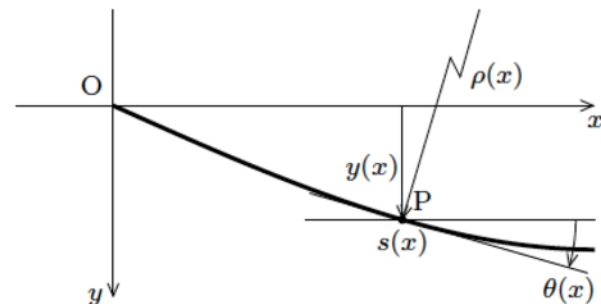
幾何の世界

たわみの方程式の境界値問題

たわみの方程式

(equation of deflection)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}$$



たわみ $y(x)$ を未知関数とする2階常微分方程式

曲げモーメント分布 $M(x)$ は、力学的平衡の条件のみから求めることができる
(ただし静定問題の場合に限られる)

ヤング率 E は材料定数として与えられる (問題によっては x の関数 $E(x)$)

断面二次モーメント I は既知

(断面形状によって決まる。問題によっては x の関数 $I(x)$)

組合せはりなど、より一般的な場合には、 EI のかわりに、
等価曲げ剛性 D が必要 (そして、さらに問題によっては x の関数 $D(x)$)

一般解は任意定数を2つ含む。解を一意に決定するためには、付帯条件が2つ必要
通常は支持点でのたわみやたわみ角が解を一意に決定する条件として与えられる

たわみの方程式とたわみの基礎式

幾何の世界

たわみ曲線

$y(x)$

微分

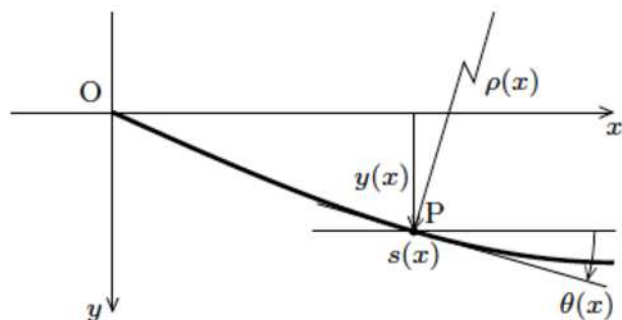
たわみ角

$$\theta = \frac{dy}{dx}$$

微分

曲率

$$\kappa = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{\rho}$$



たわみの方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}$$

微分

EI が一定の場合

$$EI \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{dM}{dx} = -V(x)$$

微分

たわみの基礎式

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{d^2M}{dx^2} = -\frac{dV}{dx} = q(x)$$

力の世界

曲げモーメント

$M(x)$

微分

$$\frac{dM}{dx} = V(x) \quad \text{せん断力}$$

微分

$$\frac{dV}{dx} = -q(x)$$

横荷重（分布荷重）に
負号をつけたもの

付帯条件（支持条件）：○が既知：一般には0（ゼロ）に規定

模式図	支持等の呼び名	y	$\theta = \frac{dy}{dx}$	$\kappa = \frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^3y}{dx^3}$
	自由端	未知	未知	○	○
	固定支持	○	○	未知	未知
	回転支持	○	未知	○	未知
	移動支持	○	未知	○	未知
	ヒンジ	未知：左右で連続	未知：一般に不連続	○：一般に0	未知：左右で連続
	はり途中の移動支持（または回転支持）	○	未知：左右で連続	未知：左右で連続	未知：一般に不連続

（曲げモーメント） （せん断力）

たわみの方程式の直接積分法

たわみの方程式を二回積分する。得られるのは微分方程式の一般解なので、任意定数を含む

$$\kappa(x) \equiv y''(x) = -\frac{M(x)}{EI}$$

$$\theta(x) \equiv y'(x) = -\int_0^x \frac{M(x_1)}{EI} dx_1 + C_1$$

$$y(x) = -\int_0^x \int_0^{x_2} \frac{M(x_1)}{EI} dx_1 dx_2 + C_1 x + C_2$$

任意定数が2つ現れるイメージをつかんでもらうためにこのように表記してみたが、3行目の式は実際はたわみの方程式にもどって重積分をするわけではない

$$\kappa(x) \equiv y''(x) = -\frac{M(x)}{EI}$$

$$\theta(x) \equiv y'(x) = \int_0^x y''(x_1) dx_1 + C_1$$

$$y(x) = \int_0^x y'(x_1) dx_1 + C_2$$

こちらの手順の方が、実際に行う計算のイメージに近い。3行目の式には、任意定数 C_1 も含まれることになるが、2行目の式で、たわみ角の条件式から C_1 を決定した後に3行目の積分を行う。

上記は、積分により得られる関数を x の関数とするために、 x_1 (および x_2) などのダミー変数を用いて数学的に混乱のない形で表記しているため、かえってわかりにくいかもしれない
実際には、 $M(x)$ が具体的な関数で与えられており、積分の都度、被積分関数の原始関数に任意定数を付加するという手順になる

片持ちはり（材料力学 p.110 例題6.1）

曲げモーメント分布 $M(x) = -P(l - x)$

たわみの方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = \frac{1}{EI} P(l - x)$$

積分すると

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2EI} Px(2l - x) + C_1$$

$$y = \frac{1}{6EI} Px^2(3l - x) + C_1x + C_2$$

固定端A ($x = 0$) で、 $\theta = 0$, $y = 0$ より

$$C_1 = 0, C_2 = 0$$

たわみ角およびたわみは

$$\theta = \frac{1}{2EI} Px(2l - x) \quad y = \frac{1}{6EI} Px^2(3l - x)$$

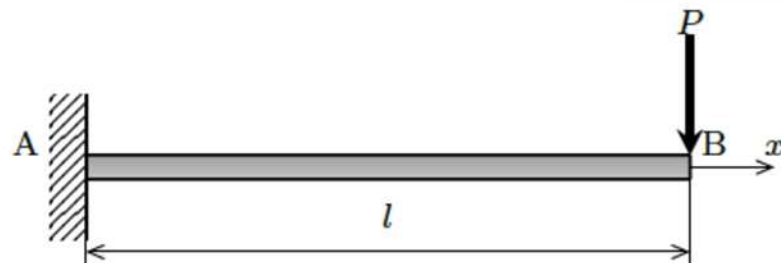
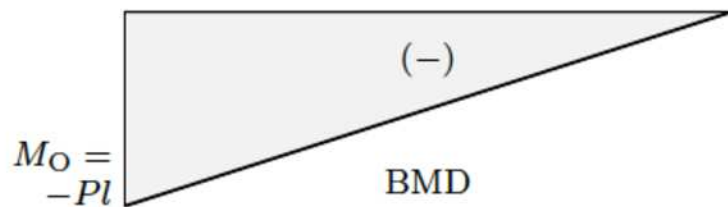


図 6.2 自由端に集中荷重を受ける片持ちはり



自由端B ($x = l$) で、
たわみ角、たわみは最大

$$\theta_{\max} = \theta(l) = \frac{Pl^2}{2EI}$$

$$y_{\max} = y(l) = \frac{Pl^3}{3EI}$$

片持ちはり（材料力学 p.112 例題6.3）

曲げモーメント分布 $M(x) = -\frac{q(l-x)^2}{2}$

たわみの方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = \frac{q(l-x)^2}{2EI}$$

積分すると

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{6EI} qx(x^2 - 3lx + 3l^2) + C_1$$

$$y = \frac{1}{24EI} qx^2(x^2 - 4lx + 6l^2) + C_1x + C_2$$

固定端A ($x=0$) で、 $\theta=0$, $y=0$ より

$$C_1 = 0, C_2 = 0$$

たわみ角およびたわみは

$$\theta = \frac{1}{6EI} qx(x^2 - 3lx + 3l^2) \quad y = \frac{1}{24EI} qx^2(x^2 - 4lx + 6l^2) \quad y_{\max} = y(l) = \frac{ql^4}{8EI}$$

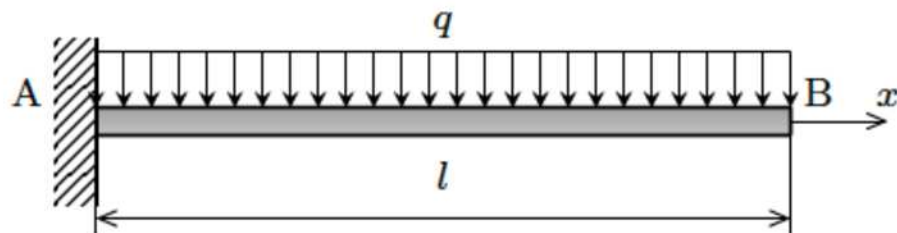


図 6.4 一様分布荷重を受ける片持ちはり

自由端B ($x=l$) で、
たわみ角、たわみは最大

$$\theta_{\max} = \theta(l) = \frac{ql^3}{6EI}$$

$$y_{\max} = y(l) = \frac{ql^4}{8EI}$$

一様分布荷重を受ける単純支持はり (材料力学 p.115 例題6.5)

曲げモーメント分布 $M(x) = \frac{q}{2}x(l-x)$

たわみの方程式 $EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{q}{2}(lx - x^2)$

積分すると

$$EI\theta = EI \frac{dy}{dx} = -\frac{q}{2} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + C_1$$

$$EIy = -\frac{q}{2} \left(\frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) + C_1x + C_2$$

点A、点Bでたわみが0なので $y(0) = y(l) = 0$

$$C_1 = \frac{ql^3}{24}, \quad C_2 = 0$$

たわみ角およびたわみは

$$\theta = \frac{ql^3}{24EI} \left\{ 1 - 6 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + 4 \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right\}$$

$$y = \frac{ql^4}{24EI} \left\{ \frac{x}{l} - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 + \left(\frac{x}{l} \right)^4 \right\}$$

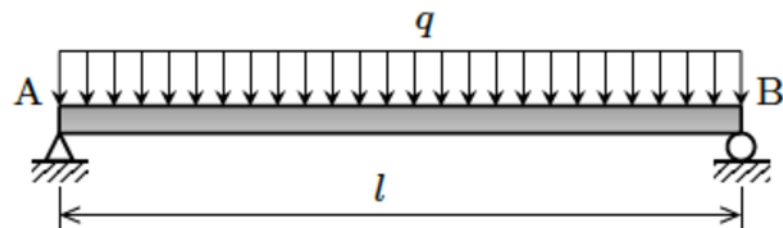


図 6.6 一様分布荷重を受ける単純支持はり

区間ABの中央 ($x = l/2$) で、
たわみは最大

$$y_{\max} = \frac{5ql^4}{384EI}$$

点A、点Bでたわみ角は最大

$$\theta_A = \frac{ql^3}{24EI} \quad \theta_B = -\frac{ql^3}{24EI}$$

両端にモーメントを受ける単純支持はり (材料力学 p.116 例題6.6)

曲げモーメント分布 $M(x) = \frac{M_B - M_A}{l}x + M_A$

たわみの方程式 $EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_B - M_A}{l}x - M_A$

積分すると

$$EI\theta = EI \frac{dy}{dx} = -\frac{M_B - M_A}{l} \frac{x^2}{2} - M_A x + C_1$$

$$EIy = -\frac{M_B - M_A}{l} \frac{x^3}{6} - M_A \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

点A、点Bでたわみが0なので $y(0) = y(l) = 0$

$$C_1 = \frac{1}{6}(2M_A + M_B), \quad C_2 = 0$$

たわみ角およびたわみは

$$\theta = \frac{l}{6EI} \left\{ (2M_A + M_B) - 6M_A \frac{x}{l} - 3(M_B - M_A) \frac{x^2}{l^2} \right\}$$

$$y = \frac{lx}{6EI} \left\{ (2M_A + M_B) - 3M_A \frac{x}{l} + (M_B - M_A) \frac{x^2}{l^2} \right\}$$

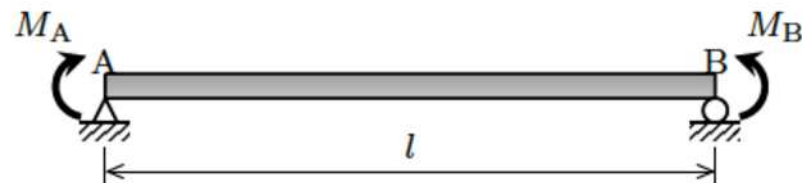


図 6.7 両端にモーメントを受ける単純支持はり

点A、点Bのたわみ角は

$$\theta_A = \frac{(2M_A + M_B)l}{6EI}$$

$$\theta_B = -\frac{(M_A + 2M_B)l}{6EI}$$

なおこの問題の解は、
(問題1) M_A のみ ($M_B=0$) の問題と
(問題2) M_B のみ ($M_A=0$) の問題の
解の重ね合わせになっている

固定端と自由端の間に集中荷重を受ける片持ちはり (材料力学 p.111 例題6.2)

AC 間 ($0 < x < a$) のたわみ角とたわみは、自由端 ($x = l$) に集中荷重を受ける問題の解 (6.13) に $l = a$ を代入して

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2EI}Px(2a - x)$$

$$y = \frac{1}{6EI}Px^2(3a - x)$$

C($x = a$) のたわみ角とたわみは

$$\theta_C = \theta(a) = \frac{Pa^2}{2EI} \quad y_C = y(a) = \frac{Pa^3}{3EI}$$

CB 間 ($a < x < l$) のたわみ角とたわみは

$$\theta = \theta_C = \frac{Pa^2}{2EI} \quad (\text{一定})$$

$$y = y_C + \theta_C(x - a) = \frac{Pa^3}{3EI} + \frac{Pa^2}{2EI}(x - a) = \frac{Pa^2(3x - a)}{6EI}$$

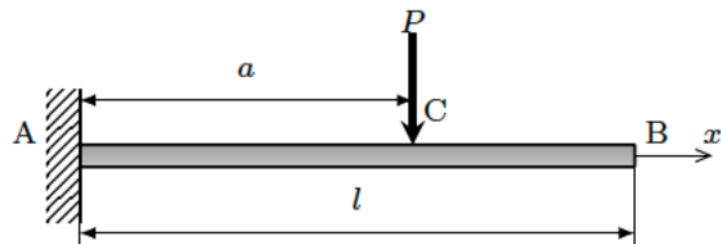


図 6.3 固定端と自由端の間に集中荷重を受ける片持ちはり

自由端B ($x = l$) のたわみは最大

$$y_{\max} = y(l) = \frac{Pa^2(3l - a)}{6EI}$$

CB間は、内力が0（せん断力と曲げモーメントが共に0）であり、変形していないが、剛体運動（並進運動と回転運動）しているためたわみは変化する

固定端と自由端の間に集中荷重を受ける片持ちはり (材料力学 p.111 例題6.2) 場合分けによる解法

AC 間 ($0 < x < a$)

$$M_1(x) = P(x - a)$$

$$EIy_1'' = -Px + Pa$$

$$EIy_1' = -\frac{P}{2}x^2 + Pax + C_1$$

$$EIy_1 = -\frac{P}{6}x^3 + \frac{P}{2}ax^2 + C_1x + C_2$$

CB 間 ($a < x < l$)

$$M_2(x) = 0$$

$$EIy_2'' = 0$$

$$EIy_2' = C_3$$

$$EIy_2 = C_3x + C_4$$

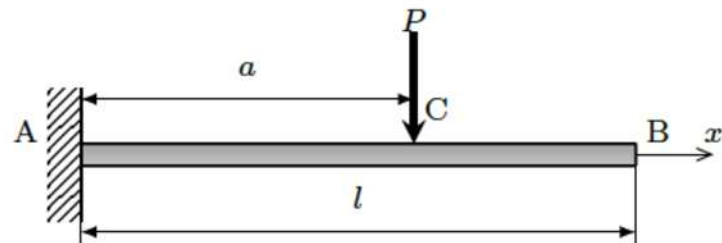


図 6.3 固定端と自由端の間に集中荷重を受ける片持ちはり

点 A の境界条件 $y_1(0) = 0$, $y_1'(0) = 0$ より $C_1 = 0$, $C_2 = 0$

点 C でのたわみ角とたわみの連続条件 $y_1(a) = y_2(a)$, $y_1'(a) = y_2'(a)$ より

$$C_3 = \frac{Pa^2}{2}, \quad C_4 = -\frac{Pa^3}{6}$$

$$y_1' = \frac{P}{2EI}x(2a - x)$$

$$y_1 = \frac{P}{6EI}x^2(3a - x)$$

$$y_2' = \frac{P}{2EI}a^2$$

$$y_2 = \frac{P}{6EI}(3x - a)a^2$$

集中荷重を受ける単純支持はり (材料力学 p.113 例題6.4)

AC 間 ($0 < x < a$)

$$M_1(x) = Pbx/l$$

$$EI d^2 y / dx^2 = -M_1$$

$$EI \theta_1(x) = -\frac{Pbx^2}{2l} + C_1$$

$$EI y_1(x) = -\frac{Pbx^3}{6l} + C_1x + C_2$$

CB 間 ($a < x < l$)

$$M_2(x) = Pa(l-x)/l$$

$$EI d^2 y / dx^2 = -M_2$$

$$EI \theta_2(x) = -\frac{Pa}{l} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_3$$

$$EI y_2(x) = -\frac{Pa}{l} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_3x + C_4$$

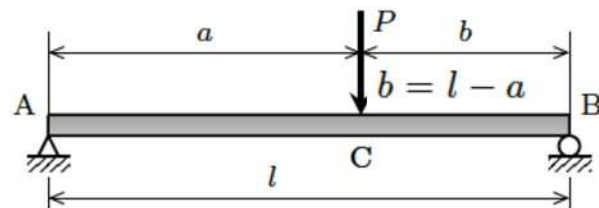


図 6.5 集中荷重を受ける単純支持はり

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(l) = 0, \quad y_1(a) = y_2(a), \quad \text{かつ}, \quad \theta_1(a) = \theta_2(a)$$

$$C_1 = \frac{Pab}{6} \left(2 - \frac{a}{l} \right), \quad C_2 = 0, \quad C_3 = \frac{Pal}{6} \left(2 + \frac{a^2}{l^2} \right), \quad C_4 = -\frac{Pa^3}{6}$$

$$EI \theta_1(x) = -\frac{Pbx^2}{2l} + \frac{Pab}{6} \left(2 - \frac{a}{l} \right)$$

$$EI y_1(x) = -\frac{Pbx^3}{6l} + \frac{Pabx}{6} \left(2 - \frac{a}{l} \right)$$

$$EI \theta_2(x) = -\frac{Pa}{l} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{Pal}{6} \left(2 + \frac{a^2}{l^2} \right)$$

$$EI y_2(x) = -\frac{Pa}{l} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + \frac{Palx}{6} \left(2 + \frac{a^2}{l^2} \right) - \frac{Pa^3}{6}$$

4元連立方程式になるので解法に手間がかかるが、例えば、

第1式より $C_2 = 0$

第2式より C_4 を C_3 で表し、これを(*)とする

第3式、第4式に(*)を代入し C_4 を消去して C_1 と C_3 を未知数とする2元連立方程式とし、これを解いて C_1 と C_3 を決定する。

C_3 を(*)に代入するし、 C_4 を決定する。

集中荷重を受ける単純支持はり (材料力学 p.113 例題6.4) に関するコメント

点A, Bのたわみ角、荷重作用点Cのたわみはそれぞれ、

$$\theta_A = \frac{Pab(l+b)}{6EI}, \quad \theta_B = -\frac{Pab(l+a)}{6EI} \quad y_C = \frac{Pa^2b^2}{3EI}$$

荷重作用点Cが中央点 ($a = l/2$) のときは、

$$\theta_A = \frac{Pl^2}{16EI}, \quad \theta_B = -\frac{Pl^2}{16EI} \quad y_{\max} = \frac{Pl^3}{48EI}$$

最大たわみの位置と値は ($a > l/2$ とするとき) $\theta_1 = 0$ を解くと

$$x_M = \sqrt{\frac{a(l+b)}{3}}, \quad y_{\max} = y_1(x_M) = \frac{Pb}{9\sqrt{3}EI} \{a(l+b)\}^{3/2}$$

$a = l/2$ のとき $x_M = l/2$

$a \rightarrow l$ の極限でも $x_M \rightarrow l/\sqrt{3}$

なので、最大たわみの近似値として、はり中央点 $x = l/2$ のたわみ

$$y_1(l/2) = \frac{Pb}{48EI} (3l^2 - 4b^2)$$

を用いることは妥当な近似となる。

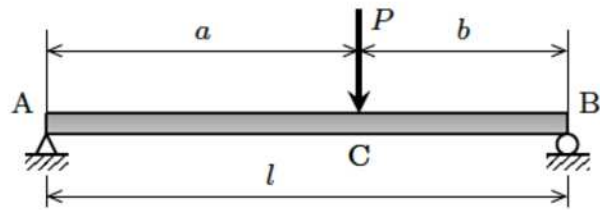


図 6.5 集中荷重を受ける単純支持はり

たわみの基礎式からの直接積分法

はりの支持条件によらず成立するたわみの基礎式

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{q}{EI}$$

の直接積分法の例として、一様分布荷重を受ける単純支持はり（図6.6）を考える。積分により、任意定数を含む

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q,$$

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = qx + C_1,$$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = q \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2,$$

$$EI \frac{dy}{dx} = q \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

$$EI y = q \frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

を得る。

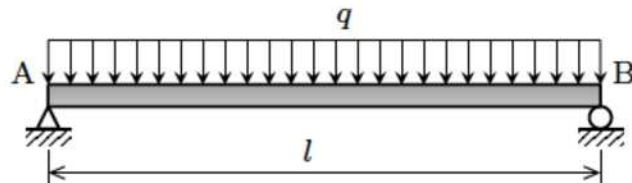


図 6.6 一様分布荷重を受ける単純支持はり

付帯条件は

$$(1) \quad x = 0 \text{ で } y = 0 \text{ かつ } d^2 y / dx^2 = 0$$

$$(2) \quad x = l \text{ で } y = 0 \text{ かつ } d^2 y / dx^2 = 0$$

$$(1) \text{より } C_4 = 0, \quad C_2 = 0$$

(2)に代入して

$$\frac{ql^4}{24} + C_1 \frac{l^3}{6} + C_3 l = 0, \quad \frac{ql^2}{2} + C_1 l = 0$$

これを解いて

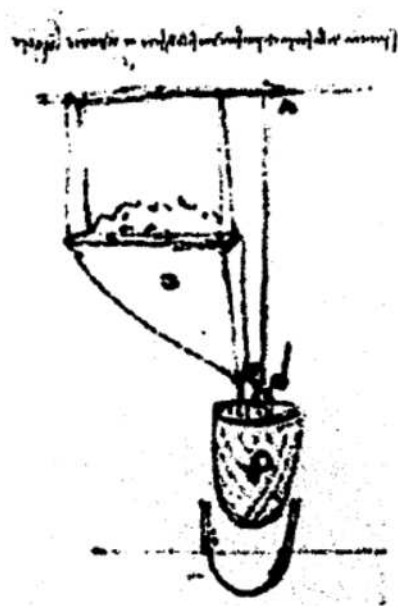
$$C_1 = -\frac{ql}{2}, \quad C_3 = \frac{ql^3}{24}$$

たわみを得る

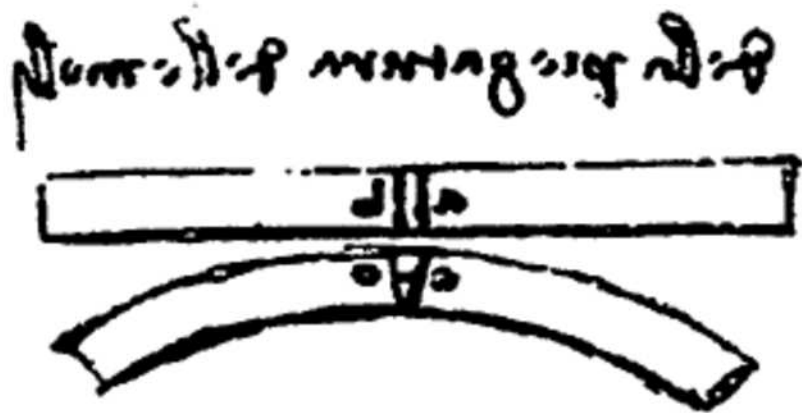
$$y = \frac{ql^4}{24EI} \left(\frac{x}{l} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right)$$

レオナルド・ダ・ヴィンチの素描には さまざまな変形の様子がスケッチされている

「始めも中途も終わりも、五官のいずれをも通過しない
科学は空虚で誤謬に満ちている」〔ウルビノ稿本33〕



様々な長さの鉄線の強さの試験
(アトランティコ手稿82v-b)

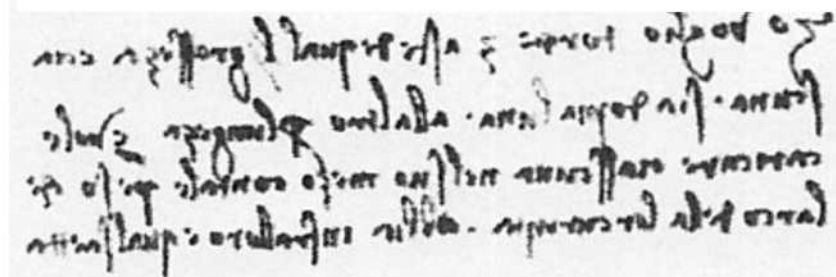


ばねの曲げについて
(マドリッド手稿I 84r)

レオナルドは微積分の確立されていない時代に 材料力学の正しい知識に到達していた

北川浩, レオナルドの‘はりの問題’を解く (4) — 自然に備わった論理としての線型性 —, 機械の研究, 62 (2010), pp.608-616.

いま太さが同じで, 長さが次々に倍化される3本の棒をもったとする. ここでそれぞれの棒の真ん中に, 3本の弓の引きが等しくなる重さを持つ錘をかけてみたい (マドリッド手稿137r)



長さの比が1:2:4の, 3本の単純支持はりの中央にそれぞれ64, 8, 1の錘を吊るすと, 最大たわみが等しい (図の錘には鏡文字で **64 8 1** と記されている)

〔この問題の解〕

$$\delta = \frac{Pl^3}{48EI}$$

渋谷陽二・中谷彰宏「材料力学」(2017),コロナ社
115ページ, 式 (6.32)

たわみの方程式の解法（静定問題）

要素技術（レベル1の技術）

直接積分法（たわみの方程式を出発点）

直接積分法（たわみの基礎式を出発点）

モーメント面積法

エネルギー法

...

有用なテクニック（レベル2の技術）

重ね合せの原理を用いる方法

特異関数を用いる方法

...

今日はここまで講述しました

次回

材料力学2025 シーズン 2

第4話 はりのたわみ 後編

2025年6月17日 (火)

Coming Soon . . .