

材料力学2025 シーズン 2

第1話 はりの曲げ応力 前編

2025年6月6日（金）

中谷 彰宏

教科書「渋谷陽二，中谷彰宏，材料力学，(2017)，コロナ社」
1, 2, 3, 4, 10, 11章（春学期の授業）を学習し終えて、
5, 6, 7, 8, 9, 12, 13章（夏学期の授業）をこれから学ぶ諸君のために

構造の階層性: 明石海峡大橋のケーブル

ミクロ



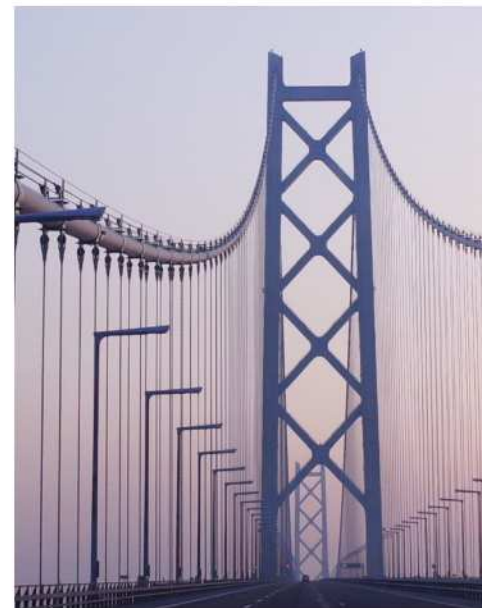
ワイヤー
直径5.23mmの鋼

メゾ



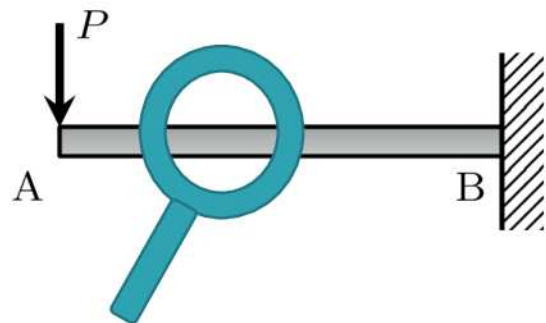
ストランド
127本のワイヤー

マクロ



ケーブル
290本のストランド

マクロとミクロ



Benedict Cumberbatch stars as Sherlock

マクロ (x のみの関数)

反力、支持モーメントは？

曲げモーメント分布は？

せん断力分布は？

変形は（たわみ、たわみ角）は？

ミクロ (x, y, z の関数)

応力は？ ひずみは？

フックの法則が両者を関係づける } 春学期に既に学んだこと

マクロとミクロを分離・再結合するための理論

材料は何でできているか？

断面はどのような形か？

ミクロとマクロを分離・再結合するための仮定（仮説）は？

夏学期前半でこれらを学ぶ、そしてできるようになること

静定問題について、マクロに評価した力学状態を使って、ミクロな応力やひずみを計算する、さらにマクロな変形について計算する

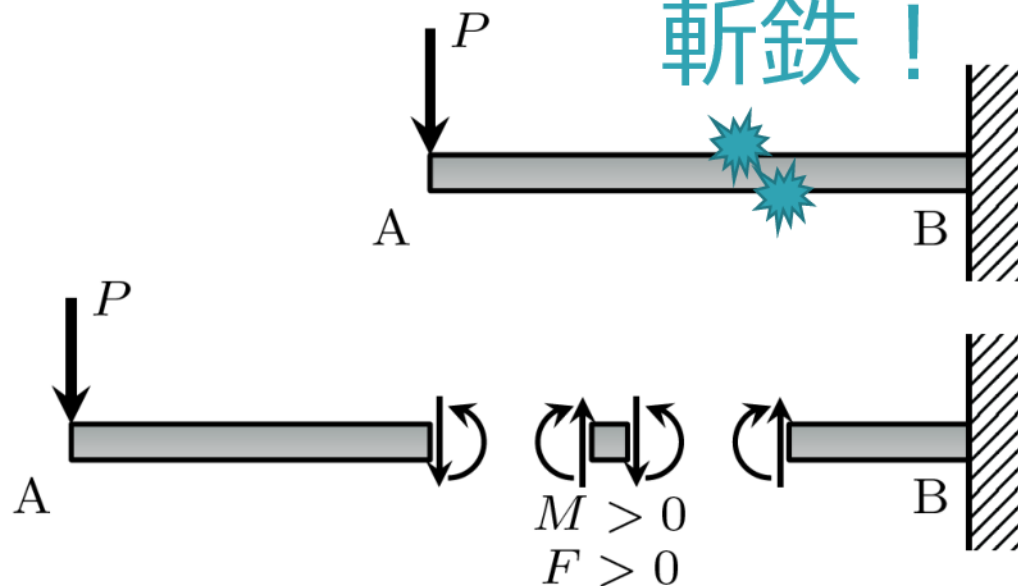
不静定問題（釣り合い方程式だけでは力学状態が定まらない問題）答えをだすことができないが、これらの理論体系を全て整えることによって解くことができるようになる（マクロとミクロの連立方程式として問題を解くという意味になる）

切断法の極意

(method of section)

つまらないものを切断すると
見えなかったものが見える！

斬鉄！



石川五エ門
(モンキーパンチ、「ルパン三世」)

またつまらぬものを
斬ってしまった

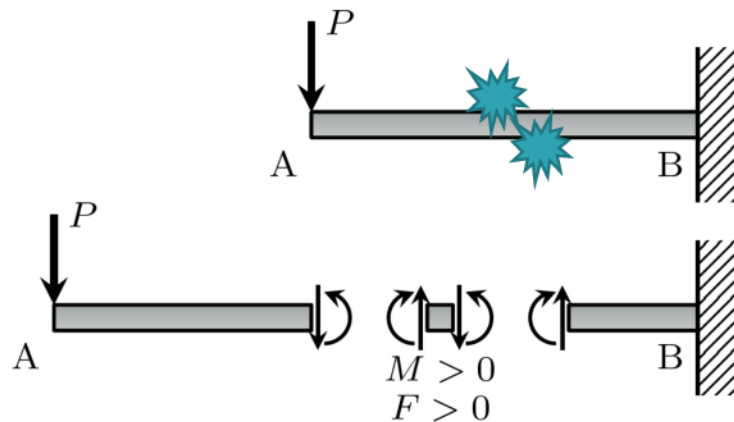
拙者このあと度々
参上いたします！



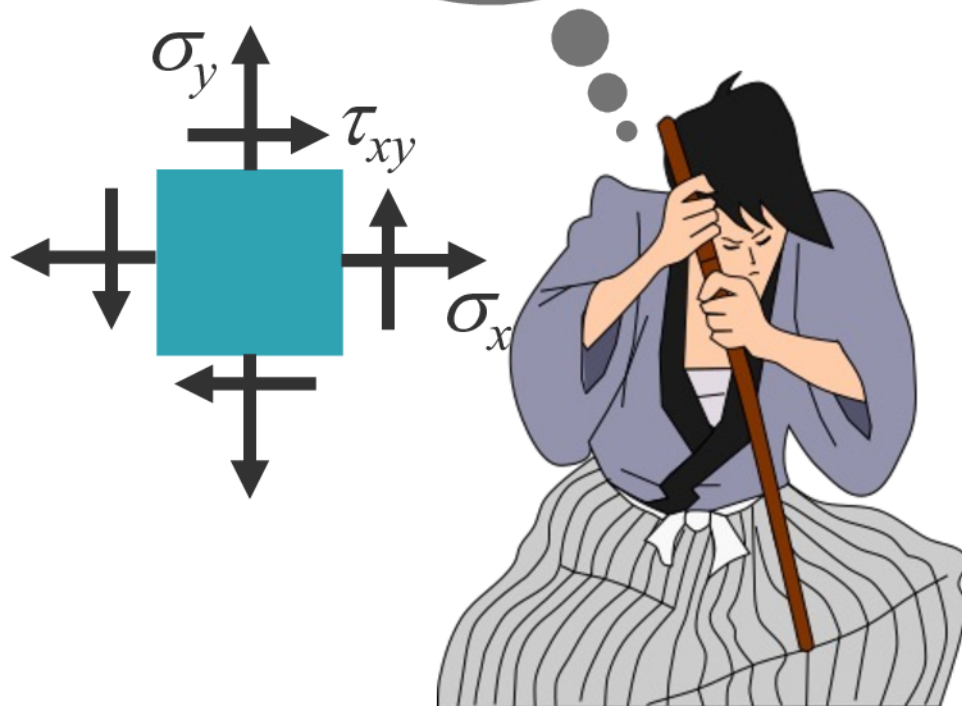
切断法の極意

(method of section)

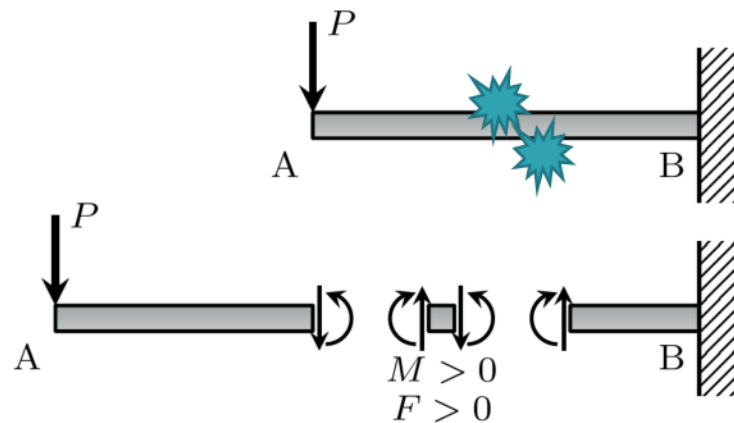
春学期は x 軸（に垂直な断面）
を主にスライスしていた



ミクロな応力を知るためには
 y 軸、 z 軸（に垂直な断面）にも
斬らねば...



切断法の極意 (method of section)

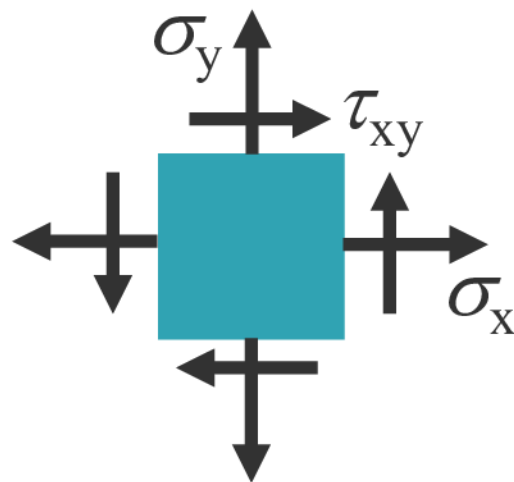


切断した面を元通りすきまなく接合するためには、切断した面にある分布力を作用させる必要がある。

この分布力は作用反作用の法則、力のつりあい（平衡方程式）を満足していなければならない。

切断した面に作用する分布力から応力（内力分布）を知ることができる

ミクロな応力を知るためには
 y 軸、 z 軸（に垂直な断面）にも
斬らねば...



モンキーパンチ：
石川五エ門（ルパン三世）



材質や形状についてのひとまずの設定と定義

材料 (material)

フックの法則 (Hooke's law) : 線形性

等方 (isotropic) : どの方向も同じ

均質 (homogeneous) : どの部分も同じ

形状 (shape)

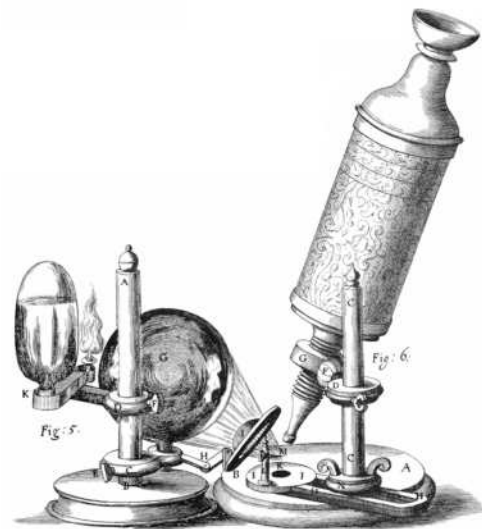
真直はり (straight beam) : 軸線が直線

一様断面 (uniform cross section) : どの断面も同じ

対称曲げ (symmetrical bending) そのための形状の前提

断面に鉛直方向に対して左右対称な対称軸

対称面 : 断面の対称軸と軸線を含む平面



Robert Hooke (1635-1703)

外力の規定も含めた設定と定義、変形状態の仮説

対称曲げ (symmetrical bending)

対称曲げの材質・形状の条件を満たす

横荷重 (lateral force) は対称面に沿って作用

モーメントは対称面に垂直な軸まわりに対称面において作用

純曲げ (pure bending)

均一材料からなる一様断面の真直はりに
一様な曲げモーメントが作用

はりを繊維の束からなる構造とみたとき、
すべての繊維はあたかも独立であるかのようにふるまう

横方向の垂直応力やせん断応力は繊維を介して伝達されない

ベルヌーイ・オイラーの仮説 (Bernoulli-Euler's hypothesis)

変形前に、はりの軸線に垂直な横断面は、変形後も平面を保ち、かつ、
変形後の軸線に直交



Daniel Bernoulli
(1700-1782)



Leonhard Euler
(1707-1783)

中立面と中立軸

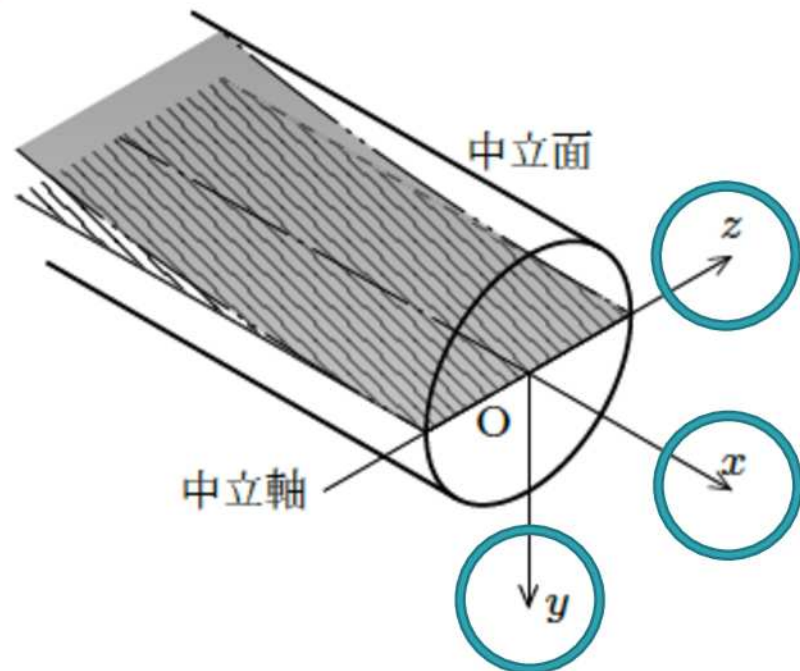
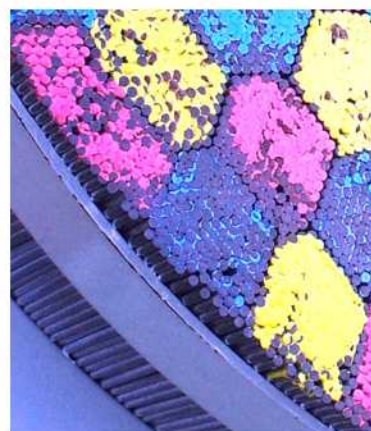


図 5.1 中立面と中立軸

座標系にも注目



曲げモーメントによる
繊維に働く力と伸び縮み

引張を受けて伸びる繊維と圧縮を受けて縮む繊維がある

中立面 (neutral plane)

弧長が変化しない繊維が集まってできる面

中立軸 (neutral axis)

軸線に垂直な横断面と中立面の交線

コンセプト

“考えてみようたのしいことを♪”

目標

曲げモーメントが作用する断面の任意点の応力分布、ひずみ分布を知る

方針

ベルヌーイ・オイラーの仮説という幾何的な仮定が出発点。その下では中立軸を通る繊維のひずみは0であり、断面内でのひずみ分布は、中立軸からの距離に比例（フックの法則から、応力分布についても同様）

中立軸の位置と中立軸の曲率半径（曲率の逆数）はこの段階ではまだ未知なので、辛抱強くそれを求めるための方程式の導出を目指す

中立軸からある距離離れた位置の繊維のひずみを曲率半径で表現（スピノフ的オプション：フックの法則から断面の変形も予測）

繊維のひずみから、フックの法則を用いて、繊維の応力を計算

断面の応力分布の合力と合モーメントが、それぞれ、軸力と曲げモーメントに一致するという二つの釣り合い方程式からなる連立方程式を導出

それを解いて、未知数だった中立軸の位置と曲率半径（曲率の逆数）を決定。その結果を定式化の途中で得られた式に代入すると、それらが公式として利用できるようになる

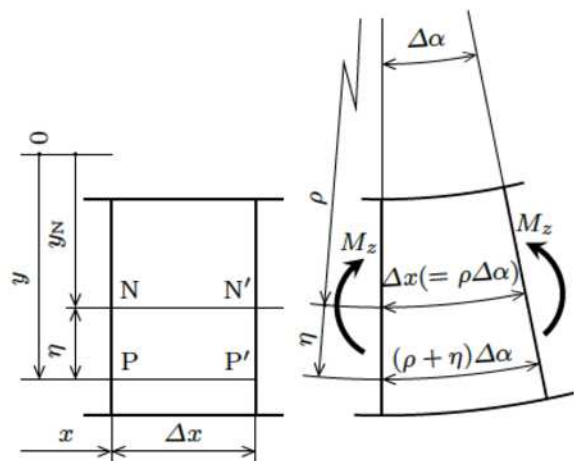


図 5.2 はりの変形

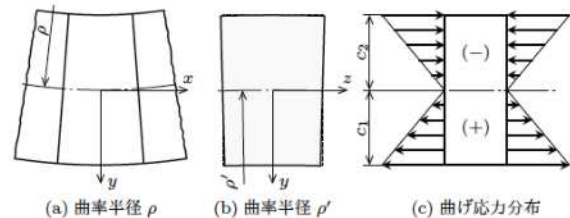


図 5.3 はりの曲率半径と曲げ応力分布

はりの変形 (前編：中立軸の位置、曲率半径から繊維のひずみまで)

中立軸の仮定と断面位置の表現

$$\eta = y - y_N$$

曲率 $\kappa = \frac{\Delta\theta}{\Delta x} \rightarrow \frac{d\theta}{dx}, \quad (\Delta x \rightarrow 0)$

$$\Delta\theta = -\Delta\alpha$$

曲率半径 $\frac{\Delta\alpha}{\Delta x} = \frac{1}{\rho}, \quad \kappa = -\frac{1}{\rho}$

ひずみ

$$\varepsilon = \frac{(\rho + \eta)\Delta\alpha - \Delta x}{\Delta x} = \frac{(\rho + \eta)\Delta\alpha - \rho\Delta\alpha}{\rho\Delta\alpha} = \frac{\eta}{\rho}$$

断面内のひずみ (スピノフ的オプション)

$$\varepsilon_x = \varepsilon, \quad \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x, \quad \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x = -\nu\frac{\eta}{\rho}$$

$$\rho' = \rho/\nu$$

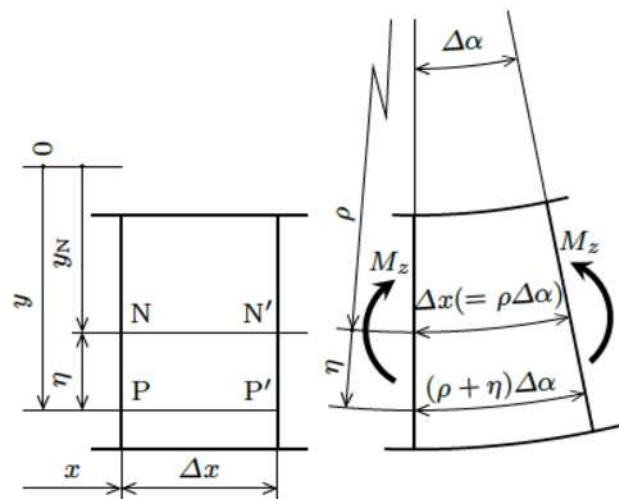
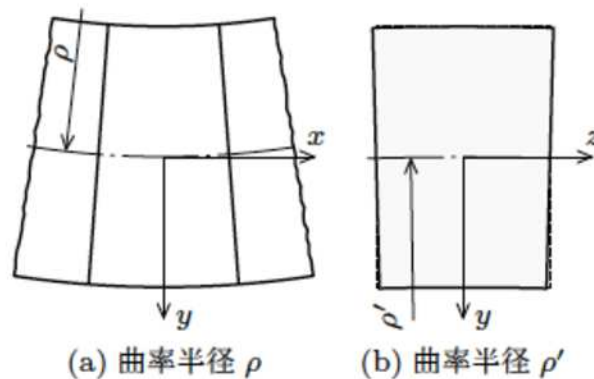


図 5.2 はりの変形



(a) 曲率半径 ρ

(b) 曲率半径 ρ'

はりの変形 (中編：応力分布、力の釣り合いから、中立軸の位置の決定まで)

フックの法則

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\eta}{\rho}$$

断面内の微小面積素に作用する内力

$$\sigma dA = \frac{E\eta}{\rho} dA$$

軸力 (純曲げでは0)

$$N = \int_A \frac{E\eta}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A \eta dA = 0$$

ヤング率 E が座標に依らず一定の場合に限ることに注意！

$$\int_A \eta dA = 0$$

中立軸に関する断面一次モーメントが0である
中立軸は図心を通る

図心を原点とし y 座標を再定義すると公式が簡単化されるので便利

$$y_N = 0, \quad \eta = y$$

はりの変形 (後編：モーメントの釣り合いから、曲げ応力の公式まで)

モーメントの釣り合い

$$M = \int_A \frac{E y^2}{\rho} dA = \frac{EI}{\rho}$$

断面二次モーメント

(moment of inertia of area,
second moment of area)

$$I = \int_A y^2 dA$$

曲げ剛性 (bending stiffness)

$$EI$$

曲率半径と曲げモーメントの関係

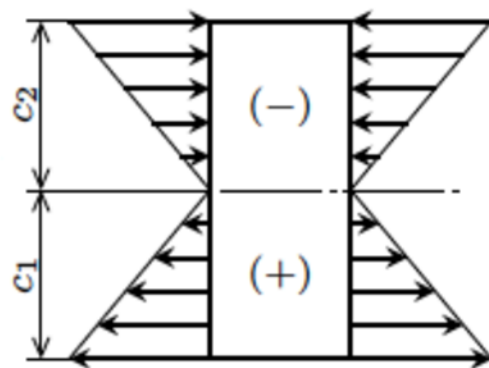
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

曲げ応力 (bending stress)

再びフックの法則

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{y}{\rho} = \frac{M}{I} y$$

y のみの関数
(z に依らない)

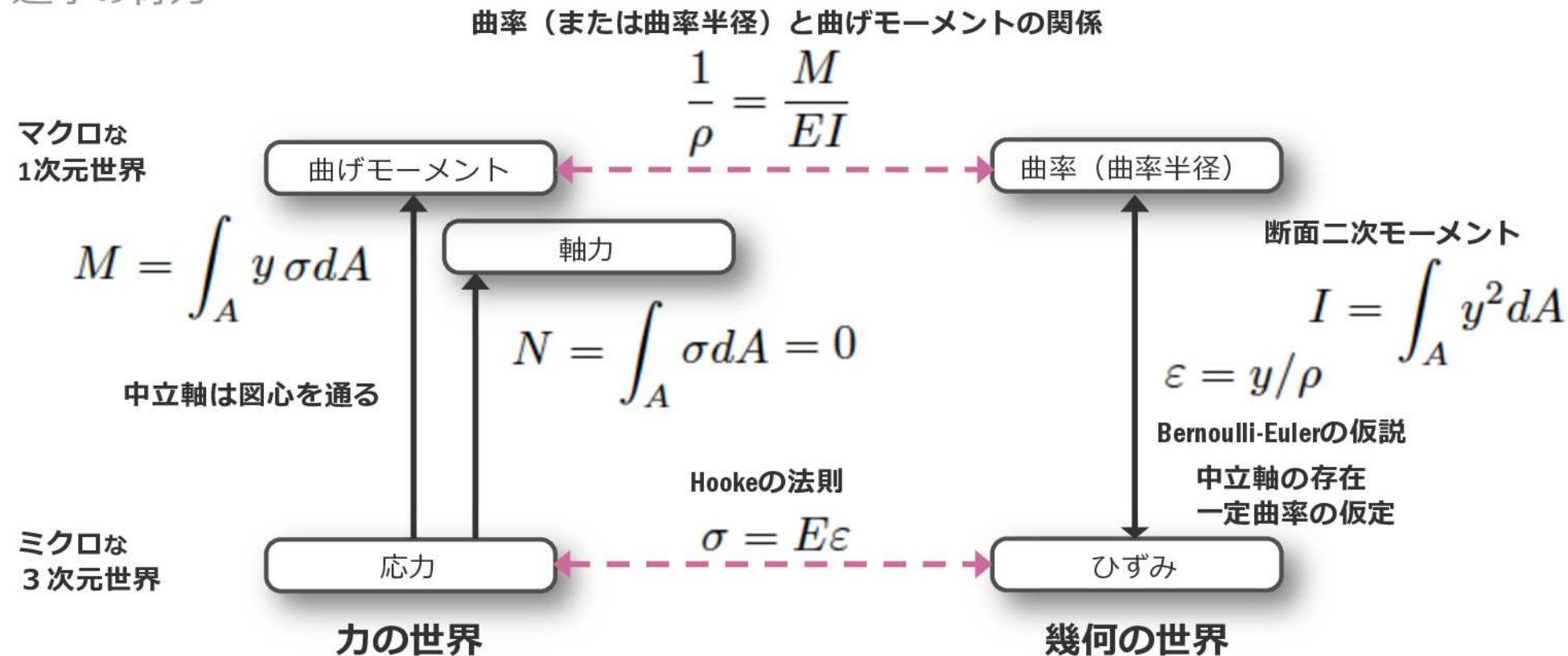


(c) 曲げ応力分布

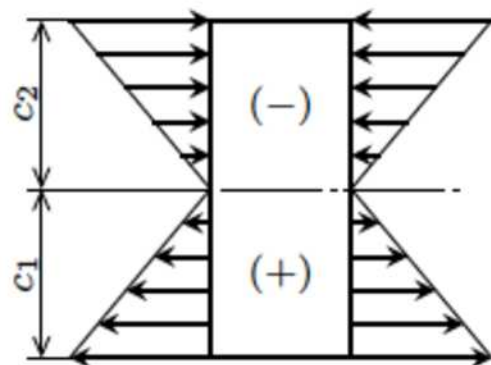
現在公開可能な情報

はりの曲率（または曲率半径）と 曲げモーメントの関係

進撃の材力



曲げ応力、縁曲げ応力と断面係数の公式



(c) 曲げ応力分布

曲げ応力 (bending stress)

$$\sigma = \frac{M}{I}y \quad y \text{ のみの関数 (} z \text{ に依らない)}$$

縁曲げ応力 $y = c_1, y = -c_2$

上縁と下縁は絶対値が最大となる候補点であり設計上で重要な箇所

$$\sigma_1 = \frac{M}{I}c_1, \quad \sigma_2 = \frac{M}{I}(-c_2)$$

$$\sigma_1 = \frac{M}{Z_1}, \quad \sigma_2 = -\frac{M}{Z_2}$$

断面係数 (section modulus)

$$Z_1 = \frac{I}{c_1}, \quad Z_2 = \frac{I}{c_2}$$

現在公開可能な情報

進撃の材力

曲げモーメント $M(x)$ が作用する横断面に作用している

曲げ応力分布 $\sigma(x, y)$

縁曲げ応力 σ_1, σ_2

を評価するためには、まず、横断面の

中立軸の位置 (図心の位置)

断面二次モーメント $I(x)$

中立軸 (図心を通る軸) から縁までの距離 c_1, c_2

を知る必要があるらしい

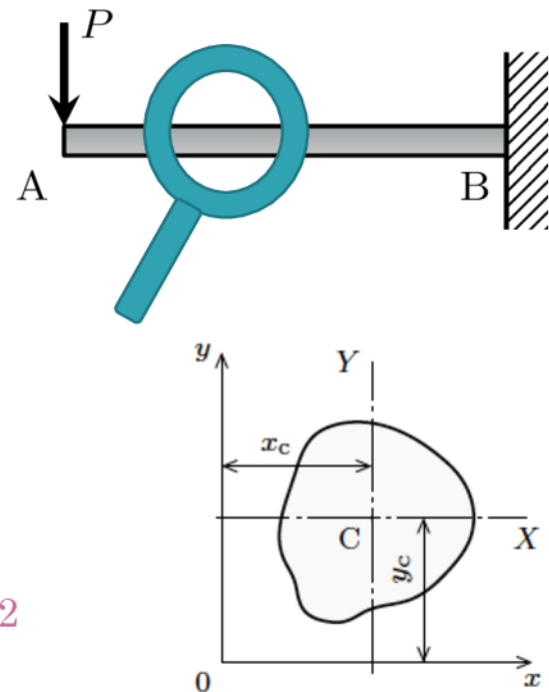


図 5.4 断面の図心と図心軸

面積・図心・断面二次モーメント

断面モーメント (x 軸を基準とした平面図形のモーメント)

面積 (0次モーメント) $A = \int_A dA$

断面一次モーメント $S_x = \int_A y dA$

断面二次モーメント $I_x = \int_A y^2 dA$

図心の座標 $y_c = S_x / A$

cf. 画像のモーメント

画像の特徴量

画像認識 (AIによる) にも用いられている

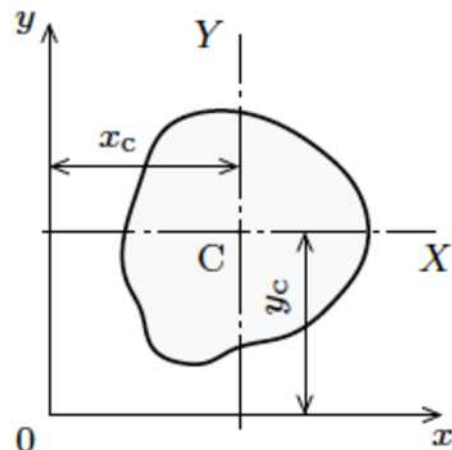


図 5.4 断面の図心と図心軸



面積・図心・断面二次モーメントに関する性質

図心を通る軸に関する断面一次モーメントは0である
(図心は断面一次モーメントが0となる軸上にある)

断面が対称軸を持つとき、図心は対称軸上にある

領域積分は、積分が容易に評価できる部分領域に分割して、部分領域ごとに積分を評価した後、それらの和として評価することが可能である

(断面一次モーメント、断面二次モーメントについても同様だが、分割し、和をとる時には基準軸を揃えなければならないので、次に述べる軸の平行移動の公式を用いるとよい)

$$\begin{aligned} A &= \int_A dA = \int_{A^{(1)}} dA + \int_{A^{(2)}} dA + \cdots + \int_{A^{(N)}} dA \\ &= A^{(1)} + A^{(2)} + \cdots + A^{(N)} \end{aligned}$$



軸の平行移動の公式（材料力学 p.91, 例題5.1）

図心の定義

$$\int_A y dA = y_c A \quad \int_A (y - y_c) dA = 0$$

図心断面二次モーメント I_c

図心から y_c 離れた x 軸の断面二次モーメント I_x

$$\begin{aligned} I_x &= \int_A y^2 dA = \int_A (y - y_c + y_c)^2 dA \\ &= \int_A (y - y_c)^2 dA + 2y_c \int_A (y - y_c) dA + y_c^2 \int_A dA \\ &= I_c + y_c^2 A \end{aligned}$$

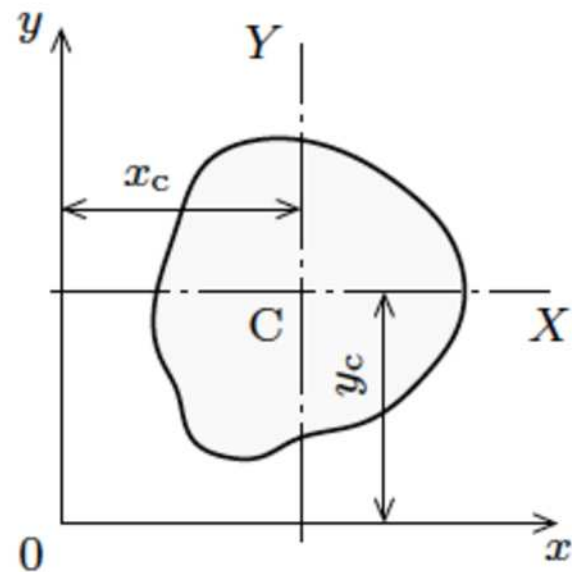


図 5.4 断面の図心と図心軸

図心断面二次モーメント I_c は最小値

複雑図形を簡単図形ごとの計算の総和として考える

断面一次モーメント、図心の求め方

$$\int_A x dA = \int_{A^{(1)}} x dA + \int_{A^{(2)}} x dA + \cdots + \int_{A^{(N)}} x dA$$
$$x_c = \frac{1}{A} (x_c^{(1)} A^{(1)} + x_c^{(2)} A^{(2)} + \cdots + x_c^{(N)} A^{(N)})$$

断面二次モーメントの求め方

$$I_x = \int_A y^2 dA = I_c^{(1)} + (y_c^{(1)})^2 A^{(1)} + I_c^{(2)} + (y_c^{(2)})^2 A^{(2)}$$
$$\cdots + I_c^{(N)} + (y_c^{(N)})^2 A^{(N)}$$

断面係数と断面二次半径

断面係数 (section modulus)

$$Z = \frac{I_x}{c}$$

c : 図心から縁までの距離 (対称図形)

$$Z_1 = \frac{I_x}{c_1}, \quad Z_2 = \frac{I_x}{c_2}$$

c_1, c_2 : 図心から縁までの距離 (非対称図形)

断面二次半径 (radius of gyration of area)

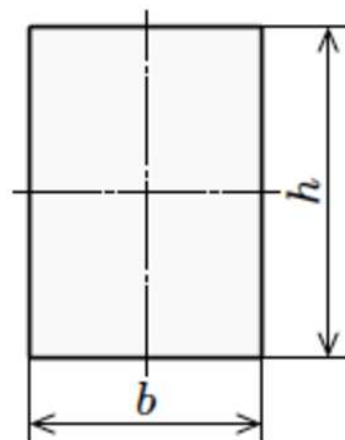
$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

長方形と円（材料力学 p.94, 例題5.2）

(a) 長方形 底辺 b , 高さ h の長方形は, 定義に従って,

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} by^2 dy = \left[\frac{b}{3} y^3 \right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12} \quad Z = \frac{bh^2}{6}$$

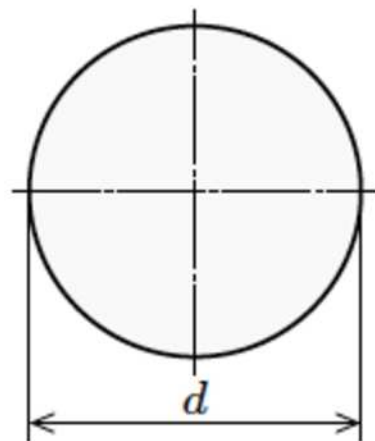
長方形



(c) 円[†] 直径 d の円については, $b(y) = \sqrt{d^2 - (2y)^2}$ として,

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{-d/2}^{d/2} b(y)y^2 dy = \frac{\pi d^4}{64}, \quad Z = \frac{\pi d^3}{32}$$

円



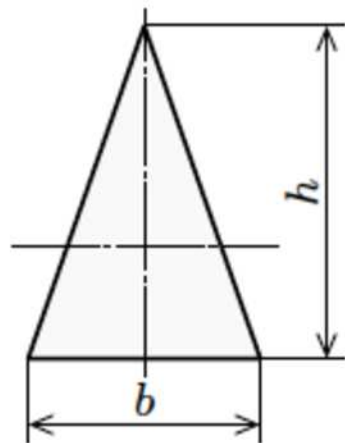
この二つは基本的な図形なので丸暗記!!

各種断面形状（材料力学 p.94, 例題5.2）

(b) 二等辺三角形 底辺 b , 高さ h の三角形については,

$$b(y) = \frac{b}{3h}(2h - 3y)$$

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{-h/3}^{2h/3} b(y)y^2 dy = \frac{bh^3}{36}, \quad Z = \frac{bh^2}{12}, \quad \frac{bh^2}{24}$$

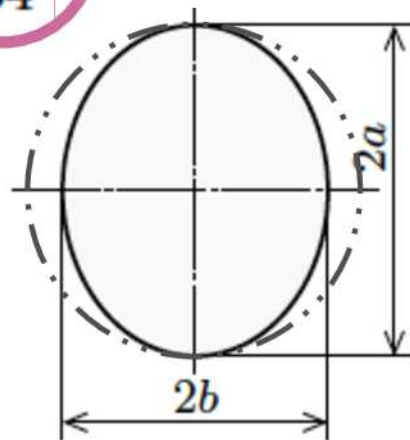


このように定義にしたがって積分するのが基本だが

領域の加除、軸の平行移動の公式を使って簡便に計算できることも多い

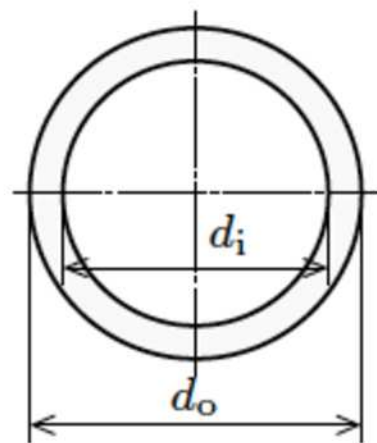
各種断面形状（材料力学 p.94, 例題5.2）

$$\frac{\pi d^4}{64}$$



(d) **だ円** 長径 $2a$, 短径 $2b$ のだ円については, 長径 $d = 2a$ を直径とする円を補助円とする方法が簡単である。 $b(y)$ について, だ円と補助円の比は, y に依らず b/a で一定であるので, 補助円の断面二次モーメントに (b/a) を乗じればよい。

$$I_x = \frac{b}{a} \frac{\pi (2a)^4}{64} = \frac{\pi b a^3}{4}, \quad Z = \frac{\pi b a^2}{4}$$



(e) **中空円** 外径 d_o , 内径 d_i の中空円については, それぞれを直径とする円の断面二次モーメントの差を評価すればよい。

$$I_x = \frac{\pi}{64} (d_o^4 - d_i^4), \quad Z = \frac{\pi}{32} \frac{(d_o^4 - d_i^4)}{d_o}$$

各種断面形状（材料力学 p.95, 例題5.2）

(f) 薄肉円環 平均直径 d , 厚さ t の薄肉円環 ($t \ll d$) に対しては, 中空円の断面二次モーメントにおいて, $d_o = d + t$, $d_i = d - t$ とし, t に関する高次の微小量を無視すると,

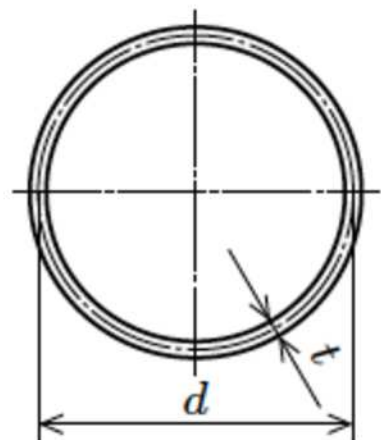
$$I_x = \frac{\pi d^3 t}{8}, \quad Z = \frac{\pi d^2 t}{4}$$

確認してほしいこと（混乱するという話をときどき耳にする）

薄いというのは、 $t \ll d$ のこと

もちろん t は、式に現れる

平均直径 d 、外径 $d + t$ 、内径 $d - t$ の区別は意味がない（区別しない）



円や円環については、後で述べる断面極二次モーメント I_p を計算し $I_x (= I_y) = I_p/2$ としても求めることができる。

各種断面形状（材料力学 p.95, 例題5.3）

箱形断面

図 5.6 に示すように、幅 B 高さ H の長方形から、幅 b 、高さ h の長方形領域を取り除いた中空の長方形に対して、図心断面二次モーメントを求めなさい。

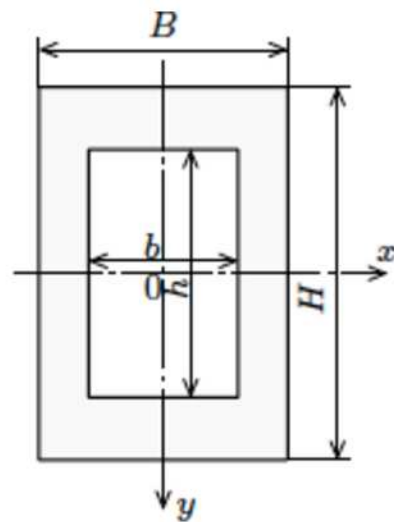


図 5.6 箱形断面

$$\frac{bh^3}{12}$$

中実の長方形断面から長方形領域を取り除く

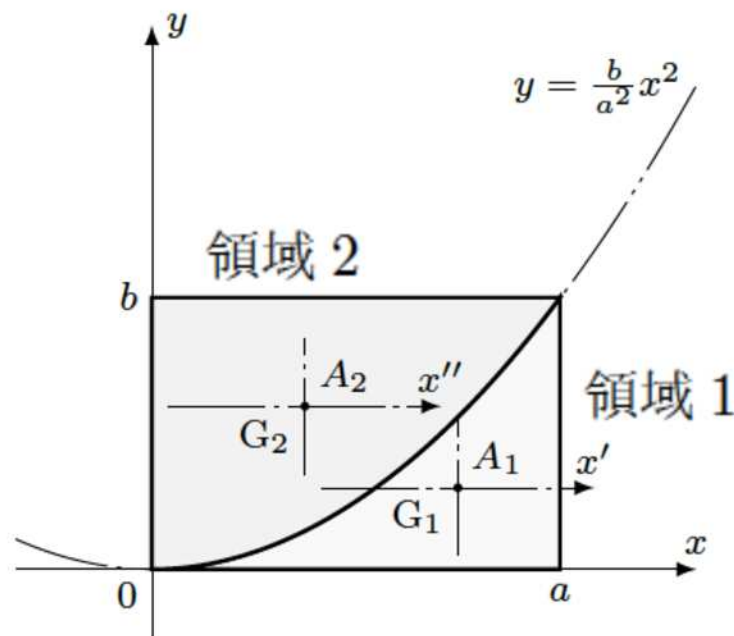
中実の長方形断面、取り除く長方形、得られる箱形断面の図心は一致しているので、軸を平行移動する必要はないので簡単

$$I_x = \frac{1}{12}(BH^3 - bh^3), \quad I_y = \frac{1}{12}(HB^3 - hb^3)$$

面積・図心・断面二次モーメントの計算例

座標軸に平行な直線と放物線で囲まれる領域

- (1) 領域 1 と領域 2 の、面積 A_1 、 A_2 は？
- (2) 領域 1 と領域 2 の、図心 G_1 、 G_2 の座標は？
- (3) 領域 2 の x 軸に関する断面二次モーメントは？
- (4) 領域 2 の x 軸に平行な軸 x'' に関する図心断面二次モーメントは？

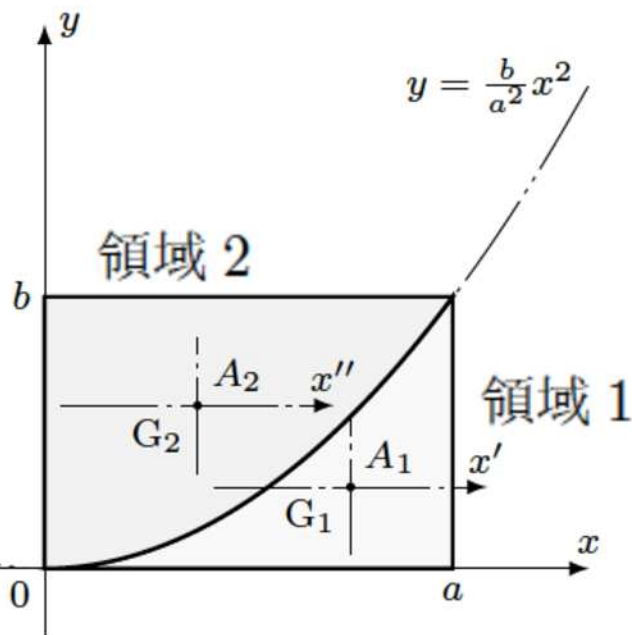


考えてみよう♪

座標軸に平行な直線と放物線で囲まれる領域の面積や図心は、
モーメント面積法で必要になるので、計算して覚えておくと便利！

面積・図心・断面二次モーメントの計算例

座標軸に平行な直線と
放物線で囲まれる領域



(1) 領域 1 と領域 2 の、面積 A_1 、 A_2 は？

$$A = ab, \quad A_1 = \int_0^a \frac{b}{a^2} x^2 dx = \frac{1}{3} ab, \quad A_2 = \int_0^b \frac{a}{\sqrt{b}} \sqrt{y} dy = \frac{2}{3} ab \quad (= A - A_1)$$

(2) 領域 1 と領域 2 の、図心 G_1 、 G_2 の座標は？

$$x_1 = \frac{1}{A_1} \int_0^a x \frac{b}{a^2} x^2 dx = \frac{3}{4} a, \quad y_2 = \frac{1}{A_2} \int_0^b y \frac{a}{\sqrt{b}} \sqrt{y} dy = \frac{3}{5} b$$

$$A_1 y_1 + A_2 y_2 = A y_c, \quad A_1 x_1 + A_2 x_2 = A x_c,$$

$$y_1 = (A y_c - A_2 y_2) / A_1 = \left[(ab) \left(\frac{b}{2} \right) - \left(\frac{2}{3} ab \right) \left(\frac{3}{5} b \right) \right] / \left(\frac{1}{3} ab \right) = \frac{3}{10} b$$

$$x_2 = (A x_c - A_1 x_1) / A_2 = \left[(ab) \left(\frac{a}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} ab \right) \left(\frac{3}{4} a \right) \right] / \left(\frac{2}{3} ab \right) = \frac{3}{8} a$$

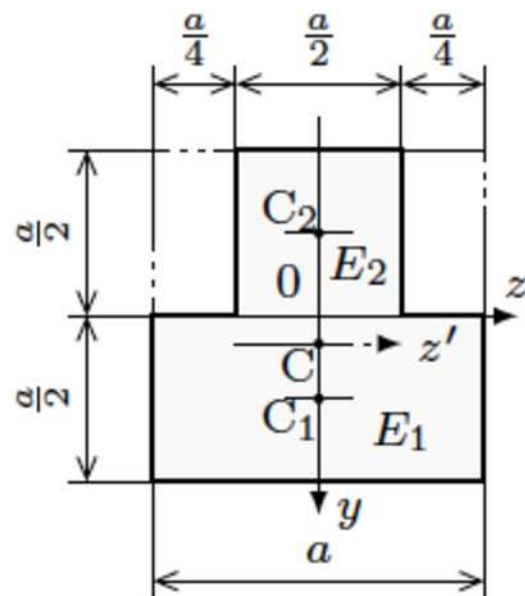
(3) 領域 2 の x 軸に関する断面二次モーメントは？

$$I_x = \int_0^b y^2 \frac{a}{\sqrt{b}} \sqrt{y} dy = \frac{2}{7} ab^3$$

(4) 領域 2 の x 軸に平行な軸 x'' に関する図心断面二次モーメントは？

$$I_{x''} = I_x - y_2^2 A_2 = \frac{2}{7} ab^3 - \left(\frac{3}{5} b \right)^2 \frac{2}{3} ab = \frac{8}{175} ab^3$$

曲げ応力分布に関する計算例



- (1) 断面積 A は？
- (2) 図心 C の座標は？
- (3) 図心断面二次モーメントは？
- (4) 曲げ応力分布 $\sigma_x(y)$ は？

ただし、 $E_1 = E_2$ のとき

考えてみよう♪

曲げ応力分布に関する計算例

面積

$$A_1 = \frac{1}{2}a^2, \quad A_2 = \frac{1}{4}a^2, \quad A = A_1 + A_2 = \frac{3}{4}a^2$$

図心

$$y_c = (A_1 y_1 + A_2 y_2) / A$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2}a^2 \right) \left(\frac{1}{4}a \right) + \left(\frac{1}{4}a^2 \right) \left(-\frac{1}{4}a \right) \right] / \left(\frac{3}{4}a^2 \right) = \frac{1}{12}a$$

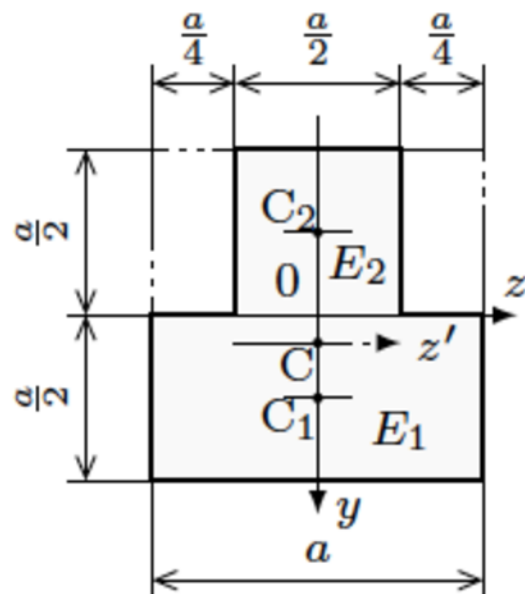
断面二次モーメント

$$I_1 = \frac{1}{12}a \left(\frac{a}{2} \right)^3, \quad I_2 = \frac{1}{12} \left(\frac{a}{2} \right) \left(\frac{a}{2} \right)^3$$

$$I_{c1} = I_1 + (y_c - y_1)^2 A_1 = \frac{1}{96}a^4 + \left(-\frac{1}{6}a \right)^2 \frac{1}{2}a^2 = \frac{5}{192}a^4$$

$$I_{c2} = I_2 + (y_c - y_2)^2 A_2 = \frac{1}{192}a^4 + \left(\frac{1}{3}a \right)^2 \frac{1}{4}a^2 = \frac{19}{576}a^4$$

$$I = I_{c1} + I_{c2} = \frac{5}{192}a^4 + \frac{19}{576}a^4 = \frac{17}{288}a^4$$



曲げ応力分布

$$\sigma_x(y) = \frac{M}{I}(y - y_c) = \frac{288M}{17a^4} \left(y - \frac{1}{12}a \right)$$

縁曲げ応力

$$\sigma_x \left(-\frac{a}{2} \right) = -\frac{168M}{17a^3}, \quad \sigma_x \left(\frac{a}{2} \right) = \frac{120M}{17a^3}$$

縁の切除による縁曲げ応力の低減（材料力学 p.95, 例題5.4）

断面係数（section modulus）

縁の切除による影響を受ける量

断面二次モーメント

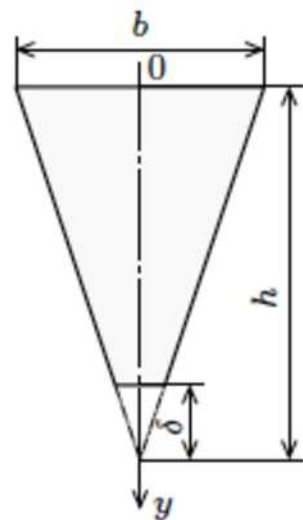
図心の位置

図心から切り取った縁までの距離

断面係数を最大にする切り取り量を決定

$$Z_1 = \frac{I}{c_1}, \quad Z_2 = \frac{I}{c_2}$$

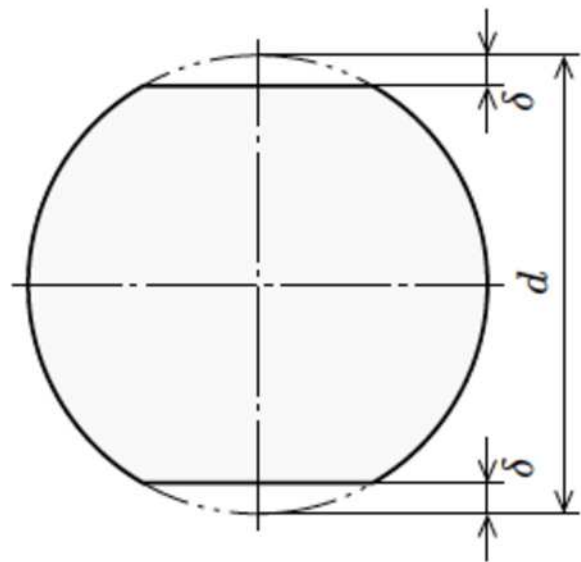
図 5.7 のように、底辺 b 、高さ h の二等辺三角形の断面を有するはりに対して頂点から長さ $\delta = rh$ の部分を取り除く。曲げ応力の最大値が最も小さくなるような比 r の値を求めなさい。



考えてみよう♪

縁の切除による縁曲げ応力の低減（材料力学 p.105, 演習問題5.2）

〔5.2〕 問図 5.1 のように、直径 d の円形断面はりの断面係数を大きくする目的で、上下を外周から δ だけ取り除いて $d - 2\delta$ の平行面をつくった。断面係数が最大となる δ の値を求めなさい。



問図 5.1

断面係数 (section modulus)

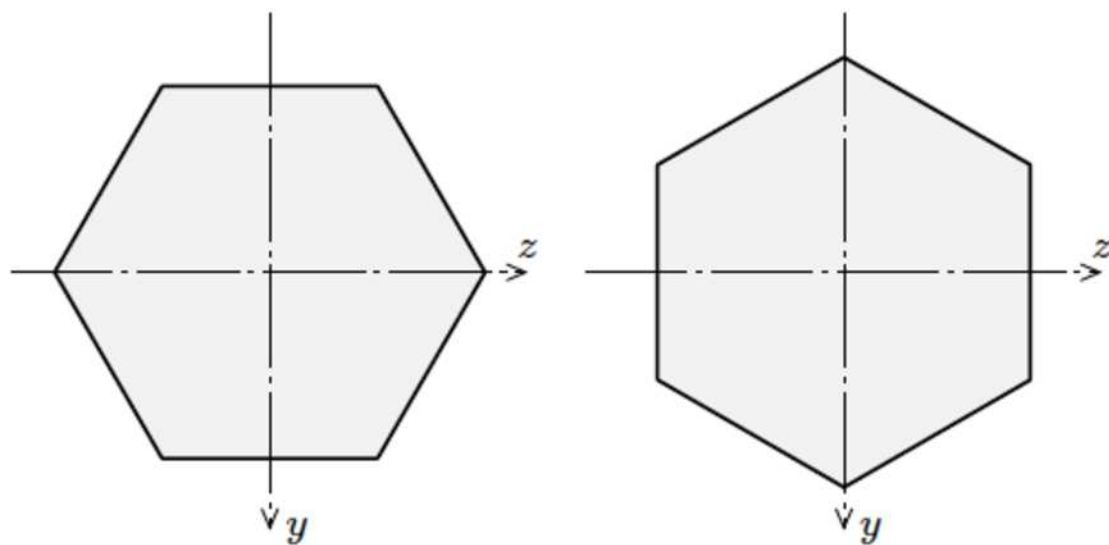
$$Z = \frac{I}{c}$$

断面係数を最大にする切り取り量を決定

考えてみよう♪

配置による縁曲げ応力の低減（材料力学 p.105, 演習問題5.3）

〔5.3〕 問図 5.2 のように、正六角形の断面を有するはりについて、(1) 図心断面二次モーメントは $y-z$ 軸のとりかたに依らないことを示しなさい。(2) 図 (a), (b) について、それぞれの断面係数を求めなさい。



問図 5.2

考えてみよう♪

次回

材料力学2025 シーズン 2

第2話 はりの曲げ応力 後編

2025年6月10日 (火)

Coming Soon . . .