

材料力学2024 シーズン2

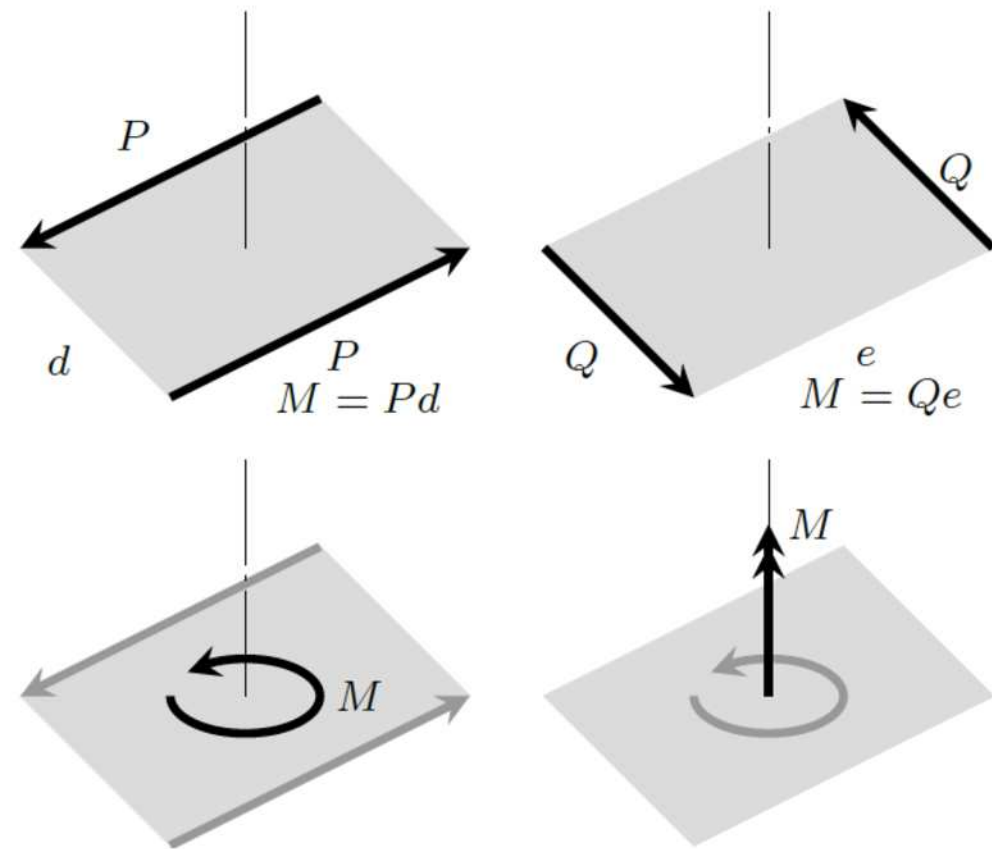
第10話 ねじり 総合問題

2024年7月9日 (火)

中谷 彰宏

教科書「渋谷陽二，中谷彰宏，材料力学，(2017)，コロナ社」
1, 2, 3, 4, 10, 11章（春学期の授業）を学習し終えて、
5, 6, 7, 8, 9, 12, 13章（夏学期の授業）をこれから学ぶ諸君のために

モーメント (moment) ・ 偶力 (couple) (再掲)



偶力 (couple) は大きさが上段左側図のように、同じ向きが互いに反対である力 P (上段右側図では Q) が垂直距離 d (同 e) だけ離れて作用する一組の力である。

面積 $M = Pd = Qe$ のことを偶力のモーメント、あるいは単にモーメント (moment) といい、下段のように図示することができる。

材料力学では力・偶力の作用点近傍の複雑な力学状態は論じない。またその作用点から遠方に与える影響は同一とみなせる (サン・ブナンの原理) ので、偶力とモーメントは同じ意味で使われる。

モーメントベクトルの性質 (下段右側図)

矢印を重ねて描いているモーメントベクトルは、モーメントによる回転が右ねじが進む方向につけると約束。通常の力のベクトルと同様に、大きさと方向が保持される限りどこに移動してもつりあいに関しては影響がない。

また力のベクトルと同様にモーメントベクトルについても合成することもまた逆に分解することもできる。

モーメントベクトルによる図示と モーメントの分解の例

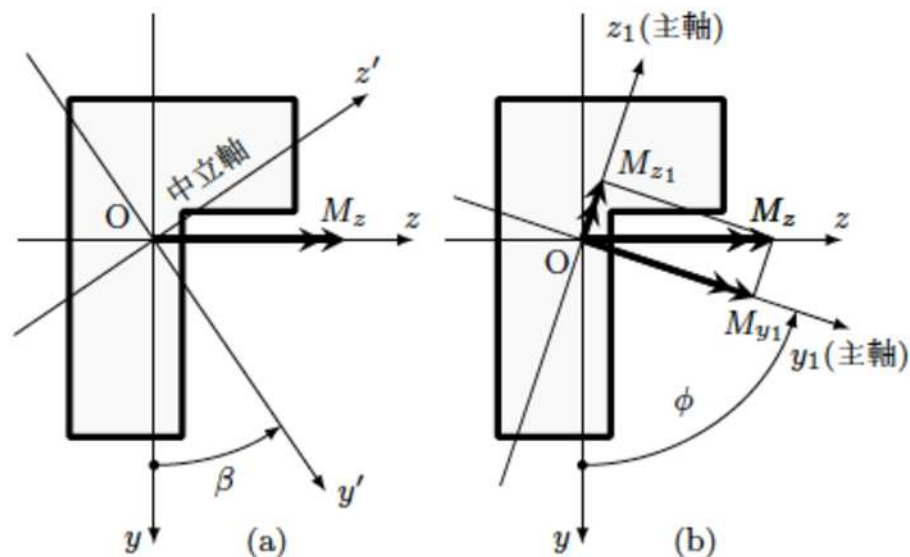
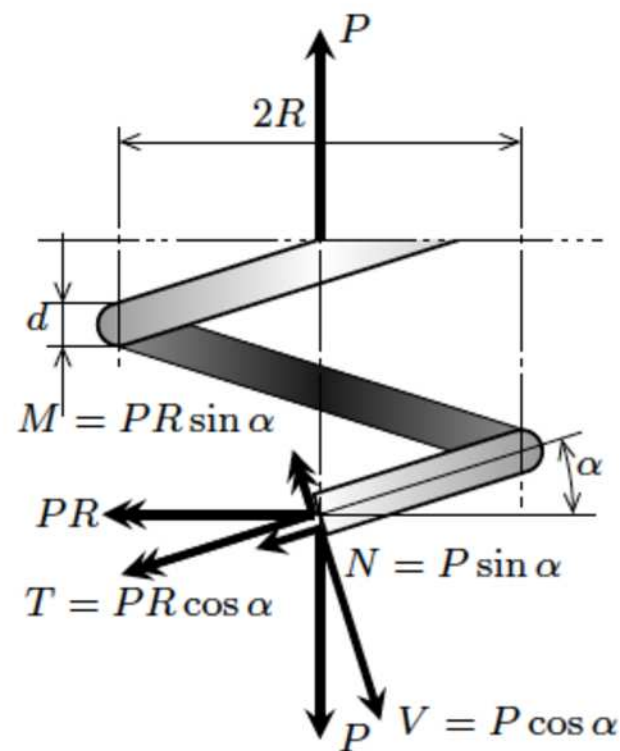


図 5.10 非対称荷重を受けるはり

断面の慣性主軸の方向に分解



曲げモーメント（軸線に垂直な成分）
ねじりモーメント（軸線に平行な成分）
に分解

横断面にはたらく力・モーメントと応力分布のまとめ (再掲)

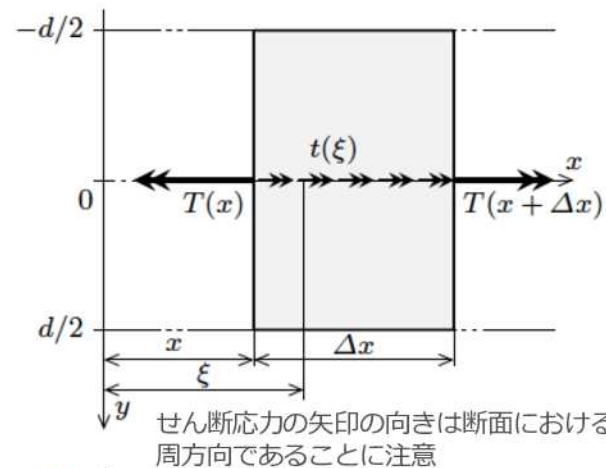
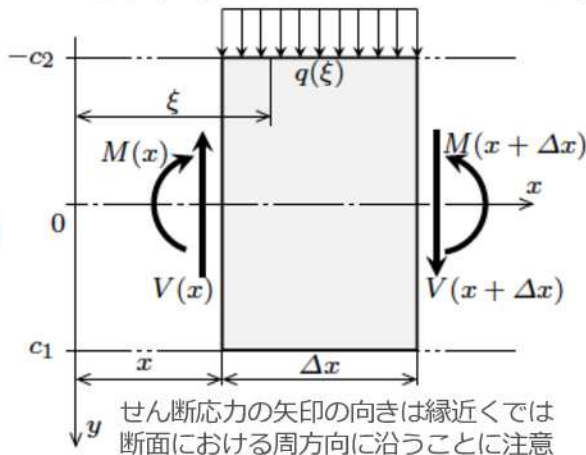
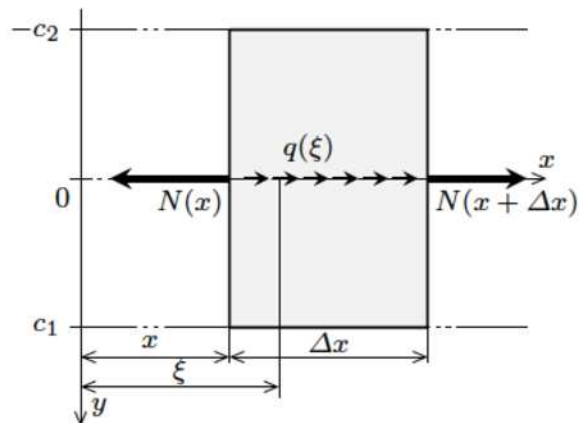
引張・圧縮 (軸力)

曲げ (曲げモーメント・せん断力)

ねじり (ねじりモーメント)

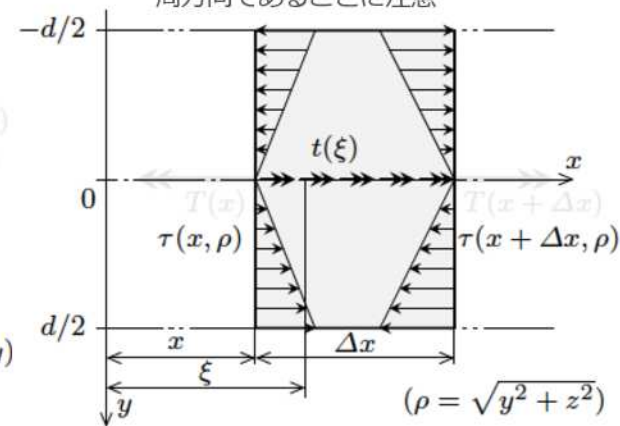
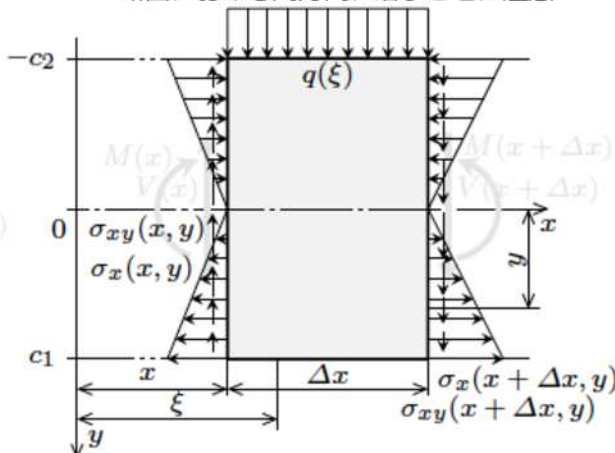
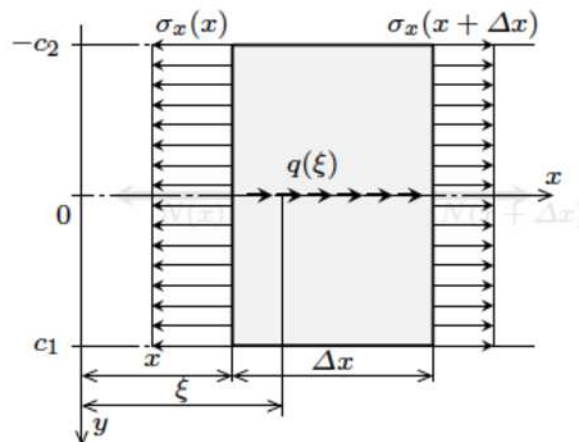
マクロ
問題

軸線 (x)



ミクロ
問題

点 (x, y, z)



組合せ荷重による横断面の応力 (再掲)

横断面の応力

曲げ応力 (曲げ)

$$\sigma = \frac{M}{Z}$$

せん断応力 (ねじり)

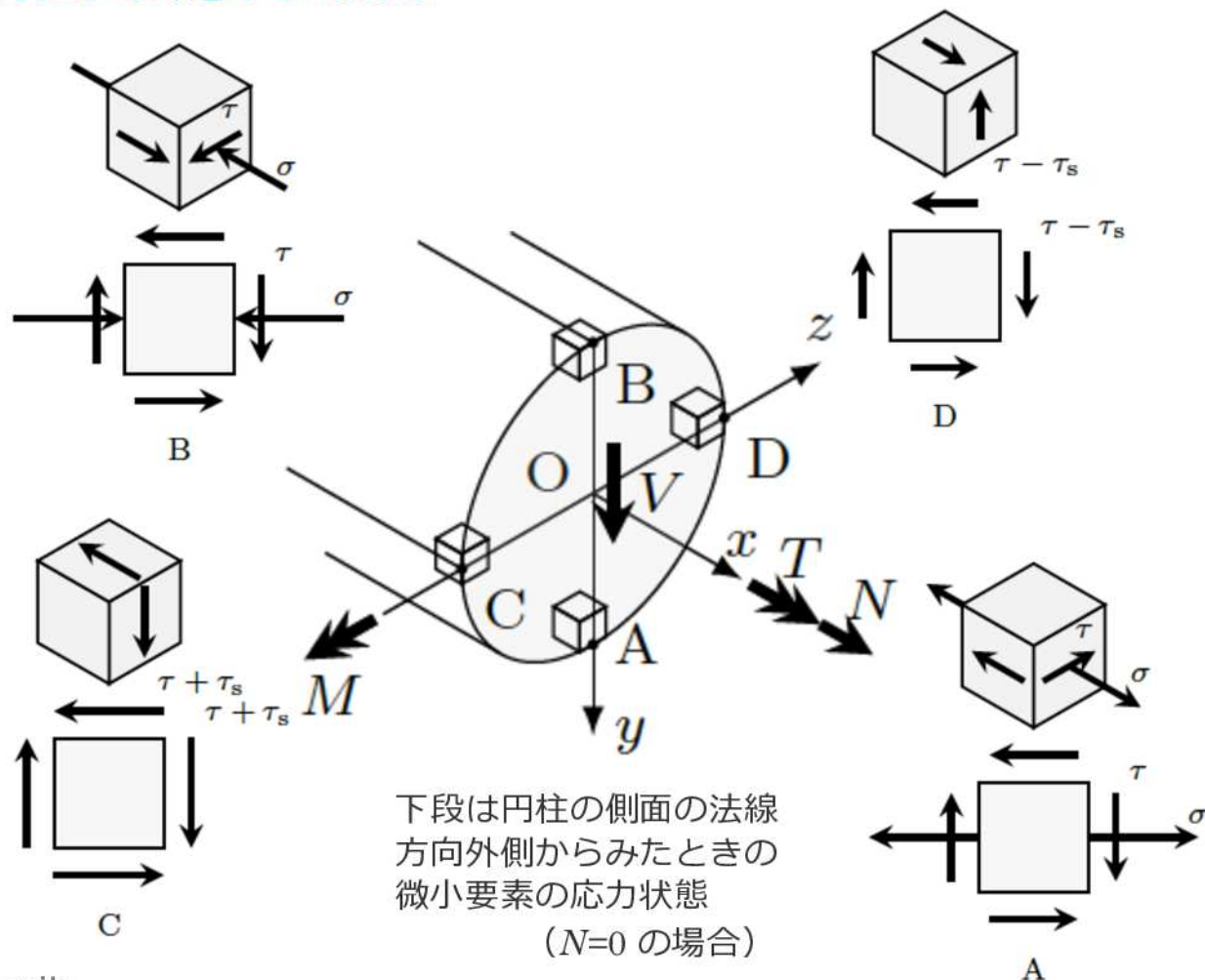
$$\tau = \frac{T}{Z_p}$$

垂直応力 (引張・圧縮)

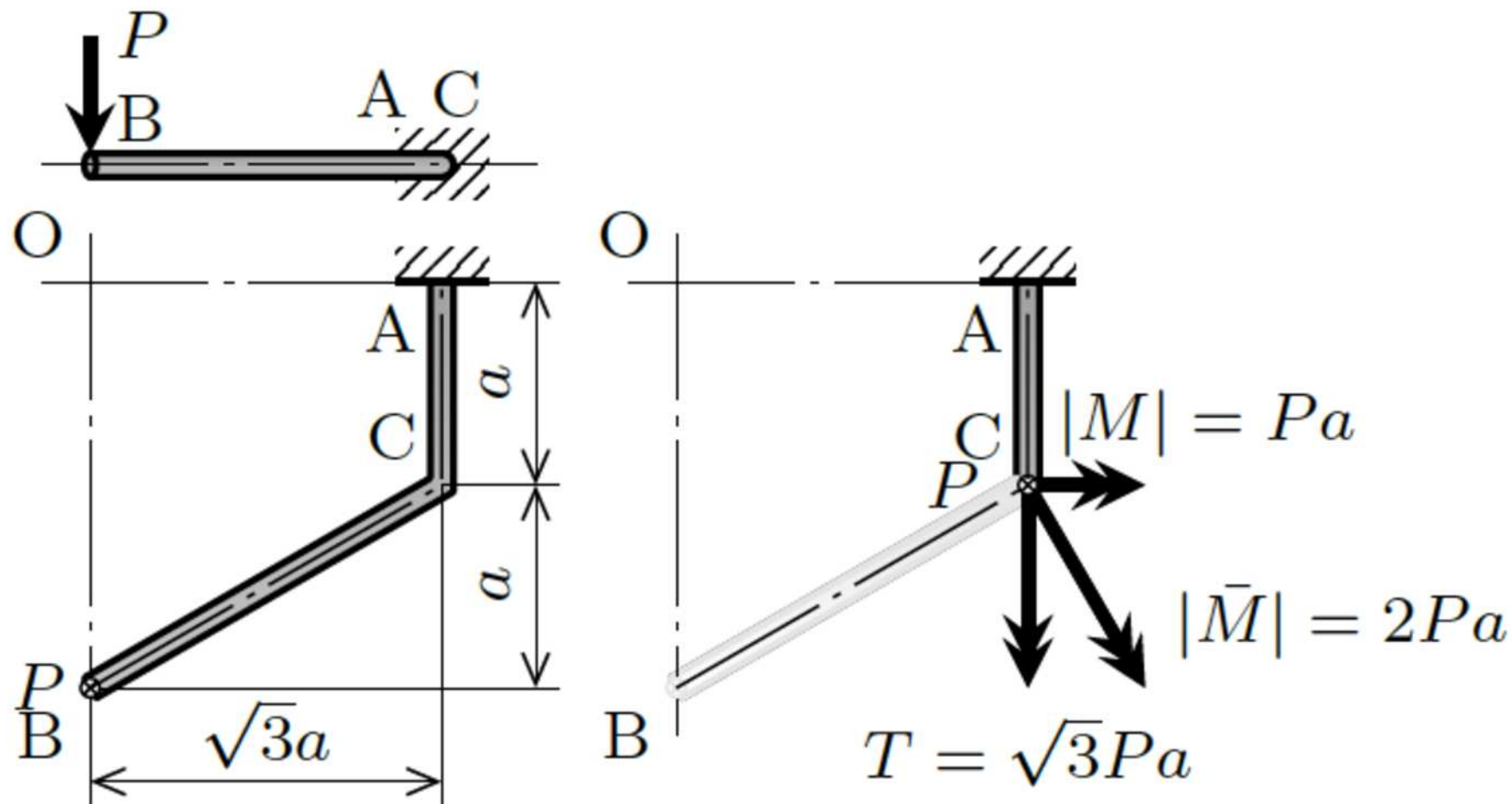
$$\sigma_N = \frac{N}{A}$$

せん断応力 (せん断力)
(円形断面はり)

$$\tau_s = \frac{4V}{3A}$$



3次元的に配置されたカンチレバー 材料力学 p.253 [12.8]



3 次元的に配置されたカンチレバー材料力学 p.253 [12.8]

静定問題かどうかを判定：静定問題

静定問題なので反力，支持モーメント，せん断力分布，モーメント分布は力・モーメントのつり合いから決定することができる。

点Aの反力，支持モーメント

$$R_A = P, \quad M = -2Pa, \quad T = \sqrt{3}Pa$$

せん断力分布

$$V = P_{(\text{const.})}$$

曲げモーメント分布，ねじりモーメント分布

BC 間 ($0 \leq \xi \leq 2a$)

$$M(\xi) = -P\xi$$

CA 間 ($0 \leq \eta \leq a$)

$$M(\eta) = -P\eta - Pa$$

$$T(\eta) = \sqrt{3}Pa \quad (\text{const.})$$

危険断面Aの曲げモーメント値，
ねじりモーメント値，応力

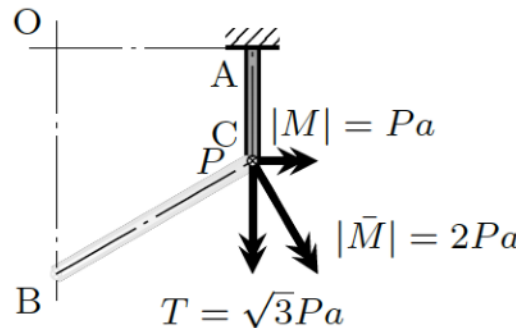
$$M = -2Pa, \quad T = \sqrt{3}Pa$$

$$\sigma = \frac{|M|}{I} \frac{d}{2} = \frac{2Pa}{\pi d^4/64} \frac{d}{2} = \frac{64Pa}{\pi d^3}$$

$$\tau = \frac{T}{I_p} \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{3}Pa}{\pi d^4/32} \frac{d}{2} = \frac{16\sqrt{3}Pa}{\pi d^3}$$

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{16Pa}{\pi d^3} (2 \pm \sqrt{7})$$

$$\tau_{\max} = \frac{16\sqrt{7}Pa}{\pi d^3}$$



3次元的に配置されたカンチレバー 材料力学 p.253 [12.8]

CA 間のねじれ角, 点 C のねじれ角

$$\theta = \frac{T}{GI_p}, \quad \phi_C = \theta a = \frac{\sqrt{3}Pa^2}{GI_p}$$

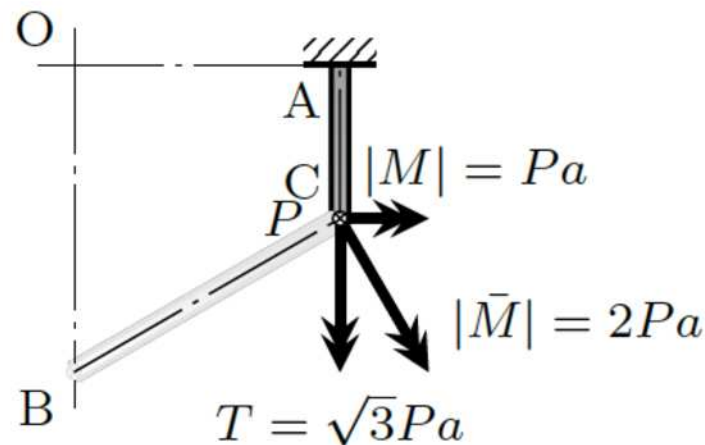
点 C のたわみとたわみ角 (モーメント面積法)

$$y_C = -t_{CA} = \left(\frac{1}{2} \frac{Pa}{EI} a \right) \left(\frac{2}{3} a \right) + \left(\frac{Pa}{EI} a \right) \left(\frac{1}{2} a \right) = \frac{5}{6} \frac{Pa^3}{EI}$$

$$\theta_C = -\theta_{CA} = \frac{1}{2} \frac{Pa}{EI} a + \frac{Pa}{EI} a = \frac{3}{2} \frac{Pa^2}{EI}$$

点 C を固定支持 (AC 間を剛体) とみたときの点 B のたわみ
(モーメント面積法)

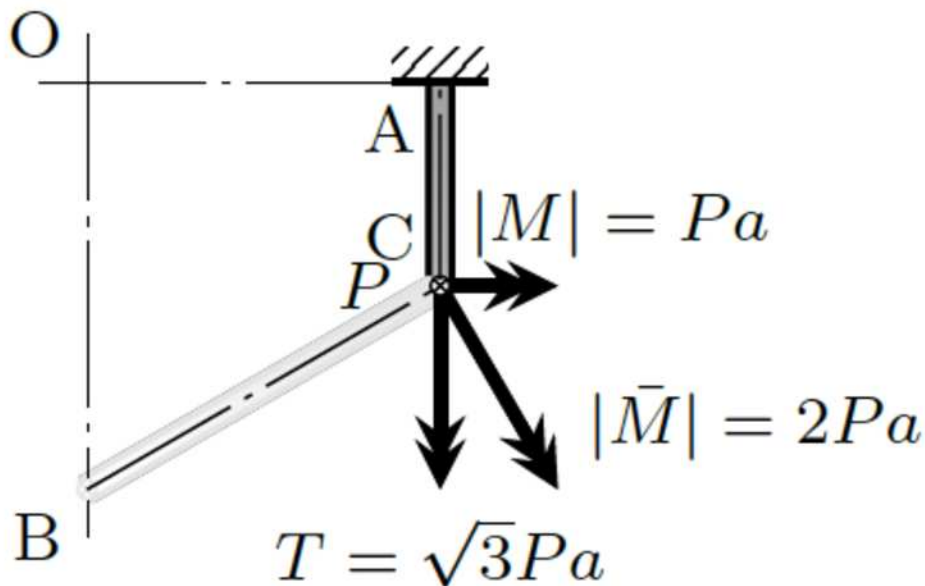
$$\bar{y}_B = \left(\frac{1}{2} \frac{2Pa}{EI} 2a \right) \left(\frac{2}{3} 2a \right) = \frac{8}{3} \frac{Pa^3}{EI}$$



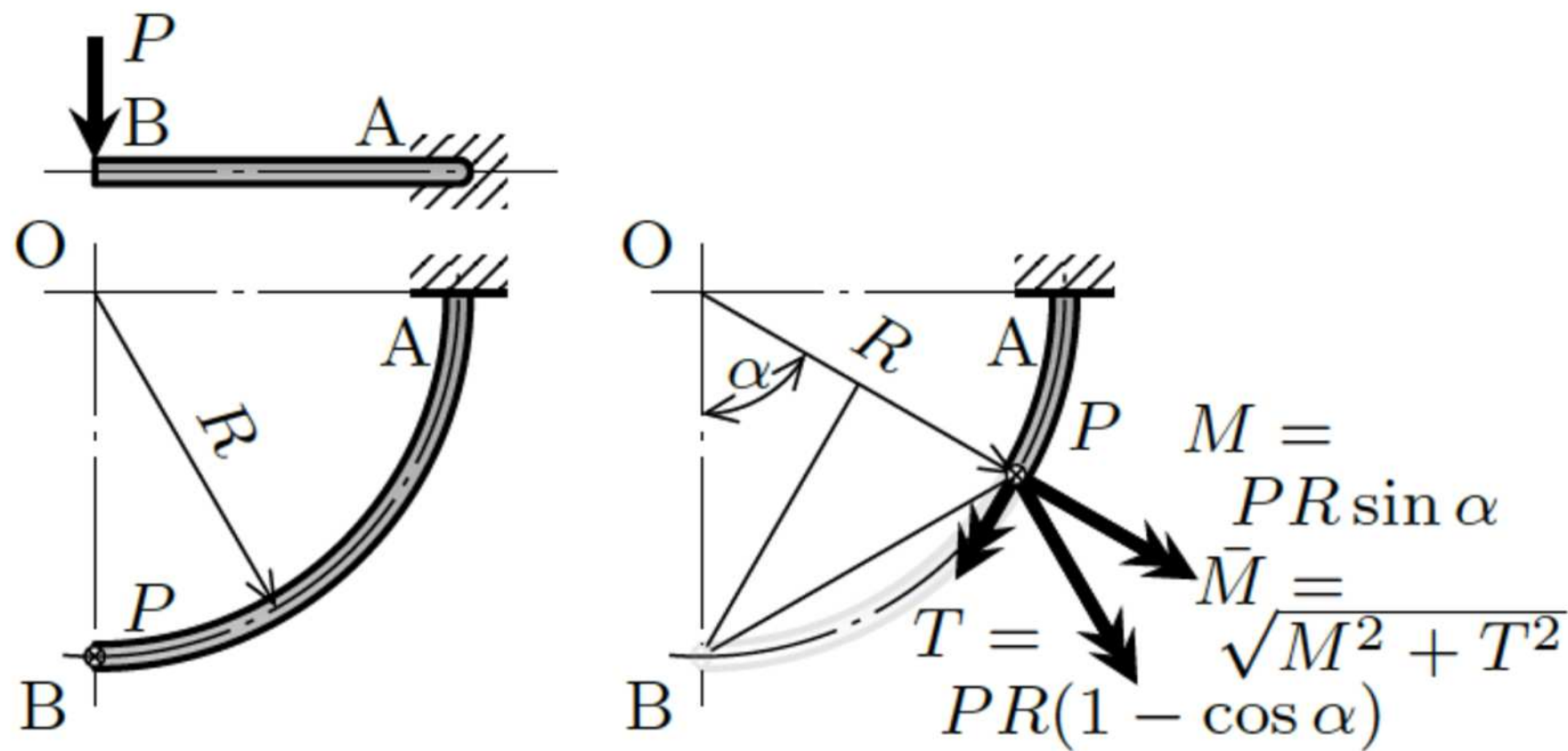
3次元的に配置されたカンチレバー材料力学 p.253 [12.8]

ϕ_C , θ_C の BC 方向への寄与に BC 間の長さ $2a$ を乗じた変位を考慮すると (あるいは, ϕ_C , θ_C に点 C からみた点 B の垂直距離を考えると), 点 B のたわみは,

$$\begin{aligned} y_B &= y_C + \phi_C \frac{\sqrt{3}}{2} 2a + \theta_C \frac{1}{2} 2a + \bar{y}_B \\ &= \frac{5Pa^3}{6EI} + \frac{3Pa^3}{GI_p} + \frac{3Pa^3}{2EI} + \frac{8Pa^3}{3EI} \\ &= \left(\frac{5}{EI} + \frac{3}{GI_p} \right) Pa^3 \end{aligned}$$



3次元的に配置されたカンチレバー材料力学 p.253 [12.9]



3 次元的に配置されたカンチレバー材料力学 p.253 [12.9]

静定問題かどうかを判定：静定問題

静定問題なので反力，支持モーメント，せん断力分布，モーメント分布は力・モーメントのつり合いから決定することができる。

点Aの反力，支持モーメント

$$R_A = P, \quad M = PR, \quad T = PR$$

せん断力分布

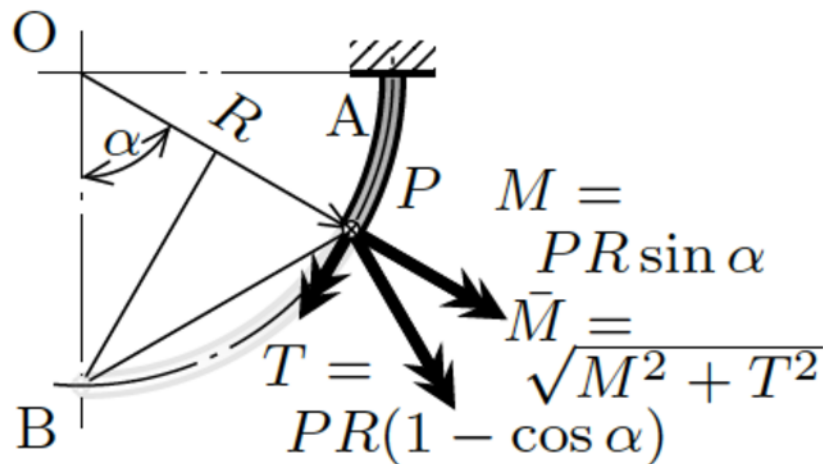
$$V = P_{(\text{const.})}$$

曲げモーメント分布，ねじりモーメント分布をOBから反時計まわりにとった角度 α の関数として表す

$$M(\alpha) = PR \sin \alpha, \quad T(\alpha) = PR(1 - \cos \alpha)$$

危険断面Aの曲げモーメント値，ねじりモーメント値，応力

$$M = PR, \quad T = PR$$



$$\sigma = \frac{|M|}{I} \frac{d}{2} = \frac{32PR}{\pi d^3}$$

$$\tau = \frac{T}{I_p} \frac{d}{2} = \frac{16PR}{\pi d^3}$$

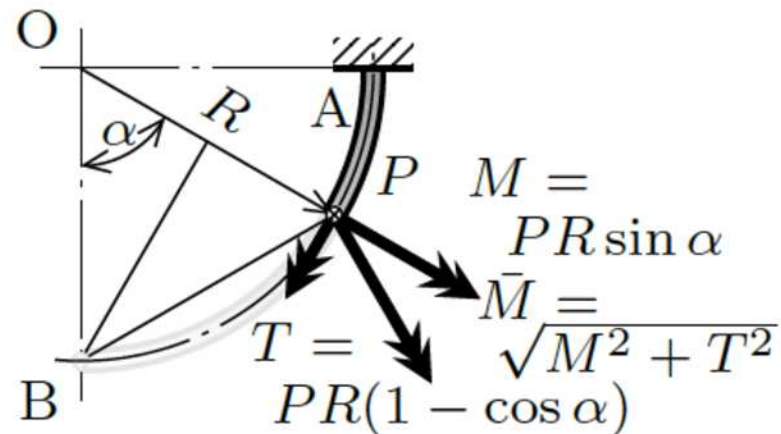
$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{16PR}{\pi d^3} (1 \pm \sqrt{2})$$

$$\tau_{\max} = \frac{16\sqrt{2}PR}{\pi d^3}$$

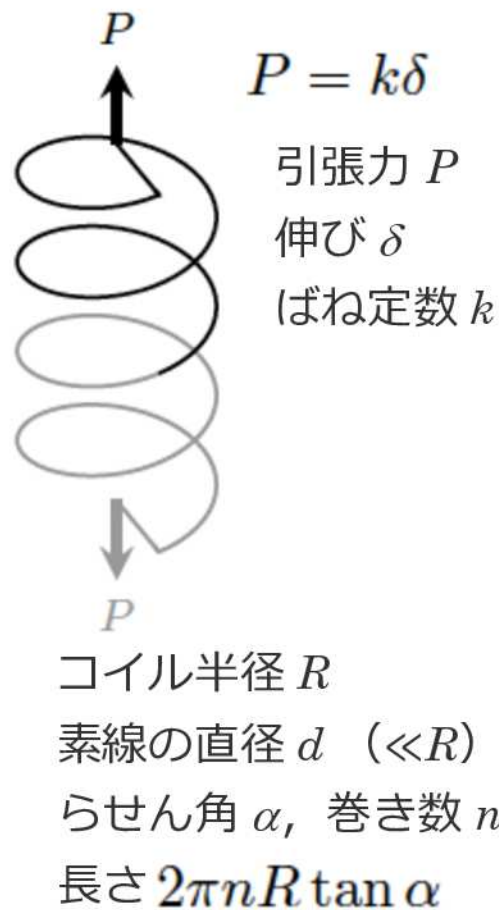
3次元的に配置されたカンチレバー材料力学 p.253 [12.9]

$ds = R d\alpha$ のねじれ角, たわみ角の点B のたわみへの寄与は, それぞれ, 腕の長さ $R(1 - \cos \alpha)$, $R \sin \alpha$ を乗じたものであり, 点B のたわみは,

$$\begin{aligned}
 y_B &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{T(\alpha)}{GI_p} R d\alpha \right) R(1 - \cos \alpha) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{M(\alpha)}{EI} R d\alpha \right) R \sin \alpha \\
 &= PR^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{GI_p} (1 - \cos \alpha)^2 + \frac{1}{EI} \sin^2 \alpha \right) d\alpha \\
 &= PR^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{GI_p} \left\{ 1 - 2\cos \alpha + \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right\} + \frac{1}{EI} \left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \right) \right] d\alpha \\
 &= \frac{PR^3}{GI_p} \left[\alpha - 2\sin \alpha + \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{PR^3}{EI} \left[\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= PR^3 \left\{ \frac{\pi}{4EI} + \frac{1}{GI_p} \left(\frac{3}{4}\pi - 2 \right) \right\}
 \end{aligned}$$



コイルばね (再掲)



素線の配置に対して
力・モーメントをベクトルの的に分解

荷重 P を分解

引張力

$$N = P \sin \alpha$$

せん断力

$$V = P \cos \alpha$$

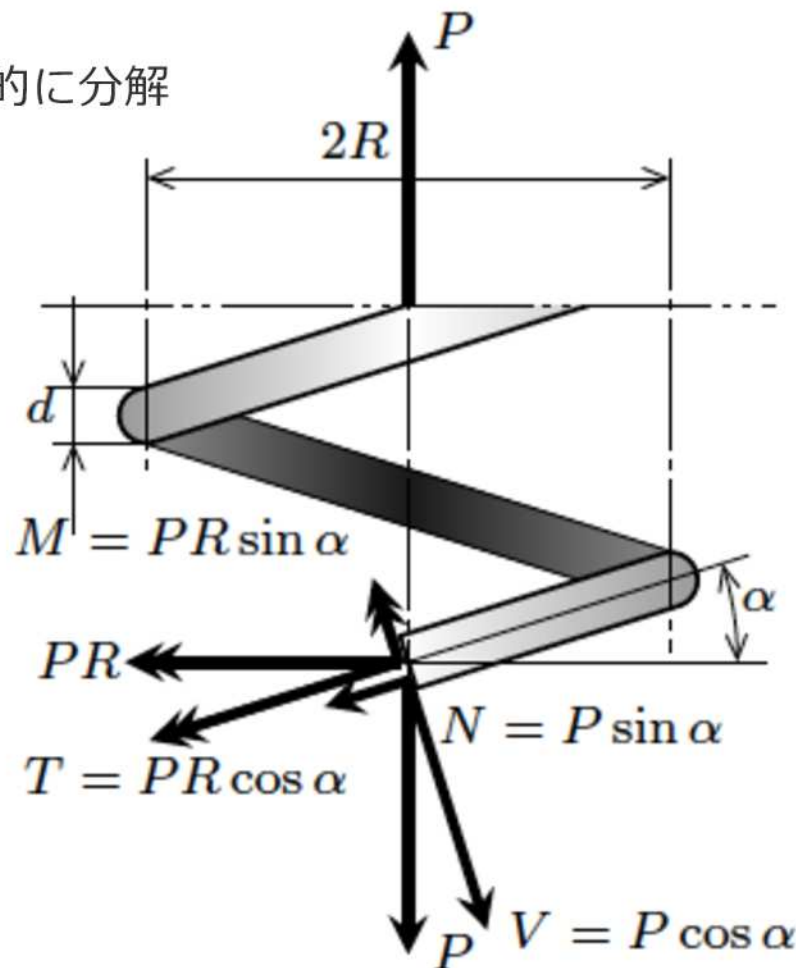
モーメント PR を分解

曲げモーメント

$$M = PR \sin \alpha$$

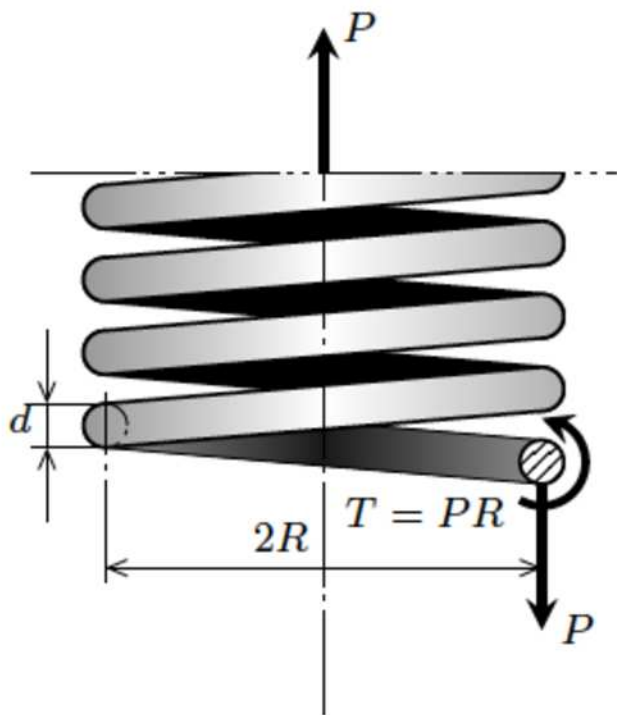
ねじりモーメント

$$T = PR \cos \alpha$$



密巻コイルばね (再掲)

らせん角 α が小さく場合
 $\sin \alpha \simeq 0 \quad \cos \alpha \simeq 1$



せん断力 $V = P$ と, ねじりモーメント $T = PR$ のみ考慮
 せん断応力

$$\tau_1 = \frac{T}{I_p} \frac{d}{2} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16PR}{\pi d^3} \quad \tau_2 = \frac{V}{A} \frac{4}{3} = \frac{16V}{3\pi d^2} = \frac{16P}{3\pi d^2}$$

$$\tau_{\max} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{16PR}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{3R} \right)$$

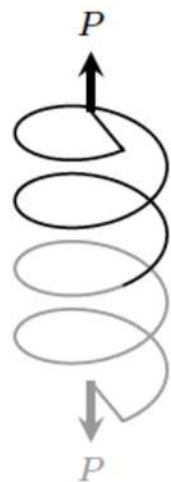
長さ ds の素線要素については, ねじれ角 θds に R を乗じたものが, コイル軸方向伸び変位に寄与する

$$\theta = \frac{T}{GI_p} = \frac{32T}{G\pi d^4} \quad d\delta = R\theta ds = \frac{T}{GI_p} R ds = \frac{32PR^2}{G\pi d^4} ds$$

全長にわたり積分すると, 伸び d と, ばね定数 k を得る.

$$\delta = \int_0^{2\pi Rn} \frac{32PR^2}{G\pi d^4} ds = \frac{64nPR^3}{Gd^4} \quad k = \frac{Gd^4}{64nPR^3}$$

らせん角の大きいコイルばね (応力と強度評価) (再掲)



$$P = k\delta$$

引張力 P

伸び δ

ばね定数 k

回転角 ω

曲げモーメントとねじりモーメント

$$M = PR \sin \alpha \quad T = PR \cos \alpha$$

曲げ応力, せん断応力

$$\sigma = \frac{M d}{I \cdot 2} = \frac{32M}{\pi d^3} = \frac{32PR \sin \alpha}{\pi d^3}$$

$$\tau = \frac{T d}{I_p \cdot 2} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16PR \cos \alpha}{\pi d^3}$$

コイル半径 R

素線の直径 d ($\ll R$)

らせん角 α , 巻き数 n

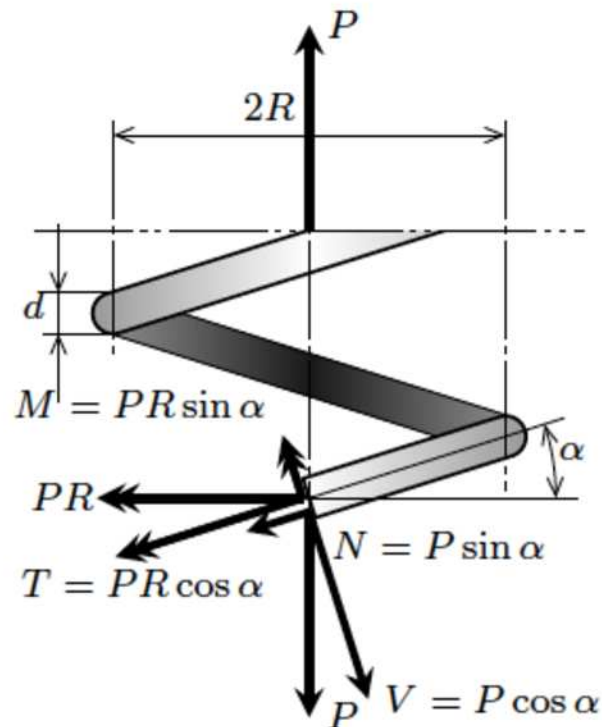
コイルの長さ $2\pi n R \tan \alpha$

素線の全長 $\frac{2\pi R n}{\cos \alpha}$

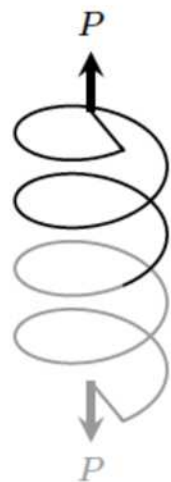
最大主応力と最大せん断応力

$$\sigma_{\max} = \frac{16PR}{\pi d^3} (1 + \sin \alpha)$$

$$\tau_{\max} = \frac{16PR}{\pi d^3}$$



らせん角の大きいコイルばね (伸縮とねじれの考え方) (再掲)



$$P = k\delta$$

引張力 P

伸び δ

ばね定数 k

回転角 ω

コイル半径 R

素線の直径 d ($\ll R$)

らせん角 α , 巻き数 n

コイルの長さ

$$2\pi n R \tan \alpha$$

長さ ds の素線要素の変形

$$\text{ねじれ角 } \left(\frac{T}{GI_p} \right) ds$$

$$\text{曲げによるたわみ角 } \left(\frac{M}{EI} \right) ds$$

コイル軸方向変位 δ への寄与:

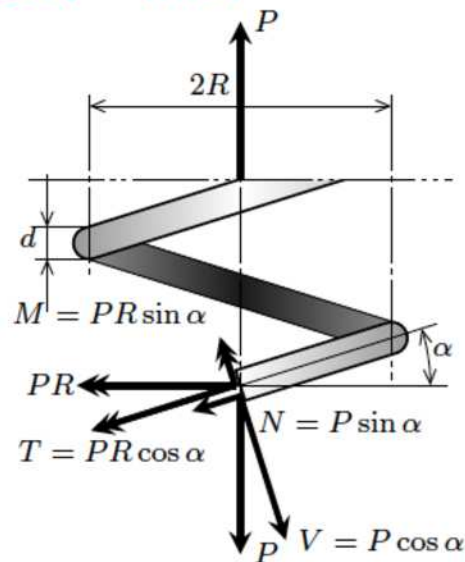
それぞれに $R \cos \alpha$, $R \sin \alpha$ を乗じたもの

$$d\delta = R \left(\frac{T}{GI_p} \right) ds \cos \alpha + R \left(\frac{M}{EI} \right) ds \sin \alpha$$

コイルの軸まわりの回転角 ω への寄与:

それぞれに $\sin \alpha$, $-\cos \alpha$ を乗じたもの

$$d\omega = \left(\frac{T}{GI_p} \right) ds \sin \alpha - \left(\frac{M}{EI} \right) ds \cos \alpha$$



素線の全長

$$\frac{2\pi R n}{\cos \alpha}$$

にわたって積分すれば
 δ , ω を得る。

らせん角の大きいコイルばね（伸縮とねじれの計算結果）（再掲）

引張力 P

$$P = k\delta$$

コイル半径 R

素線の直径 d ($\ll R$)

らせん角 α , 巻き数 n (コイルの長さ $2\pi n R \tan \alpha$)

伸び δ

$$\delta = \frac{2\pi n R^3}{\cos \alpha} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{GI_p} + \frac{\sin^2 \alpha}{EI} \right) P = \frac{64n R^3}{d^4 \cos \alpha} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{G} + \frac{2 \sin^2 \alpha}{E} \right) P$$

ばね定数 k

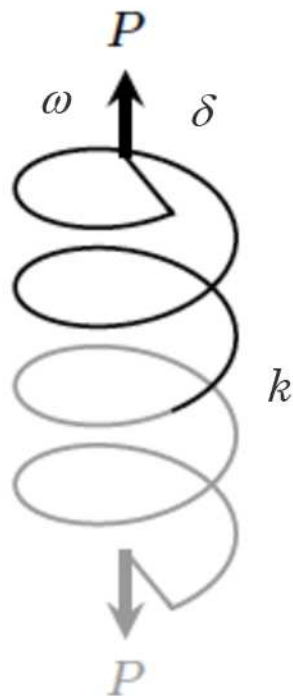
$$k = \frac{d^4 \cos \alpha}{64n R^3 \left(\frac{\cos^2 \alpha}{G} + \frac{2 \sin^2 \alpha}{E} \right)}$$

コイルが自由に回転できる
場合のばね定数である

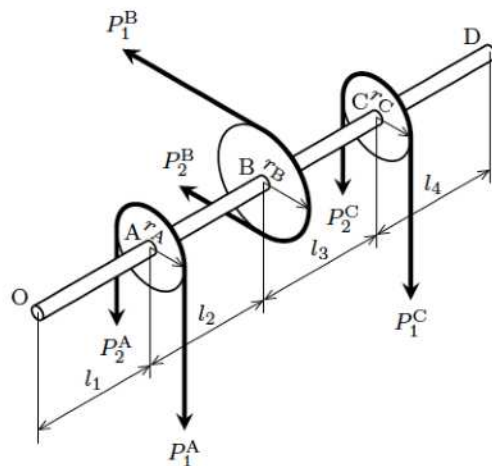
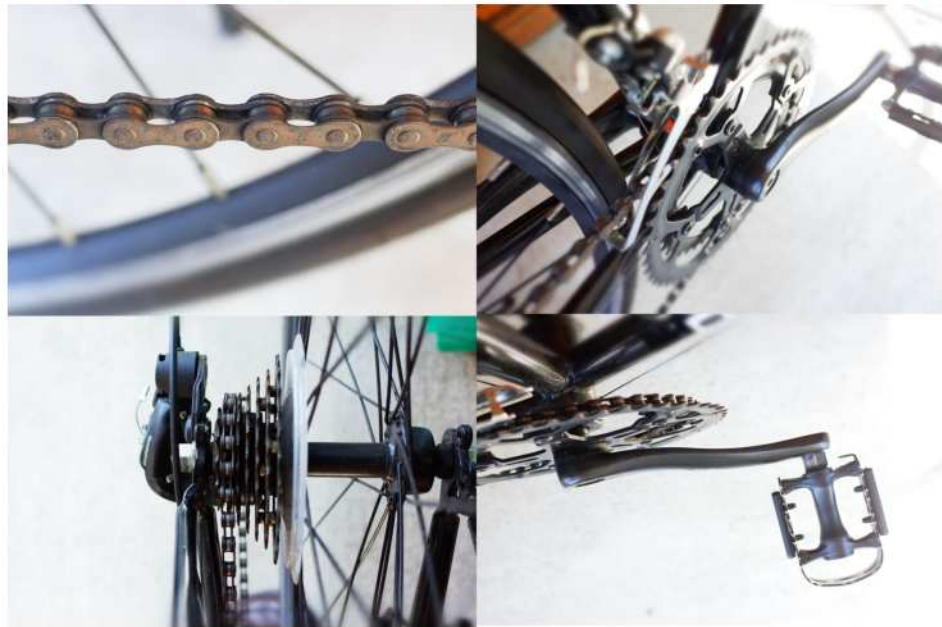
もし回転しないように拘束
すればばね定数は変化する

回転角 ω

$$\omega = 2\pi n R^2 \sin \alpha \left(\frac{1}{GI_p} - \frac{1}{EI} \right) = \frac{64n R^2 \sin \alpha}{d^4} \left(\frac{1}{G} - \frac{2}{E} \right)$$



自転車の伝動軸について 曲げとねじりの連成問題を考えてみよう！



考えてみよう♪

円形でない断面のねじり

円形でない断面にねじりモーメント T が作用すると、そり (warping) が生じる
だ円断面 (長径 $2a$ (y 方向), 短径 $2b$ (z 方向))

$$\tau_{xy} = -\frac{2T}{\pi ab^3}z, \quad \tau_{xz} = \frac{2T}{\pi a^3b}y \quad \theta = \frac{(a^2 + b^2)T}{\pi G a^3 b^3}$$

長方形断面の軸 (長辺 a , 短辺 b) : 最大せん断応力は長辺の midpoint に生じる

$$\tau_{\max} = \frac{T}{\alpha ab^2} \quad \theta = \frac{T}{\beta G ab^3}$$

a/b	1.00	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00	4.00	6.00	8.00	10.00	∞
α	0.208	0.231	0.239	0.246	0.258	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333
β	0.141	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333

ねじりの応力関数

中実軸のねじり問題：ねじりの応力関数 Ψ を定める問題に帰着

支配方程式：
$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 2G\theta$$

境界条件：
$$\Psi = 0$$

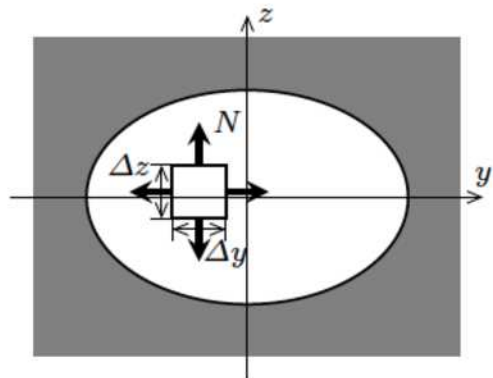
せん断応力成分は，応力関数 Ψ の導関数で評価できる

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

ねじりモーメント T

$$T = 2 \iint_A \Psi dy dz$$

プラントルの薄膜相似法



圧力 p , 張力 N , たわみ v の関係

$$p + N \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + N \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

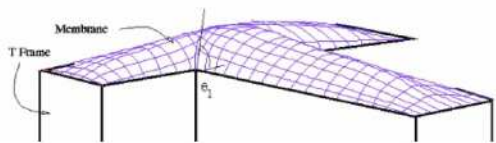
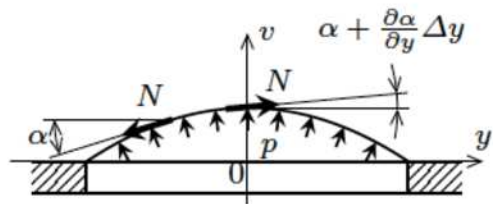
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -p/N$$

境界条件 $v = 0$

薄膜のたわみ問題とねじり問題の相似性と対応関係

$$v \rightarrow \Psi, \quad p/N \rightarrow -2G\theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \tau_{xz}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial z} = -\tau_{xy}$$



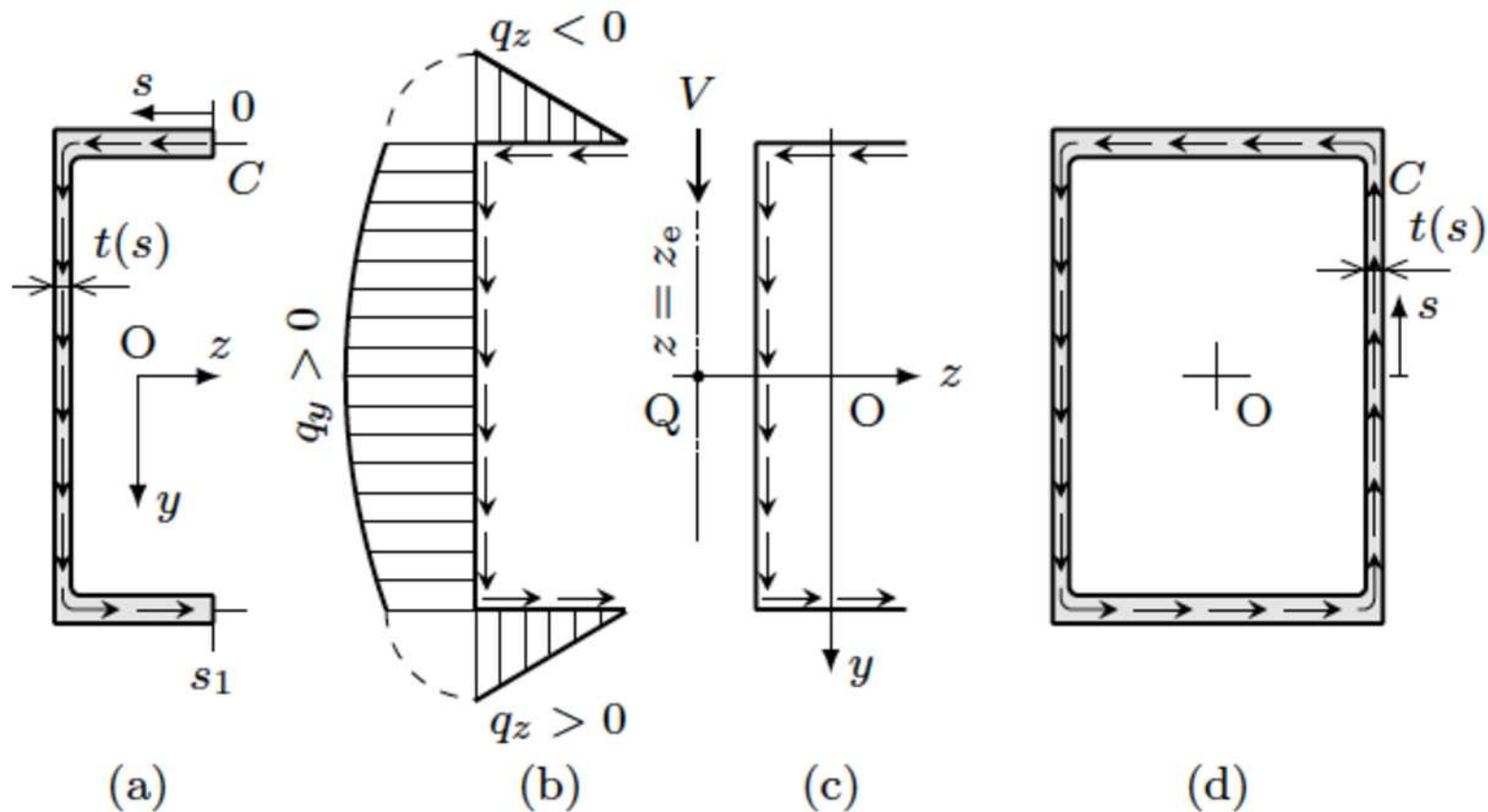
https://www.clear.rice.edu/mech400/soap_film_lectureUC_D.pdf



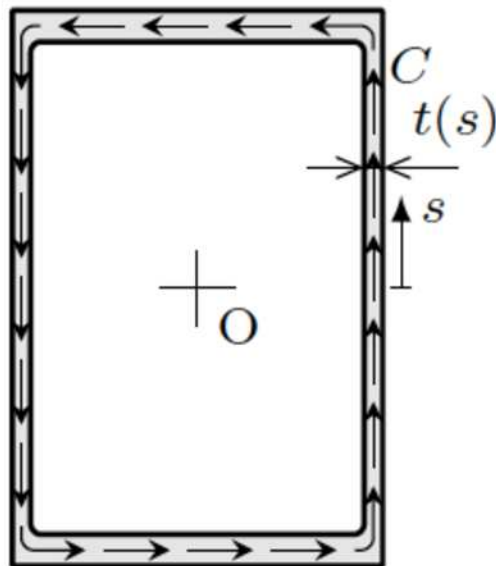
Ludwig Prandtl (1875 -1953)

20世紀初頭のドイツ・ゲッチンゲンは応用力学・応用数学の研究が花開いた。プラントルの弟子、影響を受けた学者の多くが大戦により米国に移った。

薄肉構造のねじれ



薄肉構造のねじれ



せん断流 $q(s)$: せん断応力 $\tau(s)$ と厚さ $t(s)$ の積

$$q(s) \equiv \tau(s)t(s)$$

肉厚中央線 C の接線方向 $(\cos \phi(s), \sin \phi(s))$ と $q(s)$ の成分

$$q_z(s) = q(s) \cos \phi(s) \quad q_y(s) = q(s) \sin \phi(s)$$

ねじりモーメント

$$T = \oint_C (q_y(s)z(s) - q_z(s)y(s)) ds = \oint_C q(s)h(s)ds$$

$h(s)$ は肉厚中央線への点 O からの垂線の長さでありその線積分は肉厚中央線で囲まれる面積 A の2倍

$$\oint_C h(s)ds = 2A$$

よって,

$$T = 2Aq, \quad q = \frac{T}{2A}, \quad \tau(s) = \frac{q}{t(s)} = \frac{T}{2At(s)}$$

エネルギー保存則から比ねじれ角 θ は,

$$\frac{1}{2}T\theta = \oint \frac{\tau(s)^2}{2G}t(s)ds \quad \theta = \frac{T}{4A^2G} \oint \frac{ds}{t(s)}$$

次回

材料力学2024 シーズン2

第11話 エネルギー法 前編

2024年7月12日（金）

Coming Soon . . .