

材料力学2024 シーズン2

第9話 ねじり 後編

2024年7月5日（金）

中谷 彰宏

教科書「渋谷陽二，中谷彰宏，材料力学，(2017)，コロナ社」
1, 2, 3, 4, 10, 11章（春学期の授業）を学習し終えて、
5, 6, 7, 8, 9, 12, 13章（夏学期の授業）をこれから学ぶ諸君のために

材料の破損条件（降伏条件）

降伏応力：延性材料に対して単軸引張試験で得られた降伏現象を示す点の応力 σ_y

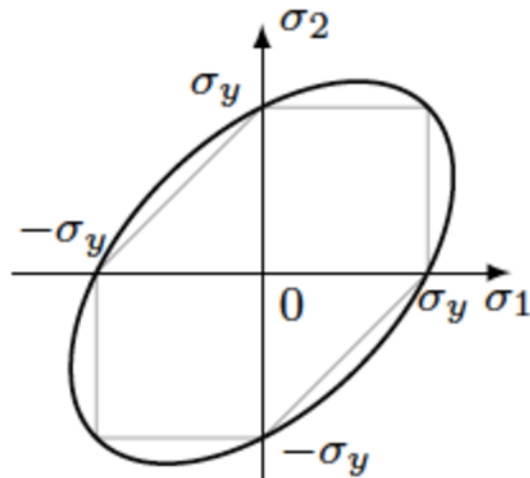
降伏曲面と降伏条件：ある応力状態に対して、座標変換によって定まる主応力を $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ とし、応力を成分とする座標によって張られる空間を考える。主応力の値の関数、ある曲面の方程式 $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \sigma_y) = 0$ を満たす場合に、材料が降伏するとき、この方程式を降伏曲面といい、その条件を降伏条件という。降伏曲面は一般には原点 $O(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (0, 0, 0)$ を囲む閉曲面である。

安全率：応力状態が降伏曲面の内部にあれば弾性である。

ある応力状態を表す点 $P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ を考え、線分 OP を延長した直線が降伏曲面と交わる点を Q とする。

比 $n = \overline{OQ}/\overline{OP}$ を安全率という。安全率は、降伏条件に対して、現在の応力状態が（比例負荷の仮定の下で）どの程度安全であるかを応力の次元の比として比較した無次元量である。

安全率が1 よりも十分大きいとき安全。



最大せん断応力説 (Trescaの条件)

最大せん断応力 $\tau_{\max}$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) \quad (\sigma_{\max}, \sigma_{\min} \text{ はそれぞれ主応力の最大, 最小のもの})$$

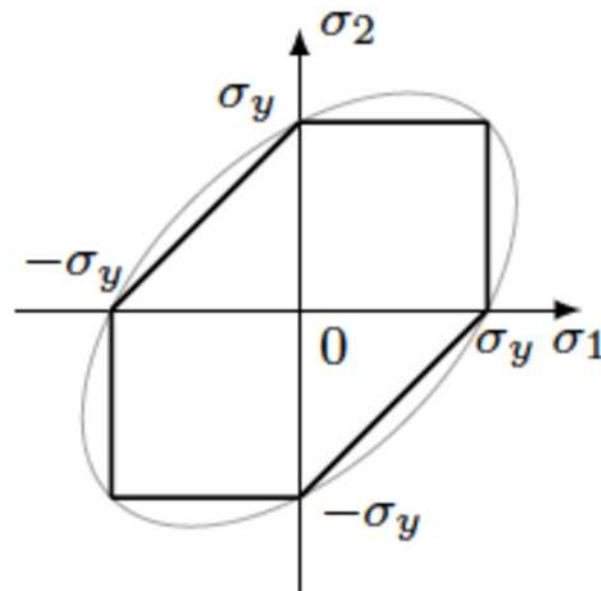
(一般に, 3つの主応力から2つを取り出したときに, それらそれぞれをそれを直径とする3つのモールの応力円を描くことができるが, そのうち半径が最大のものの半径に相当) が, 値 τ_{cr} に達する条件を降伏条件とする説.

降伏基準値: 単軸引張試験の降伏 $\sigma_{\max} = \sigma_y$, $\sigma_{\min} = 0$ から

$$\tau_{\text{cr}} = \frac{\sigma_y}{2}$$

安全率 n

$$n = \frac{\tau_{\text{cr}}}{\tau_{\max}} = \frac{\sigma_y}{2\tau_{\max}}$$



降伏曲面の二次元応力平面への射影 ($\sigma_3 = 0$ の場合)

$$f(\sigma_1, \sigma_2; \sigma_y) = 0$$

材料力学p.291 図14.11

最大せん断ひずみエネルギー説 (von Misesの条件)

降伏条件 $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_y^2$

相当応力(equivalent stress), **ミーゼス応力** $\bar{\sigma}$ (σ_{eq} などとも表記)

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

八面体せん断応力 3つの主応力軸に対して等しい傾きを持った面
(原点を中心とした正八面体の面) に働くせん断応力

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

降伏曲面の二次元応力平面への射影 ($\sigma_3 = 0$ の場合)

降伏条件, 相当応力, 八面体せん断応力は

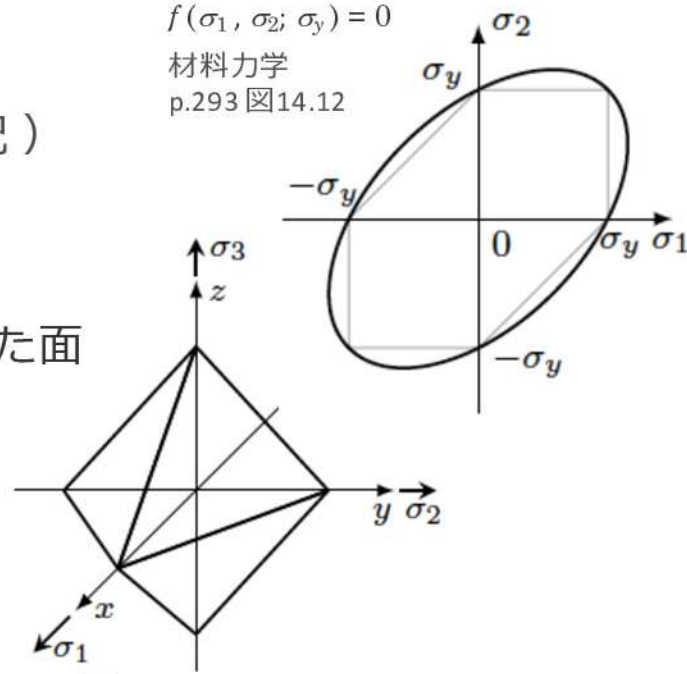
$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_y^2 \quad \bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \quad \tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}$$

安全率 n

$$n = \frac{\sigma_y}{\bar{\sigma}} = \frac{\tau_{oct,cr}}{\tau_{oct}} \quad \text{ただし} \quad \tau_{oct,cr} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_y$$

$$f(\sigma_1, \sigma_2; \sigma_y) = 0$$

材料力学
p.293 図14.12



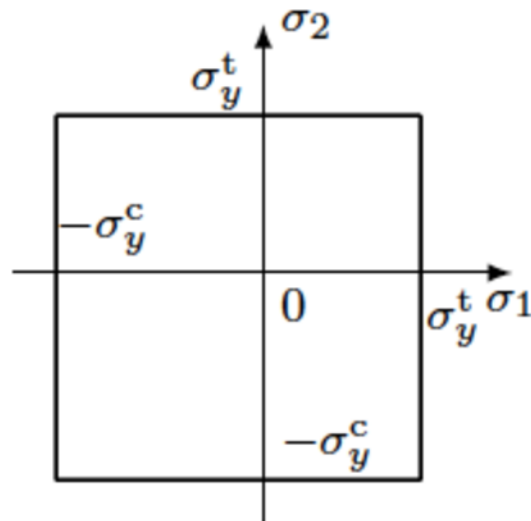
最大主応力説（Rankine の条件）

降伏条件：脆性材料の多くは降伏直後に破断する。最大主応力 $\sigma_{\max}$ が限界値に達すると降伏・破断が生じるとする説を最大主応力説といい、この条件をランキンの条件という。

降伏応力の基準値：単軸引張試験で得られた降伏・破断応力 σ_y^t （多くの場合引張側が危険であり、圧縮側では異なる値 σ_y^c が基準となる）となる。

安全率：降伏・破断応力と最大主応力の比で定義される

$$n = \frac{\sigma_y^t}{\sigma_{\max}}$$

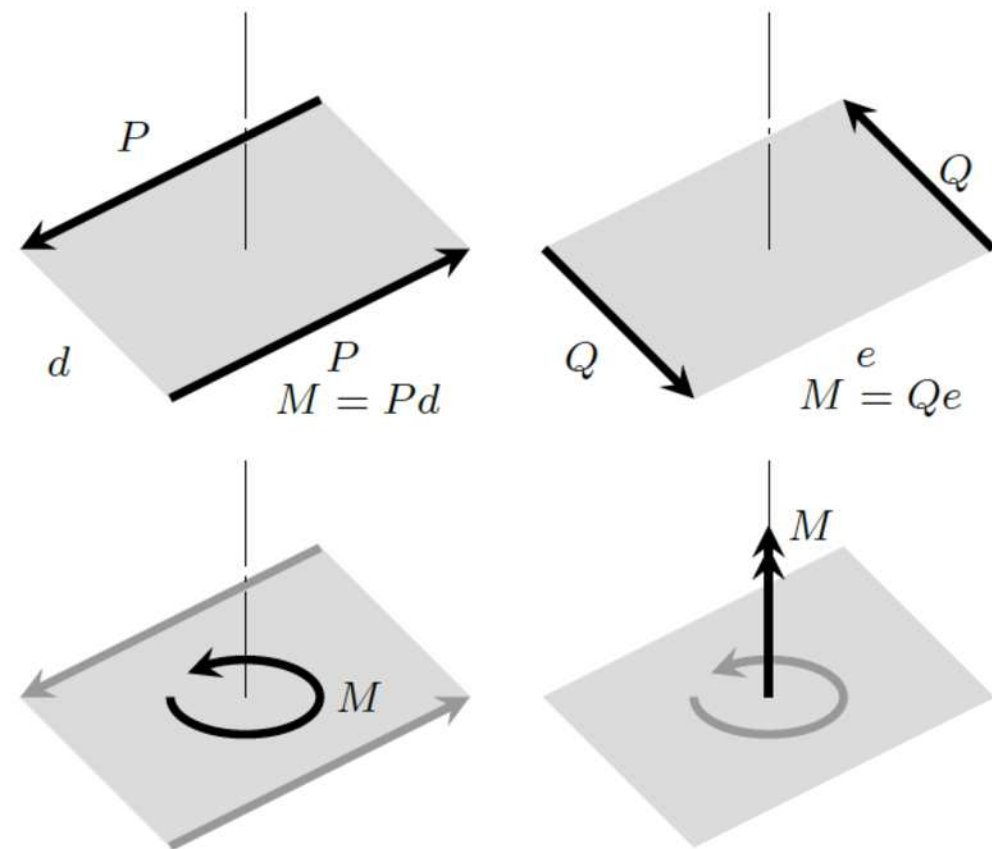


降伏曲面の二次元応力平面への射影（ $\sigma_3 = 0$ の場合）

$$f(\sigma_1, \sigma_2; \sigma_y^t, \sigma_y^c) = 0$$

材料力学p.293 図14.13

モーメント (moment) ・ 偶力 (couple)



偶力 (couple) は大きさが上段左側図のように、同じ向きが互いに反対である力 P (上段右側図では Q) が垂直距離 d (同 e) だけ離れて作用する一組の力である。

面積 $M = Pd = Qe$ のことを偶力のモーメント, あるいは単にモーメント (moment) といい, 下段のように図示することができる。

材料力学では力・偶力の作用点近傍の複雑な力学状態は論じない。またその作用点から遠方に与える影響は同一とみなせる (サン・ブナンの原理) ので, 偶力とモーメントは同じ意味で使われる。

モーメントベクトルの性質 (下段右側図)

矢印を重ねて描いているモーメントベクトルは, モーメントによる回転が右ねじが進む方向につけると約束。通常の力のベクトルと同様に, 大きさと方向が保持される限りどこに移動してもつりあいに関しては影響がない。

また力のベクトルと同様にモーメントベクトルについても合成することもまた逆に分解することもできる。

モーメントベクトルによる図示と モーメントの分解の例

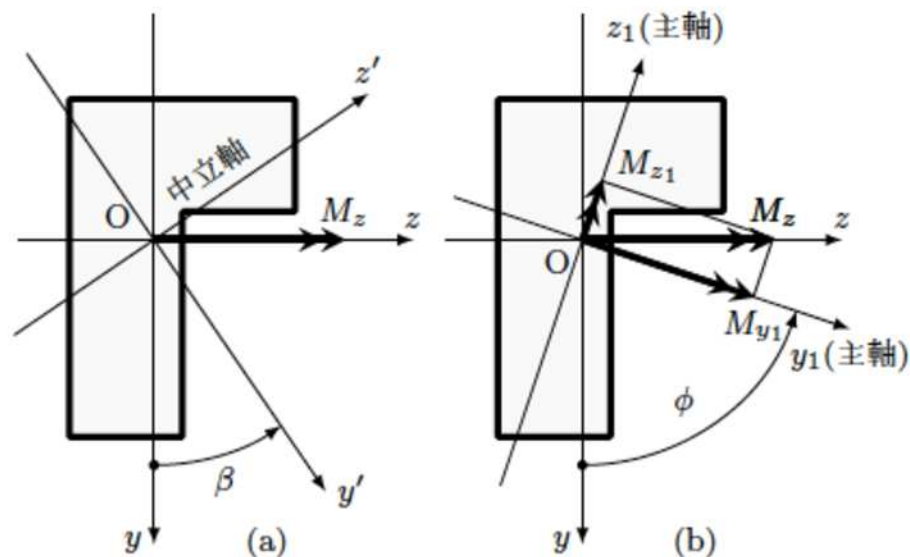
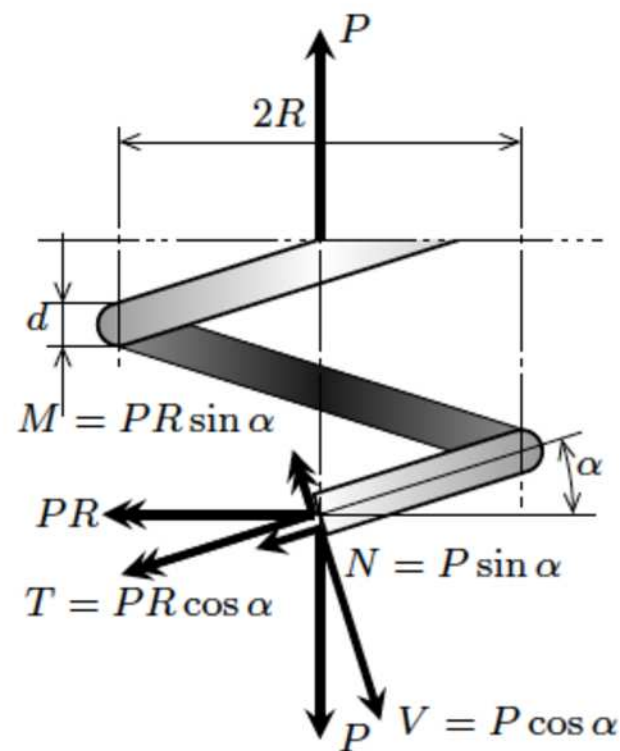


図 5.10 非対称荷重を受けるはり

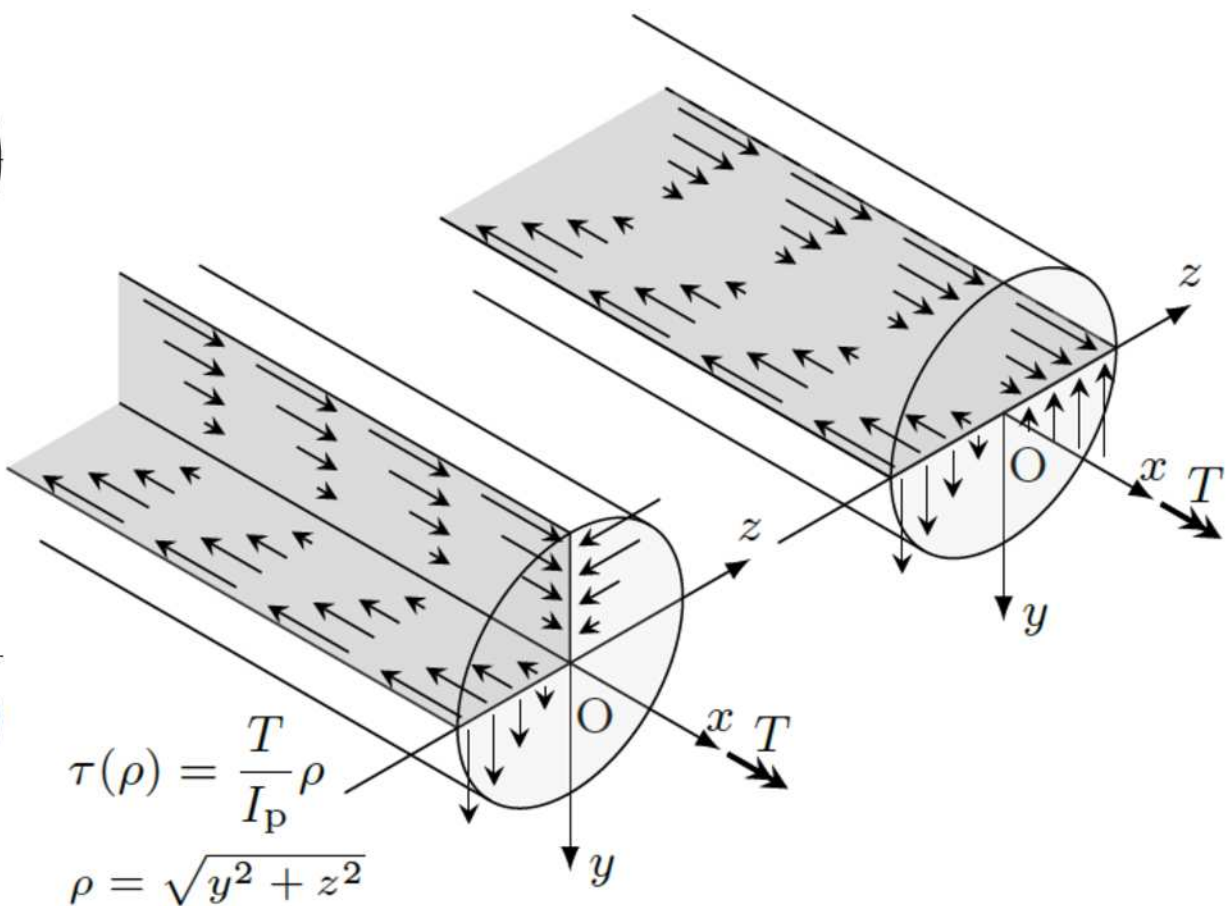
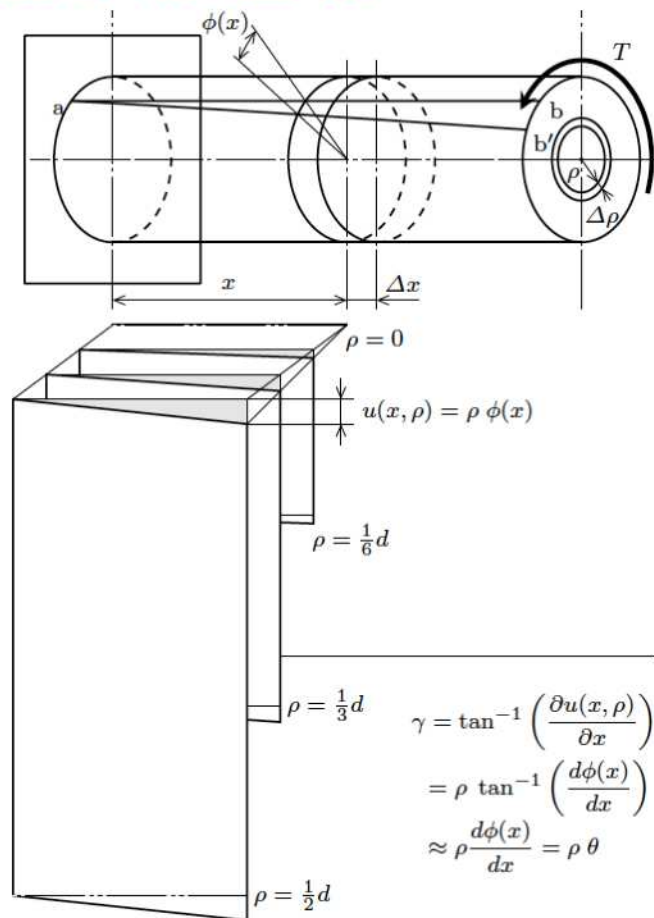
断面の慣性主軸の方向に分解



曲げモーメント（軸線に垂直な成分）
ねじりモーメント（軸線に平行な成分）
に分解

ねじりモーメントによるせん断ひずみとせん断応力

(復習, 補足説明)



航空機にはたらく組み合わせモーメント

航空機の翼には曲げ・ねじりモーメントが作用する。

迎え角は揚力に直に影響するのでねじりに対しては注意が必要である。翼は大きくたわんでも強度的には許容範囲であれば影響は小さいので曲げ剛性は適度な大きさに設定される。一方、ねじり剛性を大きくする工夫がなされている。合力がせん断中心に作用するように設計することも重要である。

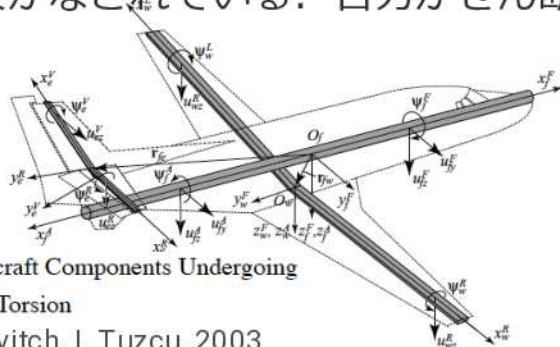
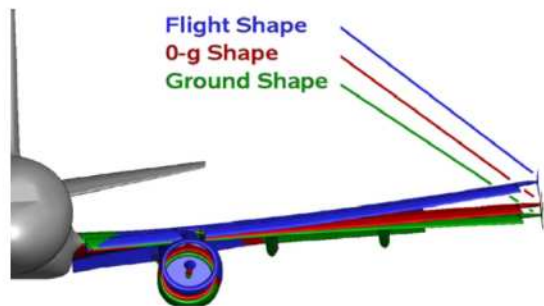


Figure 2. Aircraft Components Undergoing Bending and Torsion

L Merirovitch, I. Tuzcu, 2003



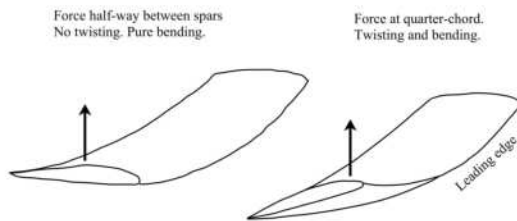
Deflection profiles of Boeing 787 for different flight loads (FlightBlogger)



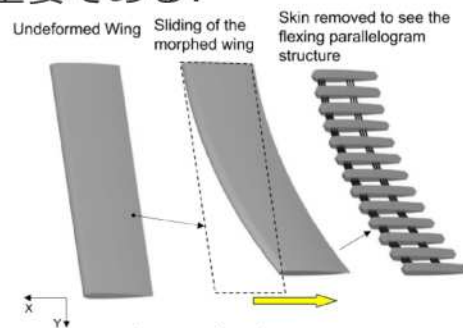
鉛直方向のたわみ

Matthew G Paul, 2017 (DOI:10.15368/theses.2017.65)

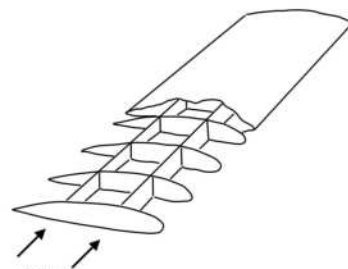
Wing Deflection Analysis of 3D Printed Wind Tunnel Models



横荷重によるねじれ



水平方向のたわみ



横荷重によるねじれ

Distribution of Load over Wing Tips and Stress Analysis

By B. V. Korvin-Kroukovsky, M.Sc.

Aeromarine Plane and Motor Co.

It is a well known fact, that load per inch run of a wing drops off in proximity of wing tip. The necessity of taking this drop into account in strength computations was recognized long ago, and several approximate methods were in use. Study of pressure distribution along model wings was made by the National Physical Laboratory, and led to the conclusion, that distribution of the load over a wing tip is practically independent of the plan form of the tip. Accordingly a mean curve was deduced, which was standardized by Technical Department in England, as the basis for strength computations. This load curve is reproduced on Fig. 2.

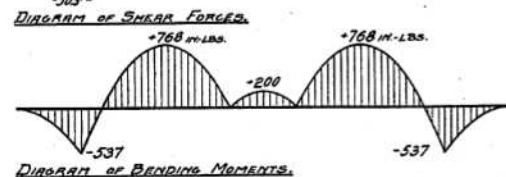
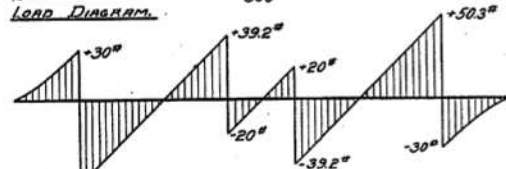
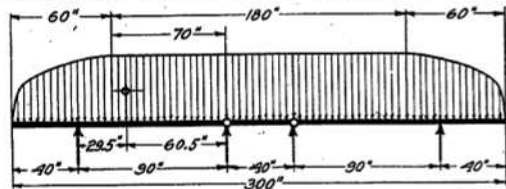


Fig. 1.

Total load:

$$900 = 180X + 2 \times 49.5X = 279$$

$$\text{or } X = 900/279 = 3.23 \text{ lb. per inch run}$$

Bending moments and reactions of supports most conveniently in terms of load of 1 lb. Actual reactions and moments for any one readily found then by multiplying results by run and by proper load factor.

Upper sketch of Fig. 1 shows, that outer struts in, or 0.8 chord from the wing tip. Consulting Fig. 2, we find that at this distance bending moment due to $0.215 \times \text{Chord}^2 \times \text{Load per inch run}$. Hence moment due to overhang is:

$$0.215 \times 50^2 \times 1 = 537 \text{ in.-lb.}$$

In order to find the reactions of supports, it is necessary to find first the center of gravity of the load diagram. This

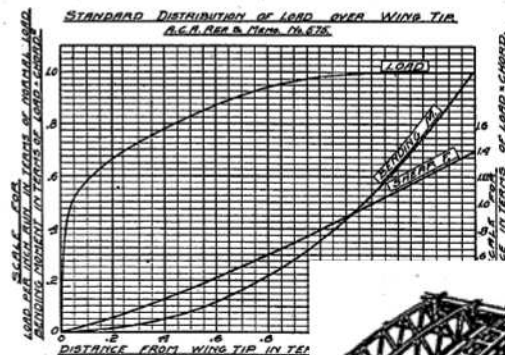


Fig. 2.

is accomplished best by taking moment from the wing tip (1.2 chord):

$$\text{Moment due to uniform load} = 7$$

$$\text{Moment due to tip load} = 0.525$$

Net 1

L. D. GARDNER
PRESIDENT
W. D. MOFFAT
VICE-PRESIDENT
W. I. SEAMAN
TREASURER
GEORGE NEWBOLD
BUSINESS MANAGER

Vol. XI

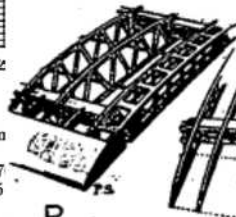
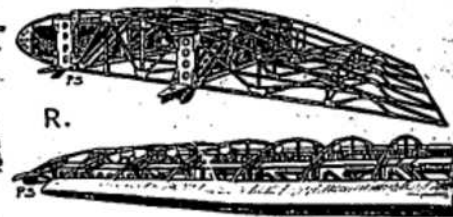
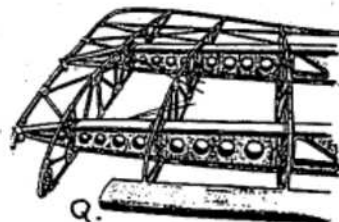
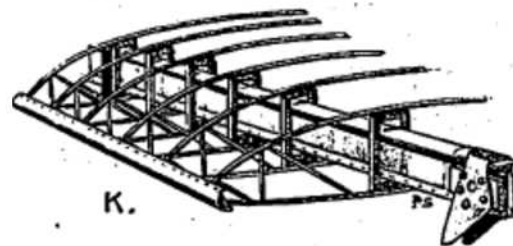
AVIATION AND AIRCRAFT JOURNAL

December 12, 1921

LADISLAS D'ORCY
EDITOR
ALEXANDER KLEMIN
EDWARD P. WARNER
RALPH H. UPSON
CONTRIBUTING EDITORS

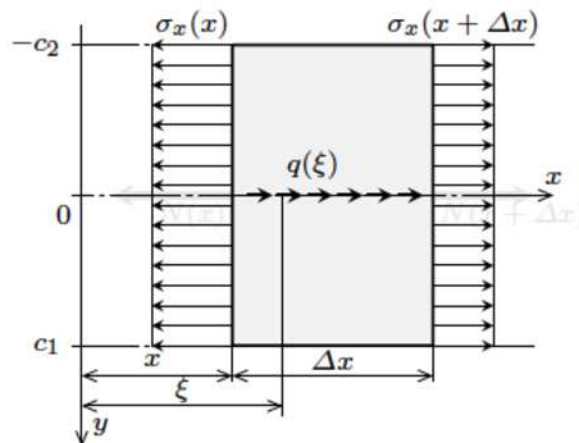
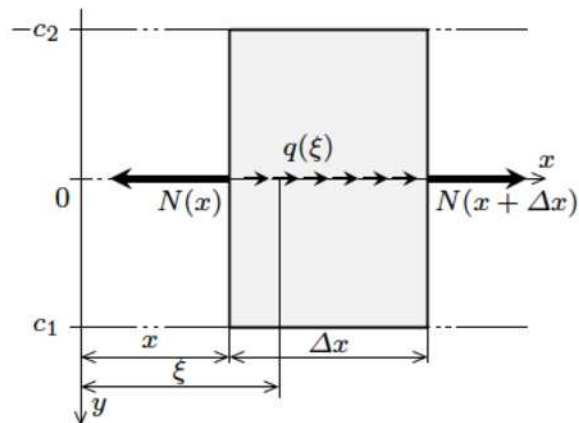
No. 24

The Seventh Paris Aero Show

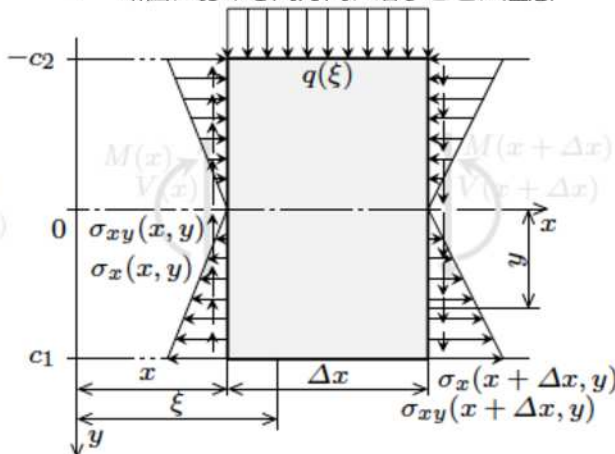
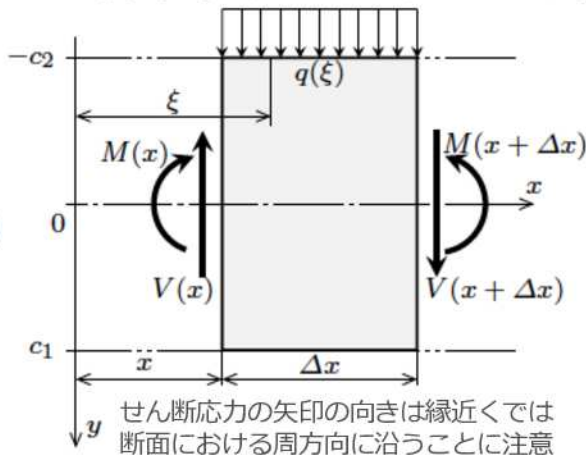


横断面にはたらく力・モーメントと応力分布のまとめ

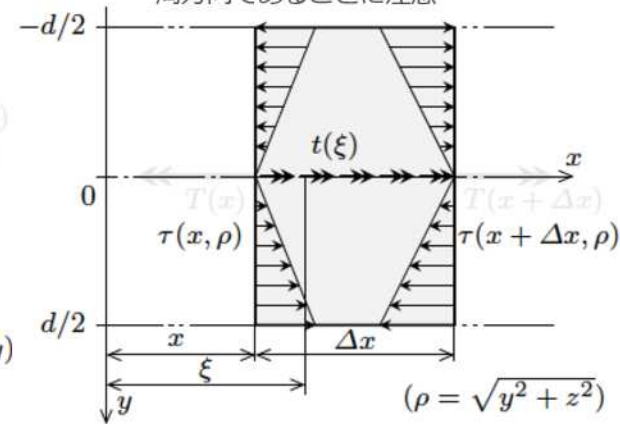
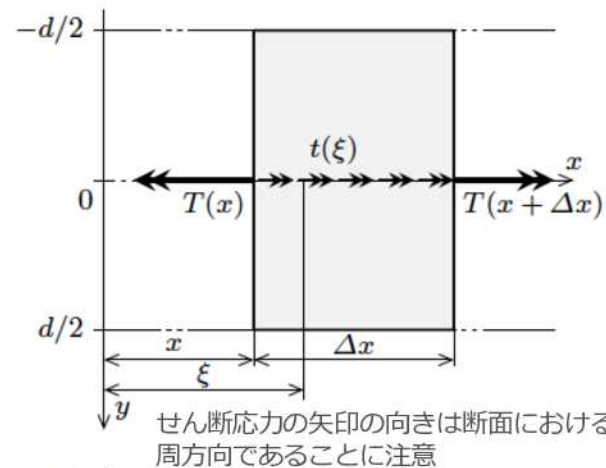
引張・圧縮（軸力）



曲げ（曲げモーメント・せん断力）



ねじり（ねじりモーメント）



マクロ
問題

軸線 (x)

ミクロ
問題

点 (x, y, z)

組合せ荷重による横断面の応力

横断面の応力は y, z の関数

もっとも大きな値が重要（断面係数などで表現）

曲げモーメントによる曲げ応力

$$\sigma = \frac{M}{Z}$$

ねじりモーメントによるせん断応力

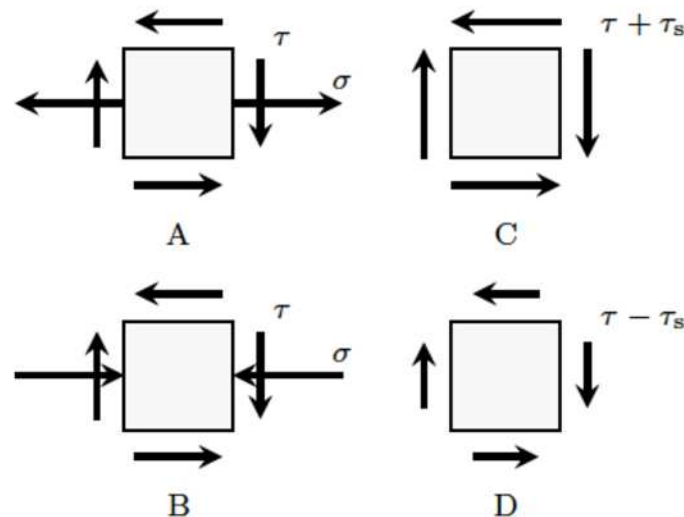
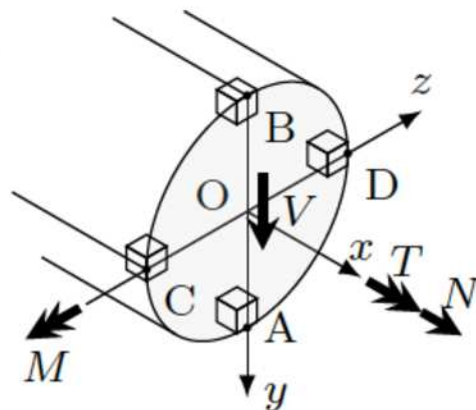
$$\tau = \frac{T}{Z_p}$$

軸力による垂直応力

$$\sigma_N = \frac{N}{A}$$

せん断力によるせん断応力（円形断面はり）

$$\tau_s = \frac{4}{3} \frac{V}{A}$$



曲げモーメント，ねじりモーメント，せん断力による
応力分布（円柱の側面の法線方向からみたとき）

（ $N=0$ の場合）

組合せ荷重による横断面の応力

横断面の応力

曲げ応力（曲げ）

$$\sigma = \frac{M}{Z}$$

せん断応力（ねじり）

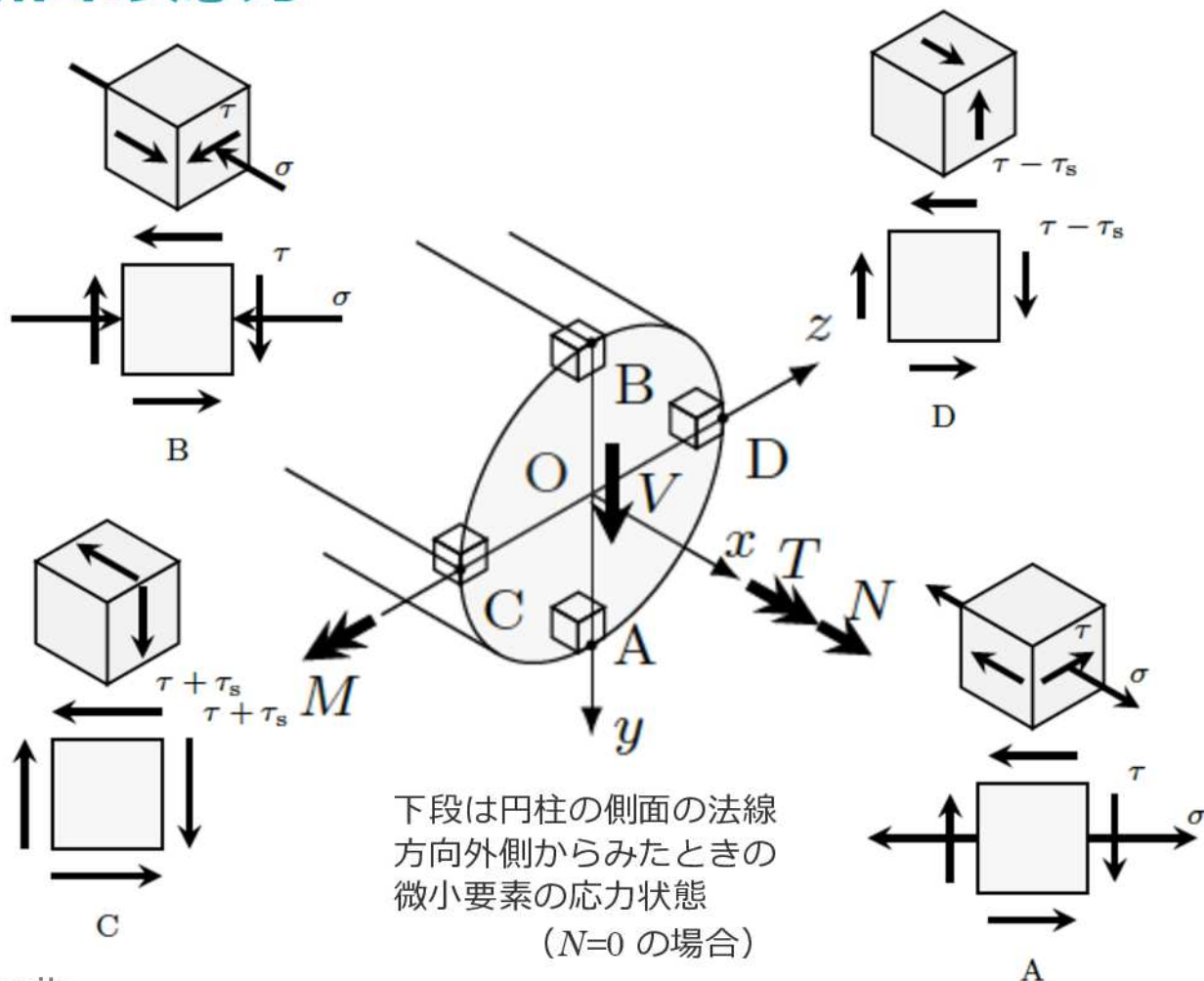
$$\tau = \frac{T}{Z_p}$$

垂直応力（引張・圧縮）

$$\sigma_N = \frac{N}{A}$$

せん断応力（せん断力）
（円形断面はり）

$$\tau_s = \frac{4V}{3A}$$



曲げとねじりの組合せ

垂直応力 せん断応力

$$\sigma = \frac{M}{Z} \quad \tau = \frac{T}{Z_p}$$

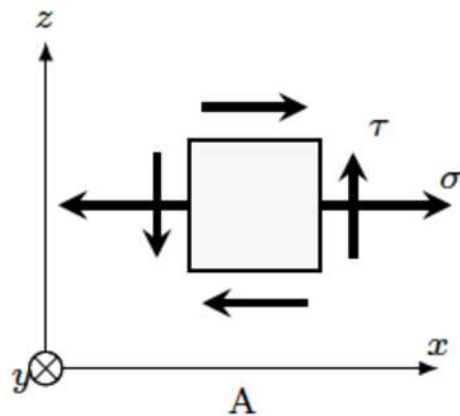
主応力, 最大せん断応力, その方向

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}$$

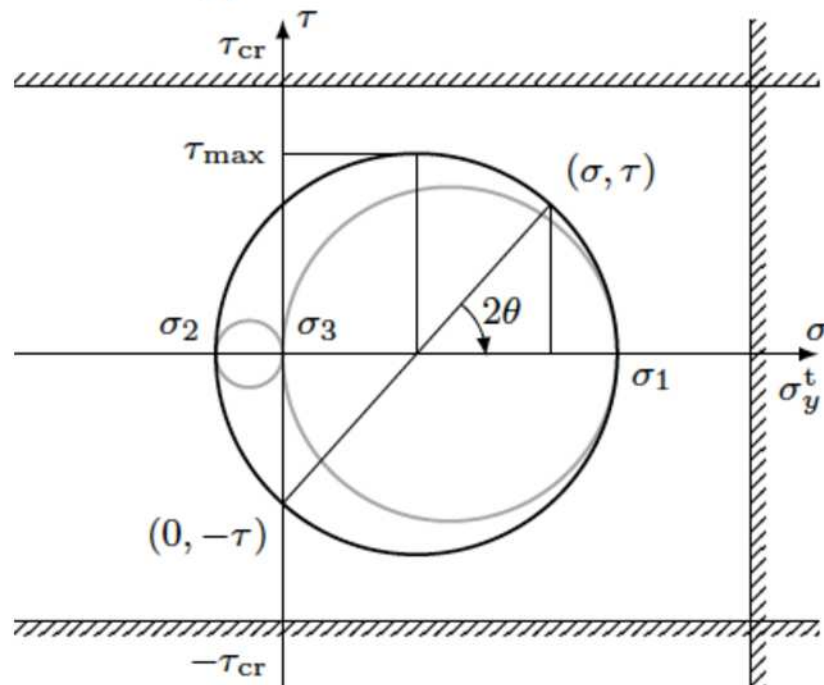
$$\sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \frac{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau}{\sigma}$$



円柱の側面の法線方向内
側から外にみたときの
微小要素の応力状態
($N=0$ の場合)



相当曲げモーメント，相当ねじりモーメント

曲げの
垂直応力

$$\sigma = \frac{M}{Z} \quad \text{plus} \quad \tau = \frac{T}{Z_p}$$

ねじりの
せん断応力

$$\tau = \frac{T}{Z_p} \quad \text{plus} \quad \sigma = \frac{M}{Z}$$

最大主応力(その1)

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}$$

最大せん断応力(その1)

$$\tau_{\max} = \frac{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}$$

断面係数

$$Z = \pi d^3 / 32$$

極断面係数

$$Z_p = \pi d^3 / 16$$

最大主応力(その2)

$$\sigma_1 = \frac{16}{\pi d^3} (M + \sqrt{M^2 + T^2})$$

最大せん断応力(その2)

$$\tau_{\max} = \frac{16}{\pi d^3} \sqrt{M^2 + T^2}$$

相当曲げモーメント

$$M_e = \frac{1}{2} (M + \sqrt{M^2 + T^2})$$

相当ねじりモーメント

$$T_e = \sqrt{M^2 + T^2}$$

最大主応力(その3)

$$\sigma_{\max} = \frac{M_e}{Z}$$

最大せん断応力(その3)

$$\tau_{\max} = \frac{T_e}{Z_p}$$

曲げとねじりの組合せ時の安全率

(中間主応力 $\sigma_3 = 0$ の場合)

垂直応力 せん断応力

$$\sigma = \frac{M}{Z} \quad \tau = \frac{T}{Z_p}$$

主応力, 最大せん断応力

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \frac{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}$$

最大主応力

$$\sigma_{\max} = \sigma_1$$

安全率

最大せん断応力説 (トレスカの条件)

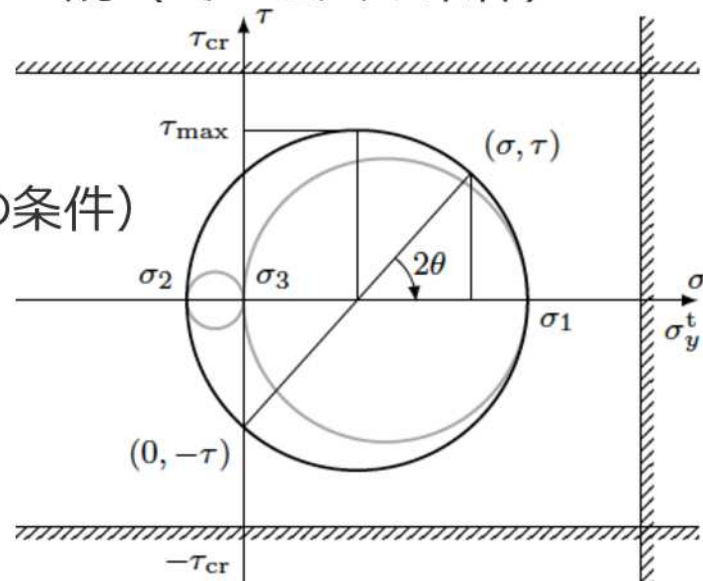
$$n = \frac{\tau_{\text{cr}}}{\tau_{\max}} = \frac{\sigma_y}{2\tau_{\max}}$$

最大せん断ひずみエネルギー説 (ミーゼスの条件)

$$n = \frac{\sigma_y}{\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}}$$

最大主応力説 (ランキンの条件)

$$n = \frac{\sigma_y^t}{\sigma_{\max}}$$



ねじり変形による破壊

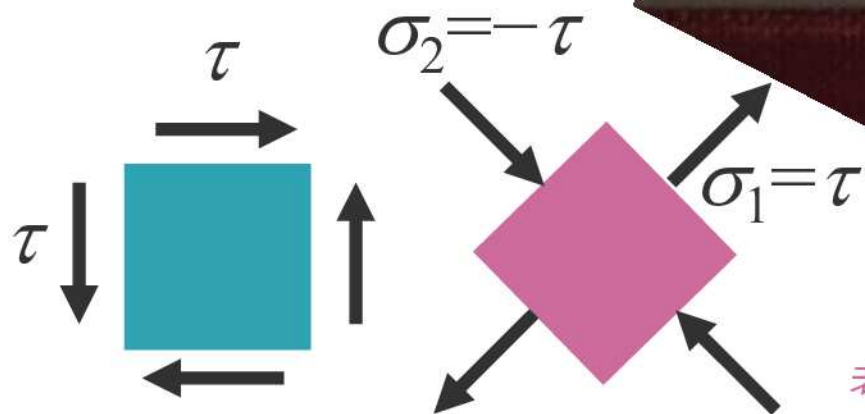
考えてみよう♪



ねじり変形による破壊



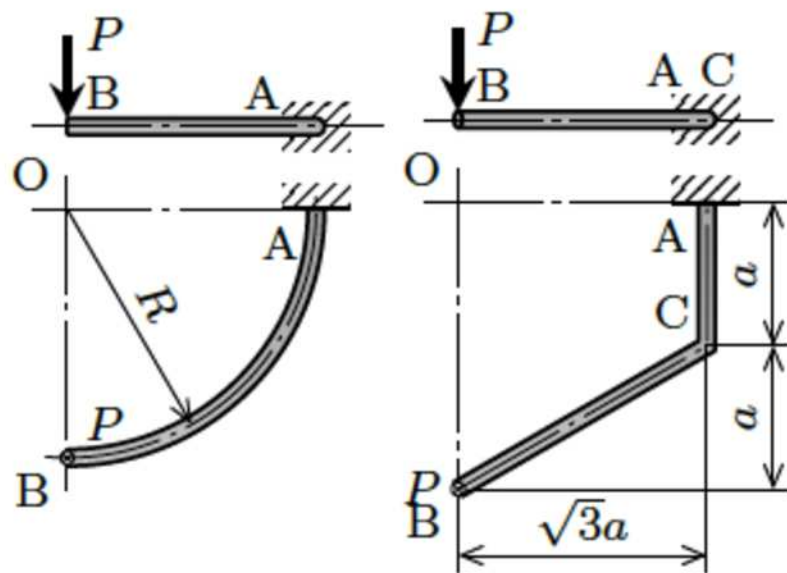
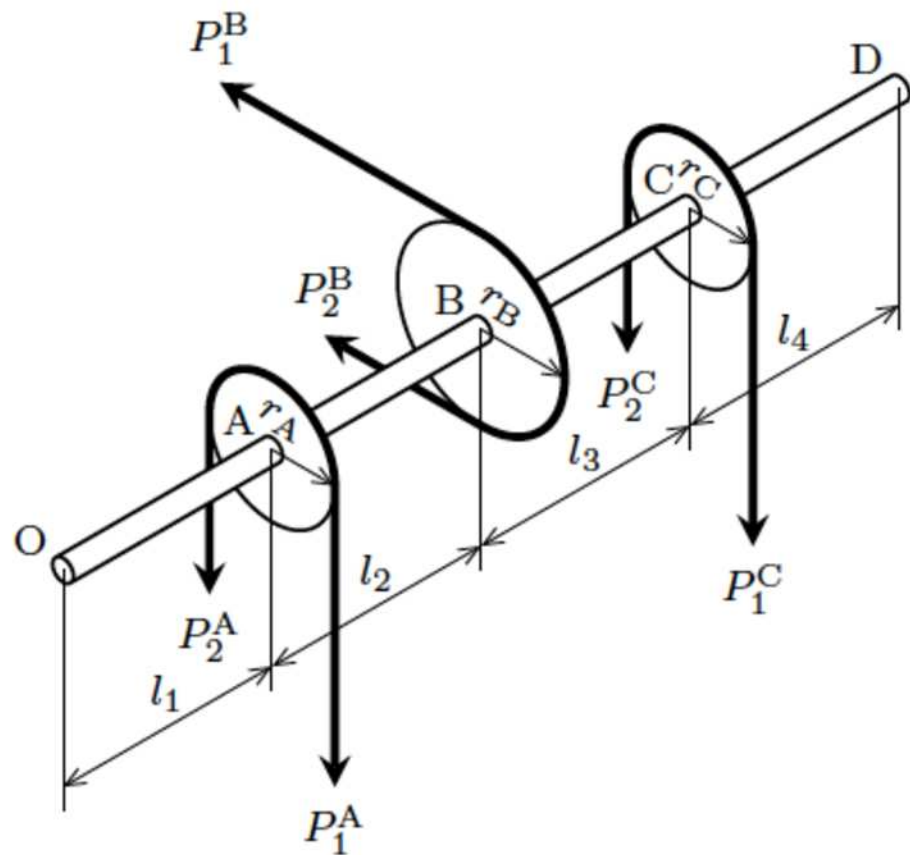
純せん断応力場の主応力と主方向を考えると理解できる。



最大主応力説

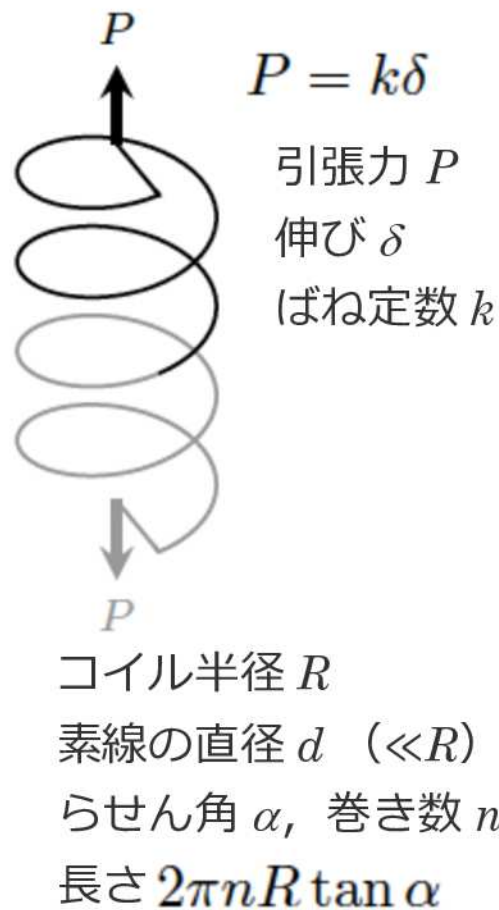
考えてみよう♪

組合せモーメントが作用する問題例



考えてみよう♪

コイルばね



素線の配置に対して
力・モーメントをベクトルの的に分解

荷重 P を分解

引張力

$$N = P \sin \alpha$$

せん断力

$$V = P \cos \alpha$$

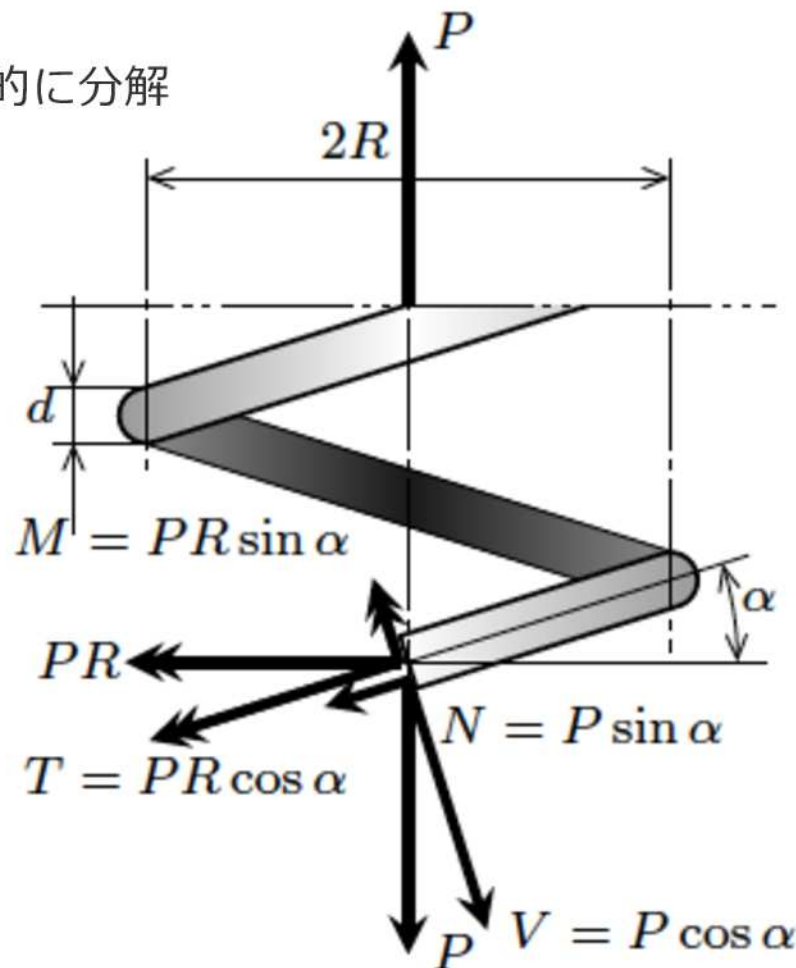
モーメント PR を分解

曲げモーメント

$$M = PR \sin \alpha$$

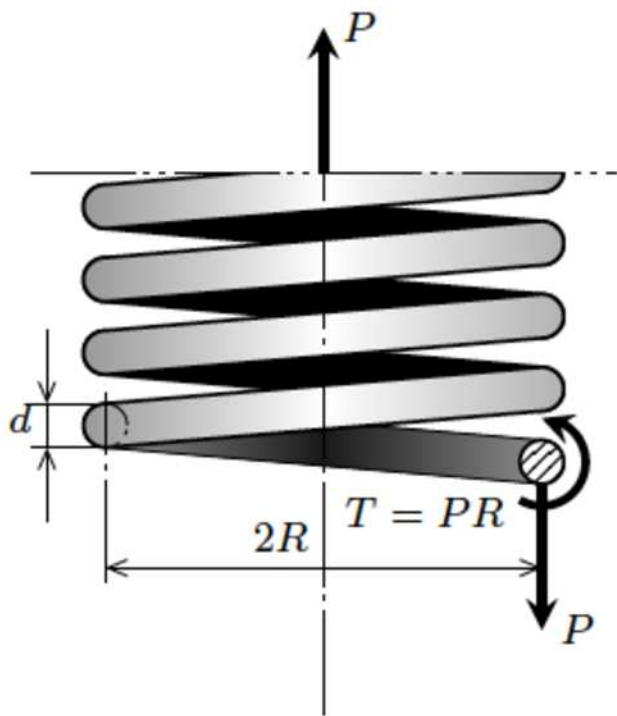
ねじりモーメント

$$T = PR \cos \alpha$$



密巻コイルばね

らせん角 α が小さく場合
 $\sin \alpha \simeq 0 \quad \cos \alpha \simeq 1$



せん断力 $V = P$ と, ねじりモーメント $T = PR$ のみ考慮
 せん断応力

$$\tau_1 = \frac{T}{I_p} \frac{d}{2} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16PR}{\pi d^3} \quad \tau_2 = \frac{V}{A} \frac{4}{3} = \frac{16V}{3\pi d^2} = \frac{16P}{3\pi d^2}$$

$$\tau_{\max} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{16PR}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{3R} \right)$$

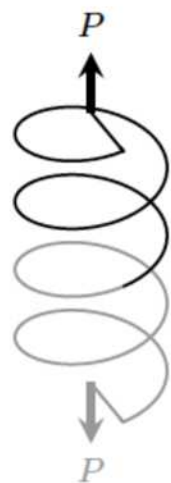
長さ ds の素線要素については, ねじれ角 θds に R を乗じたものが, コイル軸方向伸び変位に寄与する

$$\theta = \frac{T}{GI_p} = \frac{32T}{G\pi d^4} \quad d\delta = R\theta ds = \frac{T}{GI_p} R ds = \frac{32PR^2}{G\pi d^4} ds$$

全長にわたり積分すると, 伸び d と, ばね定数 k を得る.

$$\delta = \int_0^{2\pi Rn} \frac{32PR^2}{G\pi d^4} ds = \frac{64nPR^3}{Gd^4} \quad k = \frac{Gd^4}{64nPR^3}$$

らせん角の大きいコイルばね (応力と強度評価)



$$P = k\delta$$

引張力 P

伸び δ

ばね定数 k

回転角 ω

コイル半径 R

素線の直径 d ($\ll R$)

らせん角 α , 巻き数 n

コイルの長さ $2\pi n R \tan \alpha$

素線の全長 $\frac{2\pi R n}{\cos \alpha}$

曲げモーメントとねじりモーメント

$$M = PR \sin \alpha \quad T = PR \cos \alpha$$

曲げ応力, せん断応力

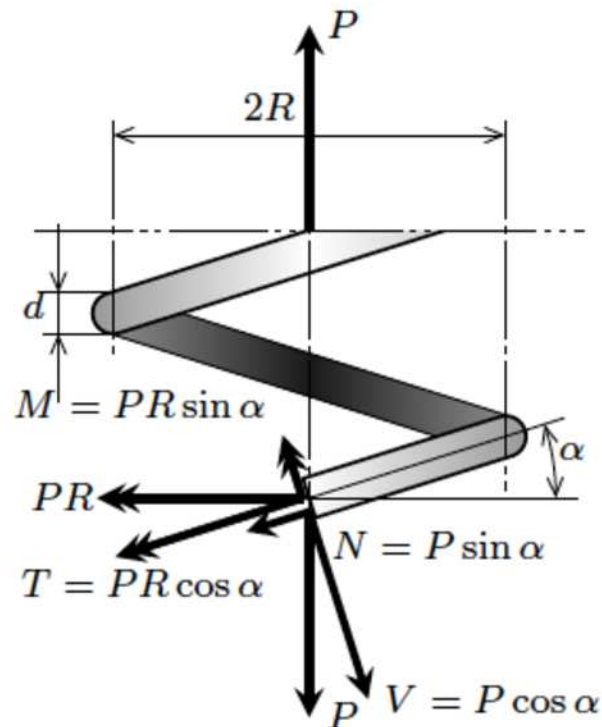
$$\sigma = \frac{M d}{I \cdot 2} = \frac{32M}{\pi d^3} = \frac{32PR \sin \alpha}{\pi d^3}$$

$$\tau = \frac{T d}{I_p \cdot 2} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16PR \cos \alpha}{\pi d^3}$$

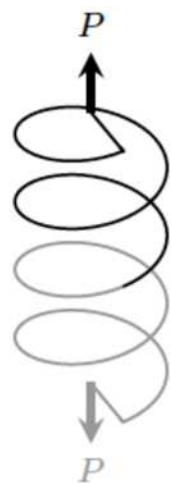
最大主応力と最大せん断応力

$$\sigma_{\max} = \frac{16PR}{\pi d^3} (1 + \sin \alpha)$$

$$\tau_{\max} = \frac{16PR}{\pi d^3}$$



らせん角の大きいコイルばね（伸縮とねじれの考え方）



$$P = k\delta$$

引張力 P

伸び δ

ばね定数 k

回転角 ω

コイル半径 R

素線の直径 d ($\ll R$)

らせん角 α , 巻き数 n

コイルの長さ

$$2\pi n R \tan \alpha$$

長さ ds の素線要素の変形

$$\text{ねじれ角 } \left(\frac{T}{GI_p} \right) ds$$

$$\text{曲げによるたわみ角 } \left(\frac{M}{EI} \right) ds$$

コイル軸方向変位 δ への寄与：

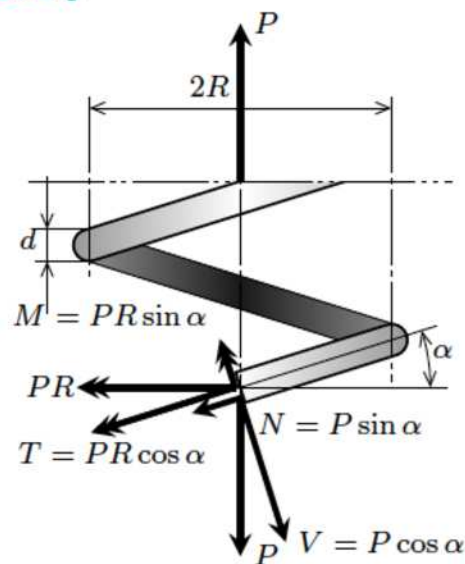
それぞれに $R \cos \alpha$, $R \sin \alpha$ を乗じたもの

$$d\delta = R \left(\frac{T}{GI_p} \right) ds \cos \alpha + R \left(\frac{M}{EI} \right) ds \sin \alpha$$

コイルの軸まわりの回転角 ω への寄与：

それぞれに $\sin \alpha$, $-\cos \alpha$ を乗じたもの

$$d\omega = \left(\frac{T}{GI_p} \right) ds \sin \alpha - \left(\frac{M}{EI} \right) ds \cos \alpha$$



素線の全長

$$\frac{2\pi R n}{\cos \alpha}$$

にわたって積分すれば
 δ , ω を得る。

らせん角の大きいコイルばね（伸縮とねじれの計算結果）

引張力 P

$$P = k\delta$$

コイル半径 R

素線の直径 d ($\ll R$)

らせん角 α , 巻き数 n (コイルの長さ $2\pi n R \tan \alpha$)

伸び δ

$$\delta = \frac{2\pi n R^3}{\cos \alpha} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{GI_p} + \frac{\sin^2 \alpha}{EI} \right) P = \frac{64n R^3}{d^4 \cos \alpha} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{G} + \frac{2 \sin^2 \alpha}{E} \right) P$$

ばね定数 k

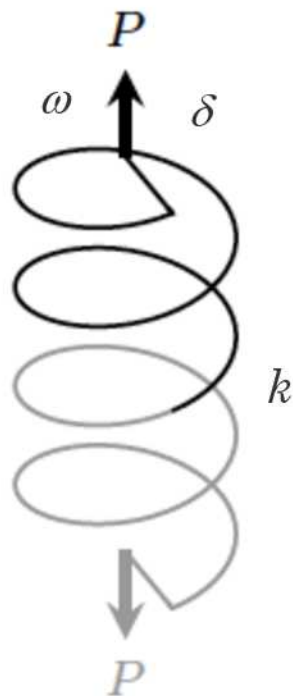
$$k = \frac{d^4 \cos \alpha}{64n R^3 \left(\frac{\cos^2 \alpha}{G} + \frac{2 \sin^2 \alpha}{E} \right)}$$

コイルが自由に回転できる
場合のばね定数である

もし回転しないように拘束
すればばね定数は変化する

回転角 ω

$$\omega = 2\pi n R^2 \sin \alpha \left(\frac{1}{GI_p} - \frac{1}{EI} \right) = \frac{64n R^2 \sin \alpha}{d^4} \left(\frac{1}{G} - \frac{2}{E} \right)$$



次回

材料力学2024 シーズン2

第10話 ねじり 補足 / エネルギー法 前編

2024年7月9日 (火)

Coming Soon . . .