

材料力学2024 シーズン2

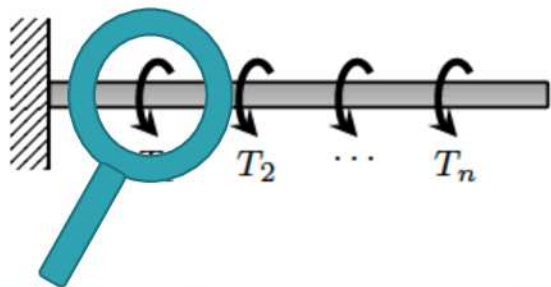
第8話 ねじり 前編

2024年7月2日 (火)

中谷 彰宏

教科書「渋谷陽二，中谷彰宏，材料力学，(2017)，コロナ社」
1, 2, 3, 4, 10, 11章（春学期の授業）を学習し終えて、
5, 6, 7, 8, 9, 12, 13章（夏学期の授業）をこれから学ぶ諸君のために

マクロとミクロ



Benedict Cumberbatch stars as Sherlock

マクロ (x のみの関数)

反力、支持モーメントは？

ねじりモーメント分布は？

変形 (ねじれ角) は？

ミクロ (x, y, z の関数)

応力は？ ひずみは？

フックの法則が両者を関係づける

既に学んだこと

既に学んだこと

ただし、ねじりの問題についても静定問題に限っていた。

不静定問題では、釣り合い方程式だけでは力学状態についての答えを導くことはできない

マクロとミクロを分離・再結合するための理論

材料は何でできているか？

断面はどのような形か？

ミクロとマクロを分離・再結合するための仮定 (仮説) は？

9章では、ねじりと、曲げ・引張・圧縮との連成についても学ぶ

静定問題について、マクロに評価した力学状態を使って、ミクロな応力やひずみを計算する、さらにマクロな変形について計算する

不静定問題 (釣り合い方程式だけでは力学状態が定まらない問題) 答えをだすことができないが、これらの理論体系を全て整えることによって解くことができるようになる (マクロとミクロの連立方程式として問題を解くという意味になる)

材料力学 力の世界と幾何世界に成り立つ系の特性とその発現機構を探究

四天王「棒・はり・軸・柱」軸線に情報を凝縮した力学（全て x のみの関数）

力学（力学的に許容な力）

運動学（幾何学的に許容な変形）

マクロ問題 軸線 (x) での力学 システムの力学	部 材	内 力	剛 性	基本となる 変形量	変 位
	棒 bar	軸 力	引張（圧縮）剛性	垂直ひずみ	伸び（縮み）
	はり beam	せん断力	（せん断剛性）	（曲率）	（たわみ角・ たわみ）
		曲げモーメント	曲げ剛性	曲率	たわみ角・ たわみ
	軸 shaft	ねじりモーメント	ねじり剛性	比ねじれ角	ねじれ角
ミクロ問題 点 (x, y, z) での力学 構成要素の力学	構成要素	応力	弾性係数	ひずみ	
	物体点 material point	垂直応力	ヤング率 （縦弾性係数）	垂直ひずみ	
		せん断応力	せん断弾性係数 （横弾性係数）	せん断ひずみ	

映画などを観て棒にはたらく内力を考えてみよう！

棒を材料力学の部材：棒、はり、軸、柱としてモデル化してみよう

体積力の作用について考えてみよう

棒は重力を受ける：「自重」

加速度があるとき、慣性力を受ける

遠心力、コリオリ力もその一種

表面力の作用について考えてみよう。

大気圧、水圧（流体との接触圧）

固体との接触圧

流体の粘性抵抗（速度に比例する力など）

固体との摩擦力

棒が手や指から受ける力などを考えてみよう



「酔拳(1978)」

くるみ割りのシーンや
棒の使い手との格闘シーン．．．

軸のねじり（円形断面）

材力四天王！

「棒」、「はり」、「軸」、「柱」

ねじりモーメント T を受ける
直径 d の円形断面の軸

ねじれ角 twist angle

断面の回転角 $\phi(x)$

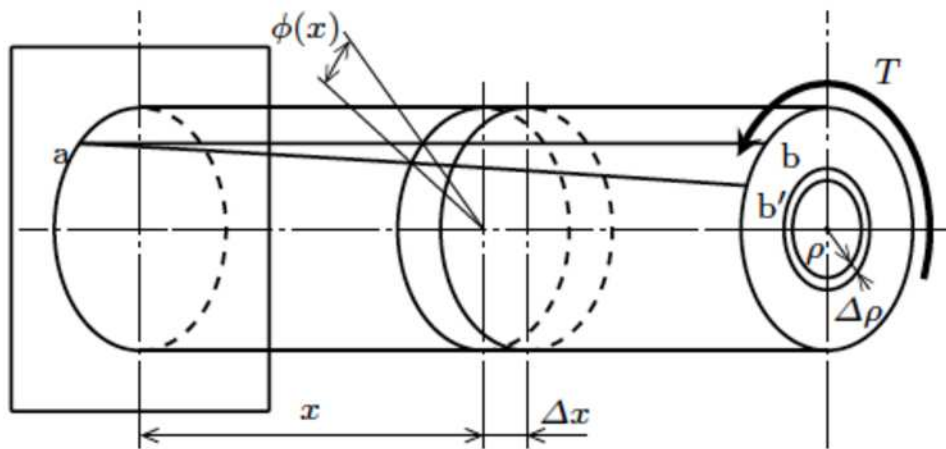
比ねじれ角 specific twist angle

（単位長さあたりのねじれ角）

ねじれ角の導関数

（異なる 2 断面の相対的なねじれ角の差分商の極限）

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} = \frac{\phi(x + \Delta x) - \phi(x)}{\Delta x} \rightarrow \frac{d\phi}{dx} \equiv \theta \quad (\Delta x \rightarrow 0)$$



雑学：用語の接頭語（prefix）に関する補足

比ねじれ角（specific torsion angle）を学ぶのにあわせておさえておきたい

比（specific）とは、単位サイズ（長さ、面積、体積）あたりのという意の修飾語

比熱（specific heat）, 比体積（specific volume）,
比エントロピー（specific entropy）, 比エンタルピー（specific enthalpy）

接頭語（prefix）やそれに類する形容詞・副詞

比（specific）, 超（super-, hyper-, ultra-）, 亜・部分・サブ（sub-）, 非（non-）,
準（quasi-）, 擬（pseudo-）, 再（re-）, 自己（self-）, 反（anti-）,
斜・歪（skew-）, 半（semi-）, 全（full-）, 良（well-）, 悪（ill-）,
部分・偏（partial-）, 遷（trans-）, 単（simple）, 純（pure）, 単一・一（mono-）,
双・二（bi-, di-, dual）, 三重（tri-）, 四（quadra）, 多重（multi-）, 等（equi-）,
一様（uniform）, 均一・均質・同次（homogeneous）, 相互（inter-）,
固有（eigen-, intrinsic）, 内部（intra-）, 外部（extra-）,
マクロ（macro-）, メゾ（meso-）, ミクロ・マイクロ（micro-）, ナノ（nano-）,
遠隔（tele-）, 前・プレ（pre-）, 後・ポスト（post-）

雑学：力学の分類の例

学問体系のカテゴリによる分類例

Mechanics (力学, メカニクス)
 Dynamics (動力学, ダイナミクス)
 Statics (静力学)
 Kinetics (動力学, 速度論, 動態学, カイネティックス)
 Kinematics (運動学)
 Multi-body dynamics (マルチボディーダイナミクス)
 Deformable body mechanics (変形体の力学)
 Energetics (エネルギー論)
 Thermodynamics (広義の熱力学)
 Transport Phenomena (輸送現象論)

方法論による分類 (1)

理論力学 (Theoretical mechanics)
 応用力学 (Applied mechanics)

ただし、呼称、意味だけでなく、カテゴリや、それらの上位概念・下位概念の階層性や包含関係などは、学術分野ごとに、研究者ごとに異なる

方法論による分類 (2)

Analytical mechanics (解析力学)
 Computational mechanics (計算力学)
 Experimental mechanics (実験力学)
 Distinct element method (個別要素法)
 Molecular dynamics (分子動力学)

問題や対象の捉え方による分類例

Solid mechanics (固体力学)
 Fluid mechanics (流体力学)
 Soil mechanics (土質力学)
 Thermodynamics (狭義の熱力学)
 Biomechanics (生体力学)
 Multi-physics (マルチフィジックス)

対象のモデル化による分類

Continuum mechanics (連続体力学)
 Discrete mechanics (離散力学)
 Dynamical system (力学系, 動的システム)

雑学 : kinetics と kinematics での考え方の一例

力 vs 運動

弾性力 vs 変位 $u(t)$

粘性力 vs 速度 $du(t) / dt$

慣性力 vs 加速度 $d^2u(t) / dt^2$

? vs 躍度 $d^3u(t) / dt^3$

.

分数階微積分学 fractional calculus

? vs ? $d^\alpha u(t) / dt^\alpha$

導関数は, α 階での微分に一般化される

α は整数でなくてもよい

軸のねじり（円形断面）

半径 ρ の円筒面と横断面の交線（円）

Δx 離れた2断面の相対変位

$$\Delta u(\rho) \equiv u(x + \Delta x, \rho) - u(x, \rho) = \rho \Delta \phi$$

せん断ひずみ（異なる2断面の周方向の相対変位の差分商の極限）

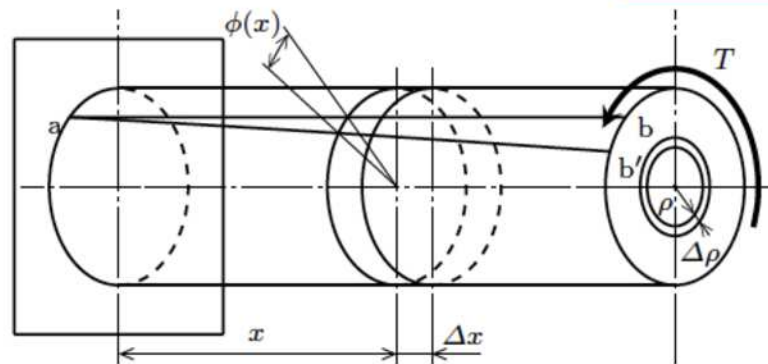
$$\gamma(\rho) = \frac{\Delta u(\rho)}{\Delta x} = \rho \frac{\Delta \phi}{\Delta x} \rightarrow \rho \frac{d\phi}{dx} = \rho \theta \quad (\Delta x \rightarrow 0)$$

せん断応力（Hookeの法則より）

$$\tau(\rho) = G\gamma(\rho) = G\rho\theta$$

ねじりモーメント（せん断応力に半径を乗じて断面にわたり積分）

$$T = \int_A \tau(\rho) \rho dA = G\theta \int_A \rho^2 dA = G\theta I_p$$



断面極2次モーメント

polar moment of inertia of area

$$I_p = \int_A \rho^2 dA$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ミクロからマクロへ

断面極2次モーメント

polar moment of inertia of area

$$\begin{aligned}
 I_p &= \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA \\
 &= \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA \\
 &= I_y + I_x
 \end{aligned}$$

($\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ から)

円, 正方形のような
対称性の高い断面では, 逆に,

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_p$$

原点Oに関する断面極2次モーメント
直径 d の円形断面

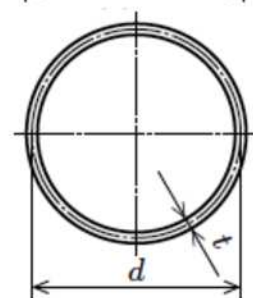
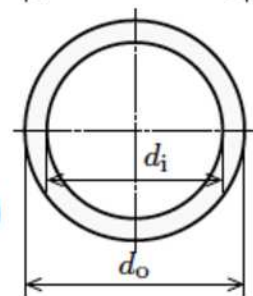
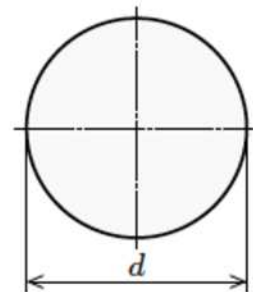
$$I_p = \int_0^{d/2} \rho^2 2\pi \rho d\rho = \frac{\pi d^4}{32}$$

外径 d_o , 内径 d_i の中空断面

$$I_p = \int_{d_i/2}^{d_o/2} \rho^2 2\pi \rho d\rho = \frac{\pi}{32} (d_o^4 - d_i^4)$$

平均直径 d , 厚さ t の薄肉円管

$$I_p \simeq \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi dt = \frac{\pi d^3 t}{4}$$



軸の変形 (モーメントの釣り合いから、せん断応力の公式まで)

モーメントの釣り合い

$$T = \int_A \tau(\rho) \rho dA = G\theta \int_A \rho^2 dA = G\theta I_p \quad \theta = \frac{T}{GI_p}$$

断面極 2 次モーメント

(polar moment of
inertia of area)

$$I_p = \int_A \rho^2 dA$$

ねじり剛性 (torsional rigidity)

$$GI_p$$

比ねじれ角とねじりモーメントの関係

せん断応力 (shear stress)

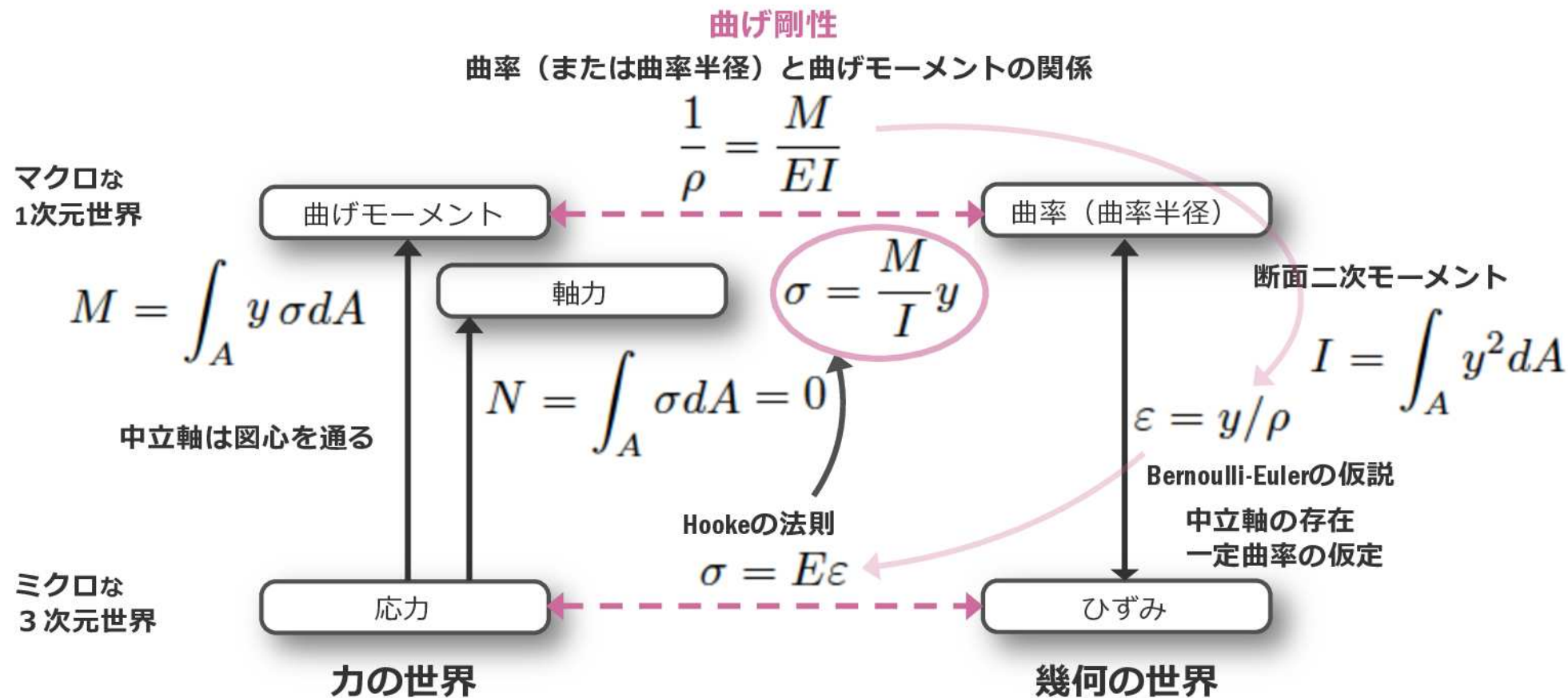
再びフックの法則

$$\tau(\rho) = G\gamma(\rho) = G\rho\theta = \frac{T}{I_p}\rho$$

ρ の一次関数 (中心で0, 外周で最大)

はりの曲率（または曲率半径）と 曲げモーメントの関係（再掲・復習）

はりの場合を思い出そう！



現在公開可能な情報

比ねじれ角と ねじりモーメントの関係

進撃の材力

マクロな
1次元世界

$$T = \int_A \tau \rho dA$$

ねじりモーメント

ねじり剛性
比ねじれ角とねじりモーメントの関係

$$\theta = \frac{T}{GI_P}$$

比ねじれ角

断面極2次モーメント

$$I_P = \int_A \rho^2 dA$$

$$\gamma = \rho \theta$$

断面の変形に対する仮説

ミクロな
3次元世界

せん断応力

Hookeの法則

$$\tau = G\gamma$$

せん断ひずみ

力の世界

幾何の世界

現在公開可能な情報

垂直ひずみと軸力の関係

(復習だが、まだまとめてなかったかもしれない)

進撃の材力

マクロな
1次元世界

$$N = \int_A \sigma dA$$

軸力

引張剛性
垂直ひずみと軸力の関係

$$\varepsilon = \frac{N}{EA}$$

垂直ひずみ

断面積

$$A = \int_A dA$$

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

Hookeの法則

$$\sigma = E\varepsilon$$

$\varepsilon = \text{const.}$

断面の変形に対する仮説

垂直応力

垂直ひずみ

力の世界

幾何の世界

ミクロな
3次元世界

せん断応力、外周部のせん断応力と極断面係数の公式

せん断応力 (shear stress) 極断面係数 (polar section modulus)

ρ の一次関数
(中心で0, 外周で最大)

$$\tau(\rho) = \frac{T}{I_p} \rho$$

外周部のせん断応力

絶対値が最大となる外周部
設計上で重要な箇所

$$\rho = d/2$$

$$\tau_0 = \frac{T}{I_p} \left(\frac{d}{2} \right) = \frac{T}{Z_p} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

直径 d の円形断面

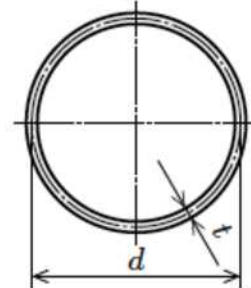
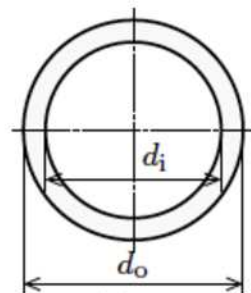
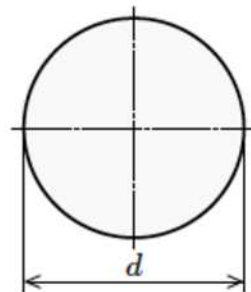
$$Z_p = I_p / (d/2) = \frac{\pi d^3}{16}$$

外径 d_o , 内径 d_i の中空断面

$$Z_p = I_p / (d_o/2) = \frac{\pi}{16} \left(\frac{d_o^4 - d_i^4}{d_o} \right)$$

平均直径 d , 厚さ t の薄肉円管

$$Z_p \simeq I_p / (d_o/2) = \frac{\pi d^2 t}{2}$$



直接積分法によるねじれ角の計算

軸方向変位の評価：被積分関数は
軸力分布と引張剛性から評価

$$\varepsilon(x) \equiv \delta'(x) = \frac{N}{EA}$$

$$\delta(x) = \int_0^x \frac{N}{EA} dx_1 + C_1$$

たわみ角，たわみの評価：被積分関数は
曲げモーメント分布と曲げ剛性から評価

$$\kappa(x) \equiv y''(x) = -\frac{M}{EI}$$

$$\theta(x) \equiv y'(x) = -\int_0^x \frac{M}{EI} dx_1 + C_1$$

$$y(x) = -\int_0^x \int_0^{x_2} \frac{M}{EI} dx_1 dx_2 + C_1 x + C_2$$

ねじれ角の評価：被積分関数は
ねじりモーメント分布とねじり剛性から評価

$$\theta(x) \equiv \phi'(x) = \frac{T}{GI_p}$$

$$\phi(x) = \int_0^x \frac{T}{GI_p} dx_1 + C_1$$

静定問題：つり合い方程式から，被積分関数の力・モーメント分布はあらかじめ決定できているので，積分定数のみを運動学的条件（支持点の境界条件など）から決定する。

不静定問題：反力や支持モーメントが力のつり合いのみで一意に決定できないので，不静定次数の個数の未知内力を不静定内力として，力・モーメント分布の表現の中に残したまま計算し，積分定数と不静定内力の全てを運動学的条件から決定する。

直接積分法によるねじれ角の計算

ねじりのねじれ角：被積分関数は
ねじりモーメント分布とねじり剛性から評価

$$\theta(x) \equiv \phi'(x) = \frac{T}{GI_p}$$

$$\phi(x) = \int_0^x \frac{T}{GI_p} dx_1 + C_1$$

静定問題：つり合い方程式から、被積分関数の力・モーメント分布はあらかじめ決定できているので、積分定数のみを運動学的条件（支持点の境界条件など）から決定する。

不静定問題：反力や支持モーメントが力のつり合いのみで一意に決定できないので、不静定次数の個数の未知内力を不静定内力として、力・モーメント分布の表現の中に残したまま計算し、積分定数と不静定内力の全てを運動学的条件から決定する。

〔参考〕（復習）

引張圧縮の軸方向変位：被積分関数は
軸力分布と引張剛性から評価

$$\varepsilon(x) \equiv \delta'(x) = \frac{N}{EA}$$

$$\delta(x) = \int_0^x \frac{N}{EA} dx_1 + C_1$$

曲げのたわみ角，たわみ：被積分関数は
曲げモーメント分布と曲げ剛性から評価

$$\kappa(x) \equiv y''(x) = -\frac{M}{EI}$$

$$\theta(x) \equiv y'(x) = -\int_0^x \frac{M}{EI} dx_1 + C_1$$

$$y(x) = -\int_0^x \int_0^{x_2} \frac{M}{EI} dx_1 dx_2 + C_1 x + C_2$$

軸のねじり

ねじりモーメント T と分布モーメント t の関係

x 軸に関するモーメントのつりあい

$$T(x) - \int_x^{x+\Delta x} t(\xi) d\xi - T(x + \Delta x) = 0$$

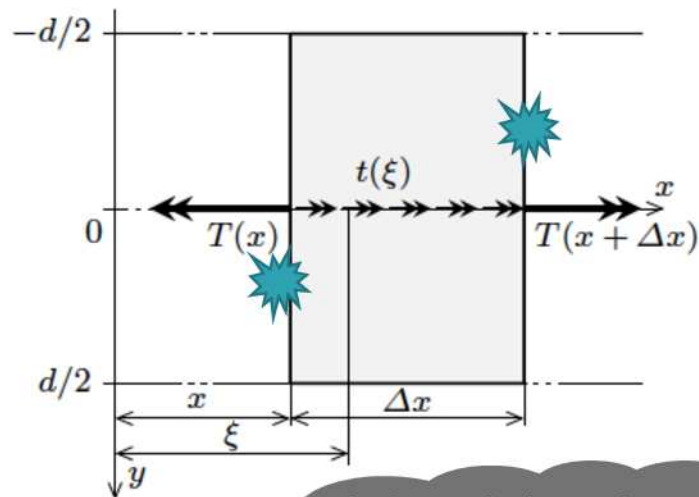
Δx で除して整理すると, 積分の平均値の定理より

$$\frac{T(x + \Delta x) - T(x)}{\Delta x} = -\frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} t(\xi) d\xi = -t(x_1)$$

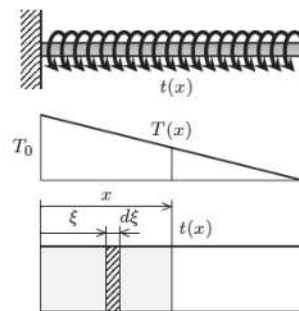
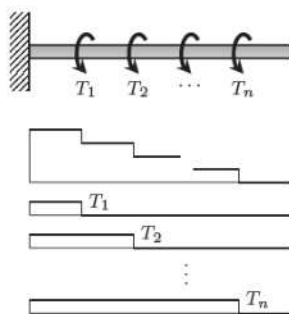
ただし, $x < \exists x_1 < x + \Delta x$.

$\Delta x \rightarrow 0$ をとると

$$\frac{dT}{dx} = -t$$



またつまらぬものを
斬ってしまった



ねじりモーメント線図

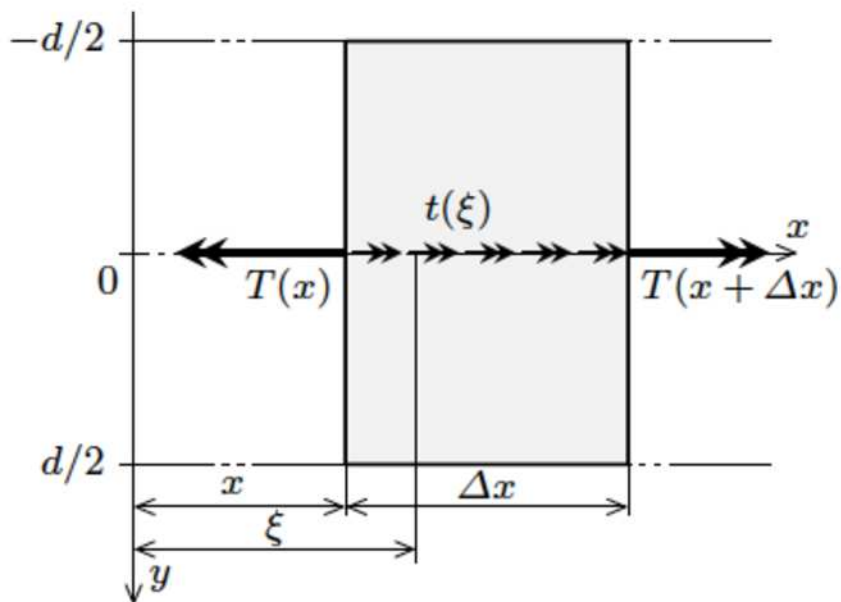
(torsion moment diagram: TMD)



軸のねじり

ねじりモーメントとせん断応力分布の関係

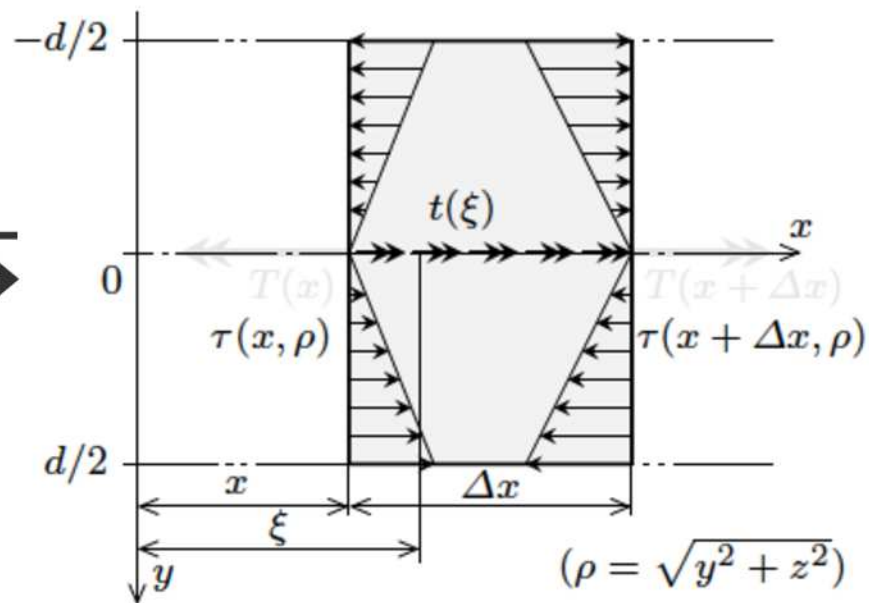
マクロな1次元世界



$$T = \int_A \tau \rho dA$$

$$\tau = \frac{T}{I_p} \rho$$

ミクロな3次元世界



伝動軸の設計 (材料力学 p.170 例題9.1)

(ねじりモーメントのみ作用する場合)

トルクを受けながら回転し、動力を伝達

$$H = 2\pi nT/60$$

H [W] : 伝達動力 (仕事率)

T [N·m] : トルク (モーメント)

n [rpm] : 1分間あたりの回転数

伝達動力 (仕事率) の単位換算

$$1 \text{ [PS]} = 735.5 \text{ [W]} \text{ (仏馬力)}$$

$$1 \text{ [HP]} = 745.7 \text{ [W]} \text{ (英馬力)}$$

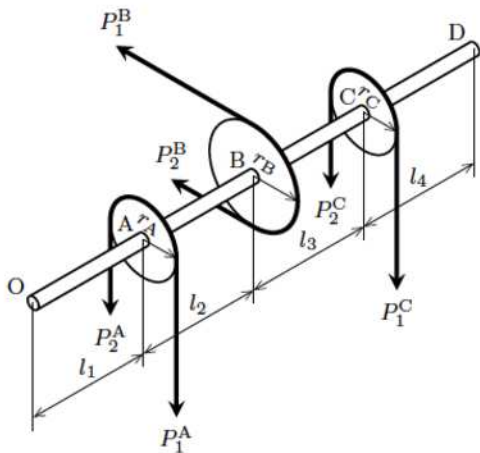
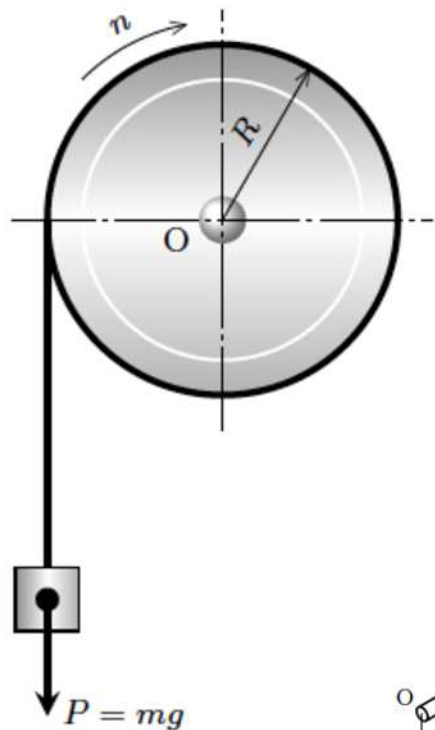
伝導軸の設計

伝達動力と回転数が仕様として与えられると
軸に作用するモーメントが決まる

軸のねじりモーメント分布が計算できる

最大せん断応力が計算できる

最大せん断応力が許容値を超えないように断面寸法を決定する



伝動軸の設計例 (材料力学 p.170 例題9.2)

回転数 n [rpm] , 伝達動力 H_1 [PS] の伝動軸の直径 d を定めなさい。

ただし, 材料の降伏応力を σ_y [Pa] とし, 最大せん断応力説 (トレスカの条件) に従う。すなわち、 $m \tau_{\max}$ が、せん断降伏応力 $\tau_{cr} = \sigma_y / 2$ と等しいとして設計する。ここで、 m は安全率である。

$$T = \frac{60}{2\pi} \frac{H}{n} = \frac{60 \cdot 735.5}{2\pi} \frac{H_1}{n} = \frac{60 \cdot 735.5}{2\pi} \frac{H_1}{n}$$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{Z_p} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16 \cdot 60 \cdot 735.5}{2\pi^2} \frac{H_1}{n} \frac{1}{d^3}$$

$$\tau_{cr} = \frac{\sigma_y}{2} = m \tau_{\max} \qquad d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 60 \cdot 735.5 m H_1}{\pi^2 n \sigma_y}} = 41.5 \sqrt[3]{\frac{m H_1}{n \sigma_y}}$$

伝動軸（材料力学 p.182 演習問題〔9.3〕〔9.4〕）

〔9.3〕 内径と外径の比が 1:1 の中空丸軸が毎分 200 回転して 4000PS の動力を伝達する。許容せん断応力を 30MPa とするとき外径を定めなさい。

〔9.4〕 伝動軸が毎分 100 回転して、点 B を駆動し、点 A, 点 C にそれぞれ 20PS, 40PS の動力を伝達する。許容せん断応力を 3MPa とするとき軸径を定めなさい。ただし, AB 間, BC 間, AC 間の長さをそれぞれ, 50mm, 25mm, 75mm とし, 横弾性係数 $G = 80\text{GPa}$ とする。

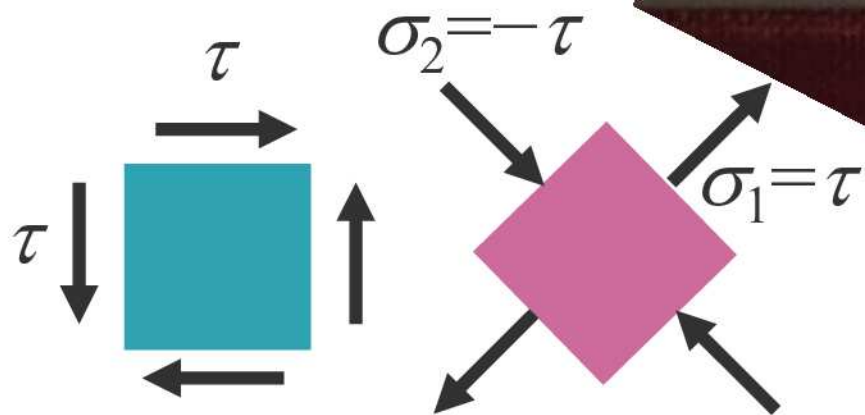
ねじり変形による破壊



ねじり変形による破壊



純せん断応力場の主応力と主方向を考えると理解できる。



最大主応力説



テーパのついた軸（材料力学 p.182 演習問題〔9.1〕）

〔9.1〕 長さが l で、端面の直径が d と nd のテーパのついた軸の両端にモーメント T が作用するとき、表面のせん断応力分布、せん断ひずみ分布、比ねじれ角の分布、両端のねじれ角を求めなさい。ただし、 $0 < n < 1$ であり、横弾性係数を G とする。

$$d(x) = \frac{x}{l}d + \left(1 - \frac{x}{l}\right)nd$$

$$I_p(x) = \frac{\pi}{32} \{d(x)\}^4$$

$$\tau(x) = \frac{T}{I_p(x)} \frac{d(x)}{2} = \frac{16T}{\pi \{d(x)\}^3}$$

$$\gamma(x) = \frac{\tau(x)}{G} = \frac{16T}{\pi G \{d(x)\}^3}$$

$$\theta(x) = \frac{T}{GI_p(x)} = \frac{\gamma(x)}{\frac{d(x)}{2}} = \frac{32T}{\pi G \{d(x)\}^4}$$

$$\begin{aligned} \phi(l) &= \int_0^l \theta(x) dx = \frac{32T}{\pi G} \int_0^l \frac{1}{\left\{\frac{x}{l}d + \left(1 - \frac{x}{l}\right)nd\right\}^4} dx \\ &= \frac{n^2 + n + 1}{3n^3} \frac{32Tl}{\pi G d^4} \end{aligned}$$

段付き軸のねじり (材料力学 p.173 例題9.3)

モーメントのつり合い

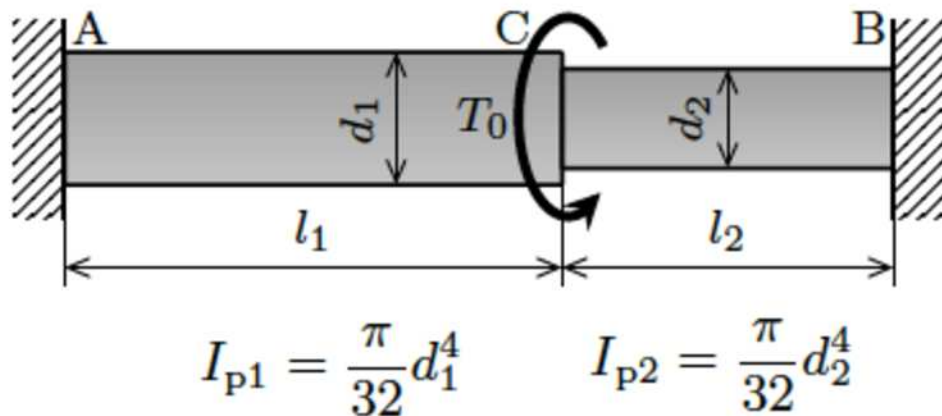
$$T_A + T_B - T_0 = 0$$

点Cのねじれ角

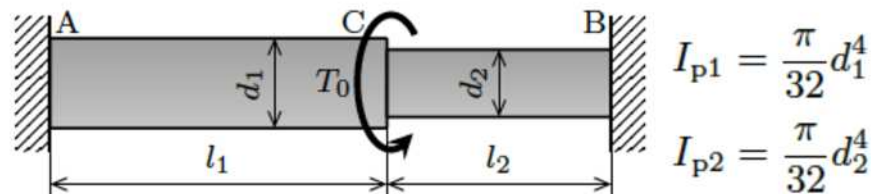
$$\phi_0 = \frac{T_A l_1}{G I_{p1}} = \frac{T_B l_2}{G I_{p2}}$$

これを解いて,

$$T_A = \frac{T_0}{1 + \left(\frac{l_1}{l_2}\right) \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4} \quad T_B = \frac{T_0}{1 + \left(\frac{l_2}{l_1}\right) \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4} \quad \phi_0 = \frac{32 l_1 l_2 T_0}{G \pi (l_2 d_1^4 + l_1 d_2^4)}$$



段付き軸のねじり (材料力学 p.173 例題9.3)



作用するモーメント $t(x) = T_0 \delta(x - l_1)$

$$\frac{dT}{dx} = -T_0 \delta(x - l_1)$$

点Aでの支持モーメントを定義 $T(0) = T_A$

ねじりモーメント分布

$$T(x) = T_A - T_0 H(x - l_1)$$

モーメントのつりあいから

$$T(l_1 + l_2) + T_B = 0 \quad \text{すなわち} \quad T_A + T_B = T_0$$

ねじりモーメント分布 (場合分した表記)

$$T(x) = \begin{cases} T_A & (0 < x < l_1) \\ T_A - T_0 = -T_B & (l_1 < x < l_1 + l_2) \end{cases}$$

区間 $0 \leq x < l_1$

$$\phi(x) = \int_0^x \theta dx_1 + C_1 = \int_0^x \frac{T}{GI_P} dx + C_1$$

点Aのねじれ角の条件 $\phi(0) = 0$ から $C_1 = 0$

$$\phi(x) = \frac{T_A x}{GI_{P1}}$$

区間 $l_1 < x \leq l_1 + l_2$

$$\phi(x) = -\frac{T_B(x - l_1)}{GI_{P2}} + \phi(l_1)$$

点Bのねじれ角の条件

$$\phi(l_1 + l_2) = -\frac{T_B l_2}{GI_{P2}} + \phi(l_1) = 0$$

支持モーメント

$$T_A = \frac{\frac{l_2}{I_{P2}}}{\frac{l_1}{I_{P1}} + \frac{l_2}{I_{P2}}} T_0 \quad T_B = \frac{\frac{l_1}{I_{P1}}}{\frac{l_1}{I_{P1}} + \frac{l_2}{I_{P2}}} T_0$$

次回

材料力学2024 シーズン 2

第9話 ねじり 後編

2024年7月5日（金）

Coming Soon . . .