

材料力学2024 シーズン2

第2話 はりの曲げ応力 後編

2024年6月7日（金）

中谷 彰宏

教科書「渋谷陽二，中谷彰宏，材料力学，(2017)，コロナ社」
1, 2, 3, 4, 10, 11章（春学期の授業）を学習し終えて、
5, 6, 7, 8, 9, 12, 13章（夏学期の授業）をこれから学ぶ諸君のために

はり理論の定式化の前提として考えたこと

材質・形状・問題の設定と生じる応力や変形の仮定

材料 (material)

フックの法則 (Hooke's law)

等方 (isotropic)

均質 (homogeneous)

形状 (shape)

真直はり (straight beam)

一様断面 (uniform cross section)

問題における幾何・負荷の条件と
生じる力学場・変形に対する仮定

対称曲げ (symmetrical bending)

純曲げ (pure bending)

曲げ応力のみが生じる

ベルヌーイ・オイラーの仮説
(Bernoulli-Euler's hypothesis)

変形前に、はりの軸線に垂直な横断面は、
変形後も、平面を保ち、かつ、軸線に直交

これらが満足されているとき、はり理論は問題に対して近似解ではなく厳密解を与える

曲げ応力、曲げ変形が、他の因子に比べて支配的である限り、これらの前提が成り立たない場合においても、導出した理論は、よい近似解を与えることが経験的に知られている

断面が一様でなく、せん断力が生じる場合

材質・形状・問題の設定と生じる応力や変形の仮定

材料 (material)

フックの法則 (Hooke's law)

等方 (isotropic)

均質 (homogeneous)

形状 (shape)

真直はり (straight beam)

~~一様断面 (uniform cross section)~~

断面寸法や形状が変化してもよい

問題における幾何・負荷の条件と
生じる力学場・変形に対する仮定

対称曲げ (symmetrical bending)

~~純曲げ (pure bending)~~

曲げ応力のみが生じるせん断力が生じてもよい

ベルヌーイ・オイラーの仮説
(Bernoulli-Euler's hypothesis)

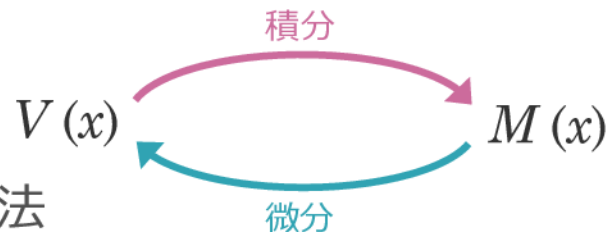
変形前に、はりの軸線に垂直な横断面は、
変形後も、平面を保ち、かつ、軸線に直交

理論の前提を緩めても、曲げ応力、曲げ変形が、他の因子に比べて支配的である限り、
導出した理論は、よい近似解を与えることが経験的に知られている

初等の材料力学では、ベルヌーイ・オイラーの仮説がいつも成立することを前提とする
ただし「支配的」かどうかの見極めは、応力、変形（ひずみ）、変位などの観点からの
現象の深い洞察を必要とする

現在公開可能な情報

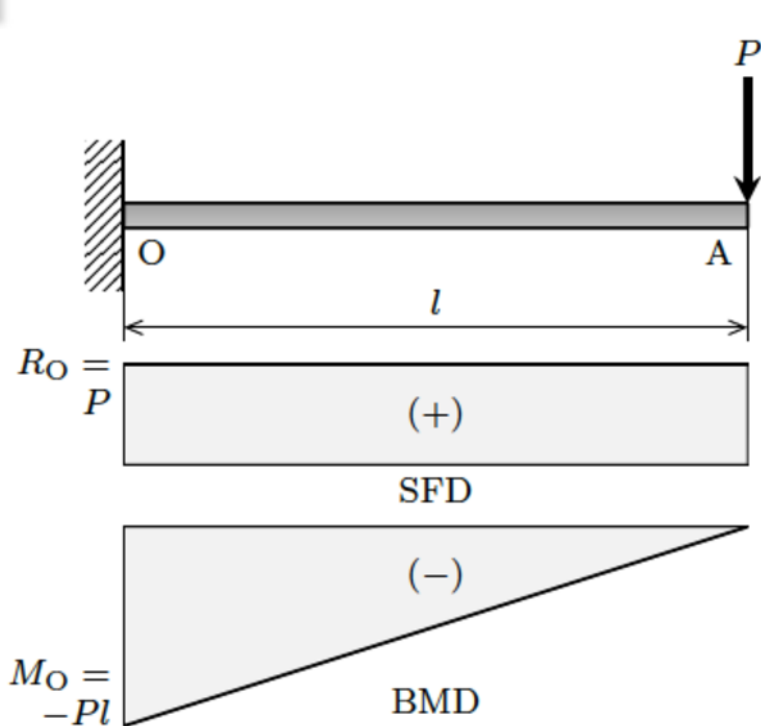
エンジニアリング的な直感的方法



横荷重・支持の種類	せん断力図 SFD	曲げモーメント図 BMD
横荷重のない区間	水平な直線	(傾いた) 直線
一様分布荷重	傾いた直線	二次曲線
集中荷重	荷重値だけの不連続	(傾きが不連続な) 折れ曲がり
集中モーメント	なんの変化もない	モーメント値だけの不連続
回転・移動支持	反力の値だけの不連続	0
固定支持	反力の値だけの不連続	支持モーメントの値だけの不連続
自由端	0	0
ヒンジ	なんの変化もない	0

SFD、BMDの概形を“計算せずに”思い描く基本テクニック

一様強さのはり（片持ちはりの例）



断面係数 $Z(x)$

曲げモーメント分布 $M(x) = -P(l - x)$

固定支持断面 ($x = 0$) 危険断面

曲げモーメントの大きさが最大

一様断面の場合、縁曲げ応力の絶対値も最大

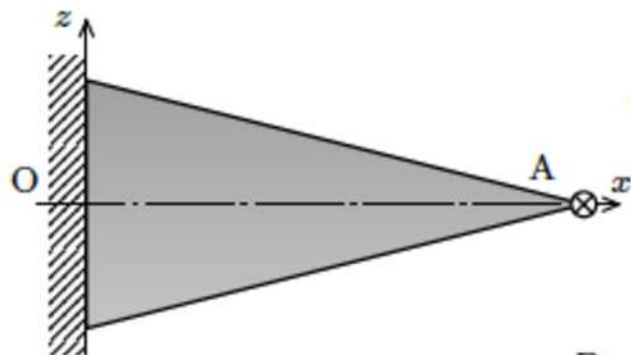
この断面の縁曲げ応力が許容限界値に達すると破損するが、このとき他の断面は破損しない。

一様強さのはり（beam of uniform strength）

断面係数を位置に依って変化させて、任意の断面の縁曲げ応力が同時に許容限界値に達するようにする

材料の有効利用の観点からは、総量を減らすことにつながり、無駄のない設計ができると考えられる

一様強さのはり（高さが一定、幅が変化）



曲げモーメント分布

$$M(x) = -P(l - x)$$

縁曲げ応力

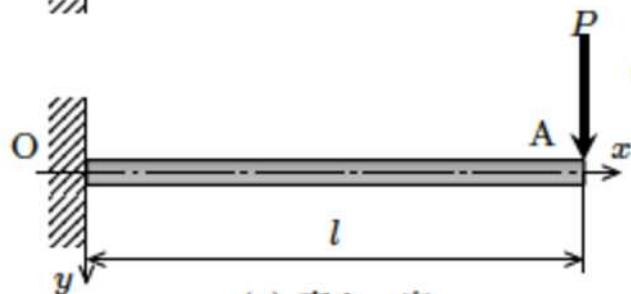
$$\sigma_{\max}(x) = \frac{M(x)}{Z(x)}$$

縁曲げ応力
(一定目標値)

$$\sigma_{\max}(x) = \sigma_0 \text{ (一定)}$$

断面係数

$$Z(x) = \frac{M(x)}{\sigma_0} = \frac{-P(l - x)}{\sigma_0}$$



(a) 高さ一定

長方形断面：幅 $b(x)$ 、高さ $h(x)$

$$Z(x) = \frac{b(x)\{h(x)\}^2}{6}$$

高さ $h(x) = h_0$ (一定) の場合

幅 $b(x)$ の変化

$$b(x) = \frac{6P}{\sigma_0 h_0^2} (l - x)$$



一様強さのはり（幅が一定、高さが変化）



曲げモーメント分布

$$M(x) = -P(l - x)$$

縁曲げ応力

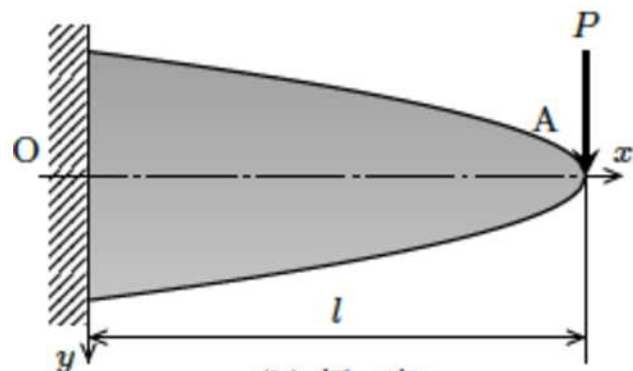
$$\sigma_{\max}(x) = \frac{M(x)}{Z(x)}$$

縁曲げ応力
(一定目標値)

$$\sigma_{\max}(x) = \sigma_0 \text{ (一定)}$$

断面係数

$$Z(x) = \frac{M(x)}{\sigma_0} = \frac{-P(l - x)}{\sigma_0}$$



(b) 幅一定

長方形断面：幅 $b(x)$ 、高さ $h(x)$

$$Z(x) = \frac{b(x)\{h(x)\}^2}{6}$$

幅 $b(x) = b_0$ (一定) の場合

高さ $h(x)$ の変化

$$h(x) = \sqrt{\frac{6P}{\sigma_0 b_0}}(l - x)$$



身の回りの一様強さ的な構造の応用

太陽の塔、千里橋



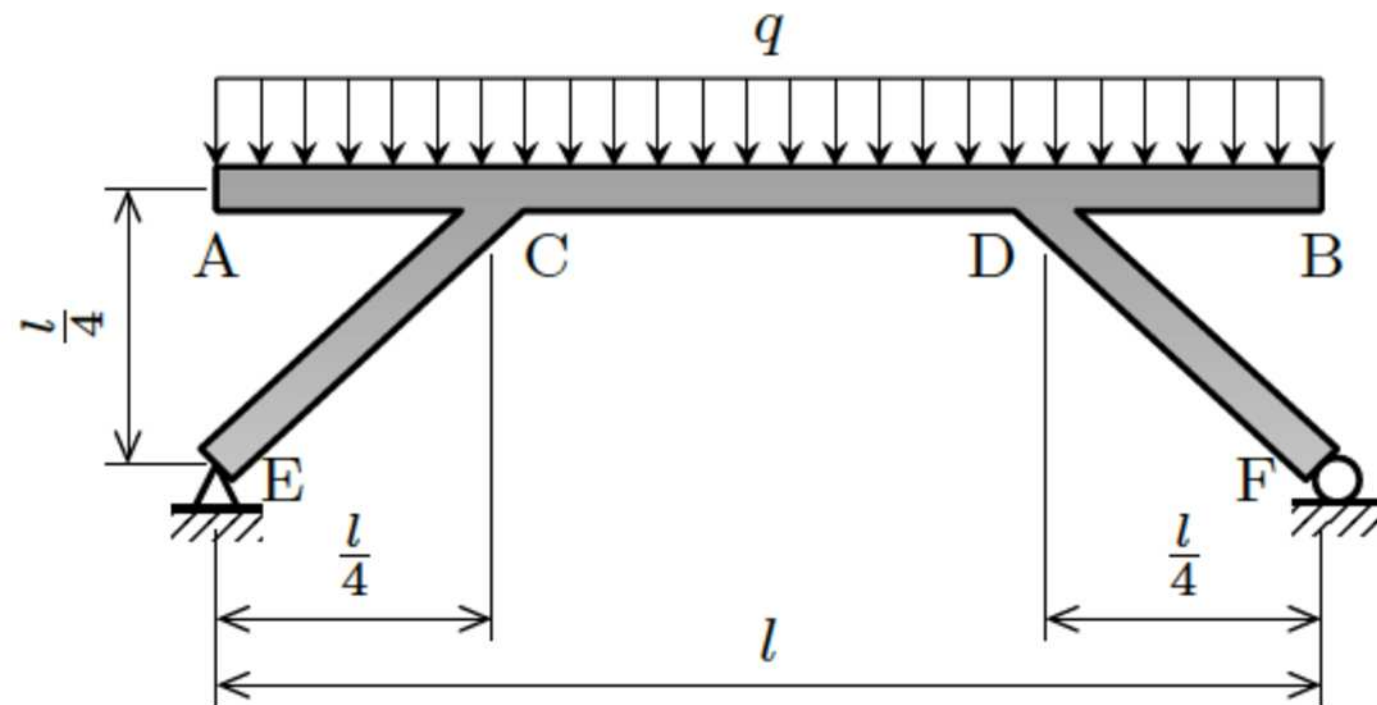
(2021/6/10 AN)



(2021/6/9 AN)

強度は、安定感、安心感と
無縁ではないかも

材料力学の目でみた千里橋



曲げモーメント図を書いてみよう



ココがポイント！

曲げモーメントが大きい部分の断面高さが大きくなるように設計されている

考えてみよう♪

通潤橋

- ✓ 自重を力の源とする.
- ✓ 接触面の圧縮垂直応力と、それに
- ✓ 対応する摩擦力に相当する剪断応力のネットワークにより構造を形成



(2014/5/18 AN)



(2014/5/18 AN)

鋼材の橋とは
どこが違うか？

Clare Bridge, over the River Cam



曲げモーメントが大きいと
思える中央部は非常に細く、
かつ、既に折れている



異なる材料から構成される場合

材質・形状・問題の設定と生じる応力や変形の仮定

材料 (material)

フックの法則 (Hooke's law)

等方 (isotropic)

~~均質 (homogeneous)~~

断面内の位置によって、材料 (ヤング率) が異なってもよい

形状 (shape)

真直はり (straight beam)

一様断面 (uniform cross section)

問題における幾何・負荷の条件と
生じる力学場・変形に対する仮定

対称曲げ (symmetrical bending)

純曲げ (pure bending)

曲げ応力のみが生じる

ベルヌーイ・オイラーの仮説
(Bernoulli-Euler's hypothesis)

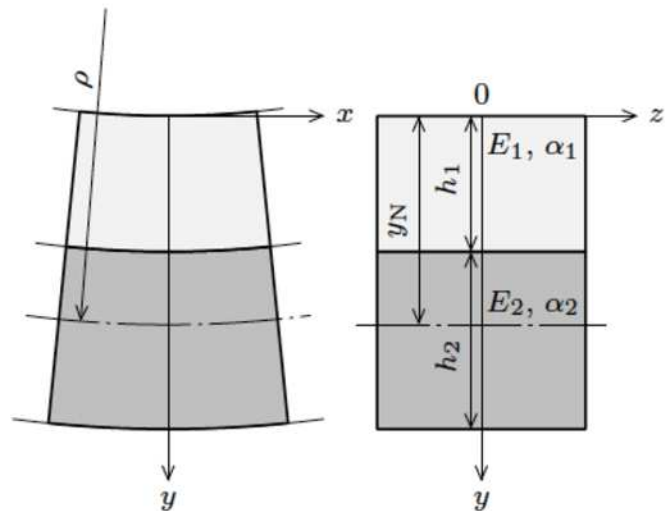
変形前に、はりの軸線に垂直な横断面は、
変形後も、平面を保ち、かつ、軸線に直交

理論の前提を緩めても、曲げ応力、曲げ変形が、他の因子に比べて支配的である限り、
導出した理論は、よい近似解を与えることが経験的に知られている

初等の材料力学では、ベルヌーイ・オイラーの仮説がいつも成立することを前提とする
ただし「支配的」かどうかの見極めは、応力、変形 (ひずみ)、変位などの観点からの
現象の深い洞察を必要とする

組合せはり 複合材料

力学特性（ヤング率、線膨張係数など）が異なる材料を複数組み合わせて一体として曲がるように結合したはり



ベルヌーイ・オイラーの仮説： $\varepsilon = \frac{\eta}{\rho}$

ρ 中立軸の曲率半径

$\eta = y - y_N$ 中立軸からの距離

フックの法則から $\sigma(y, z) = \frac{E(y, z)\eta}{\rho}$

軸力（応力の合力）が 0

$$N = \int_A \sigma(y, z) dA = \int_A \frac{E(y, z)\eta}{\rho} dA = 0$$

中立軸の座標が決まる

$$y_N = \frac{\int_A E(y, z)y dA}{\int_A E(y, z) dA}$$

モーメント（応力の合モーメント）は曲率に比例

$$M = \int_A \sigma(y, z)\eta dA = \frac{1}{\rho} \int_A E(y, z)\eta^2 dA = \frac{1}{\rho} \int_A E(y, z)(y - y_N)^2 dA$$

比例定数 D : 等価曲げ剛性 EI^*

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{D}, \quad D = \int_A E(y, z)(y - y_N)^2 dA$$

組合せはりにおける曲率（または曲率半径）と曲げモーメントの関係

考え方の理解が重要であり、公式として記憶する意味はない

曲率（または曲率半径）と
曲げモーメントの関係

等価曲げ剛性

(EI^* などを書くこともある)

$$D = \int_A E(y, z)(y - y_N)^2 dA$$

$$M = \int_A \eta \sigma dA$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{D}$$

マクロな
1次元世界

中立軸は必ずしも図心を通らない

$$y_N = \frac{\int_A E(y, z)y dA}{\int_A E(y, z)dA}$$

(均質体では図心の定義式に相当)

ミクロな
3次元世界

曲げモーメント

軸力

$$N = \int_A \sigma dA = 0$$

Hookeの法則

$$\sigma(y, z) = E(y, z) \varepsilon(y)$$

応力

曲率（曲率半径）

$$\varepsilon = \frac{\eta}{\rho}$$

$$\eta = y - y_N$$

Bernoulli-Eulerの仮説

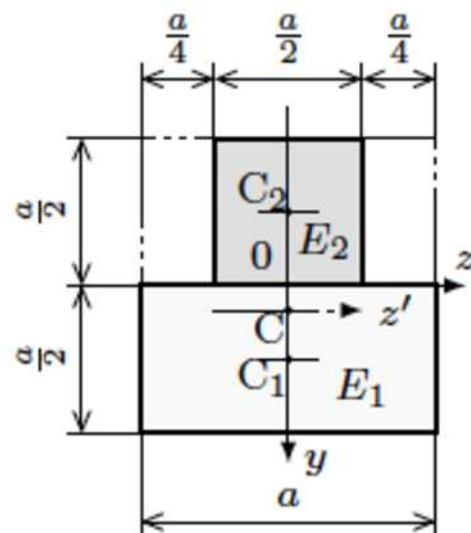
中立軸の存在
一定曲率の仮定

ひずみ

力の世界

幾何の世界

組合せはりの計算例



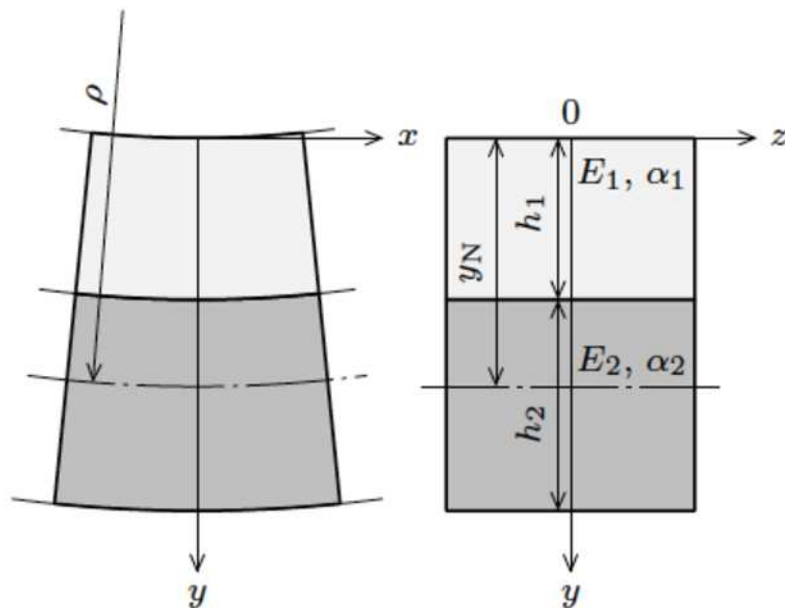
- (1) 中立面の位置 (C の y 座標) は?
(※ $E_1 \neq E_2$ のときは図心とは異なる)
- (2) 等価曲げ剛性は?
- (3) 曲げ応力分布 $\sigma_x(y)$ は、

考えてみよう♪

組合せはりの計算例

〔5.4〕 問図 5.3 のように、ヤング率 E_1 、線膨張係数 α_1 、厚さ h_1 の材料 1 と、ヤング率 E_2 、線膨張係数 α_2 、厚さ h_2 の材料 2 を接合してつくられた長方形断面の真直はりについて以下の問いに答えなさい。

- (1) 長方形断面の真直はりの中立軸の位置 y_N 、等価曲げ剛性 D 、および断面に曲げモーメント M が作用するときの曲げ応力分布を求めなさい。
- (2) $h_1 = h_2 = h$ のとき、無負荷の状態で、温度を T だけ変化させたときの曲率半径 ρ を求めなさい。



問図 5.3

〔5.5〕 鉄筋コンクリートを模擬したモデルを考える。幅 b 、高さ h の断面の圧縮側表面から h_S の位置に鉄筋が埋め込まれ、その断面積は A_S （ただし、 $A_S \ll bh$ ）である。圧縮側ではヤング率 E_C のコンクリート、引張側ではヤング率 E_S の鉄筋によって荷重が受け持たれ、その剛性の比を $n = E_S/E_C$ とする（通常は $n = 15$ 程度）。断面に曲げモーメント M が作用するときの中立軸の位置 h_N と曲げ応力分布を求めなさい。

考えてみよう♪

はりの非対称曲げ

材料 (material)

フックの法則 (Hooke's law)

等方 (isotropic)

均質 (homogeneous)

形状 (shape)

真直はり (straight beam)

一様断面 (uniform cross section)

問題における幾何・負荷の条件と
生じる力学場・変形に対する仮定

~~対称曲げ (symmetrical bending)~~

断面が非対称でもよい

対称面に沿わない方向に横荷重・モーメントが作用してもよい

純曲げ (pure bending)

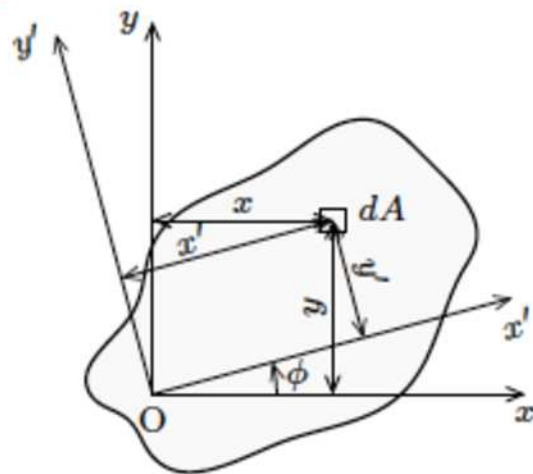
曲げ応力のみが生じる

ベルヌーイ・オイラーの仮説
(Bernoulli-Euler's hypothesis)

変形前に、はりの軸線に垂直な横断面は、
変形後も、平面を保ち、かつ、軸線に直交

理論の前提を緩めても、曲げ応力、曲げ変形が、他の因子に比べて支配的である限り、
導出した理論は、よい近似解を与えることが経験的に知られている等、前述のとおり

断面二次モーメントと断面相乗モーメント



断面二次モーメント

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad I_y = \int_A x^2 dA$$

断面相乗モーメント

$$I_{xy} = \int_A xy dA$$

$$I_{x'} = \int_A y'^2 dA = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\phi - I_{xy} \sin 2\phi$$

$$I_{y'} = \int_A x'^2 dA = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\phi + I_{xy} \sin 2\phi$$

$$I_{x'y'} = \int_A x'y' dA = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\phi + I_{xy} \cos 2\phi$$

図 5.9 座標軸の回転

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \phi + y \sin \phi, \\ y' &= -x \sin \phi + y \cos \phi \end{aligned} \right\}$$

これらの量は、慣性モーメントと呼ばれる
テンソルの座標変換を受けるので、
慣性モーメントテンソルとも呼ばれる。

慣性主軸、主断面二次モーメント

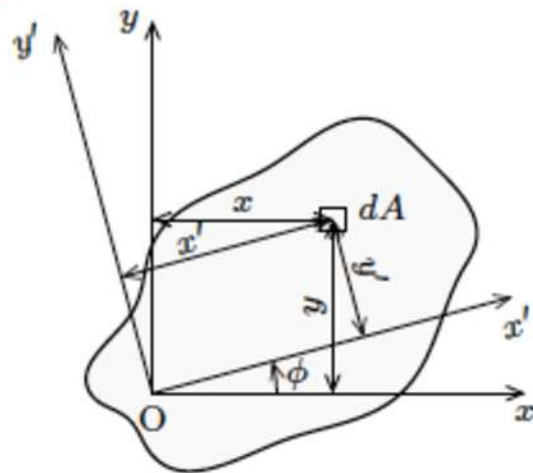


図 5.9 座標軸の回転

座標回転変換により二つの慣性モーメントが最大または、最小となる回転角を選ぶことができる。これらを主断面二次モーメントという

$$I_{x'} = \int_A y'^2 dA \quad I_{y'} = \int_A x'^2 dA$$

このとき直交する二軸を慣性主軸と呼ぶ。断面相乗モーメントは 0 となる

$$I_{x'y'} = \int_A x'y' dA = 0$$

慣性モーメントテンソルは、

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy} (\equiv \tau_{xy})$ を成分とする応力テンソル

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy} (\equiv \gamma_{xy} / 2)$ を成分とするひずみテンソル

と同様の座標変換規則に従うので、

モール円（モールの慣性円）によって計算できる

非対称荷重を受けるはり

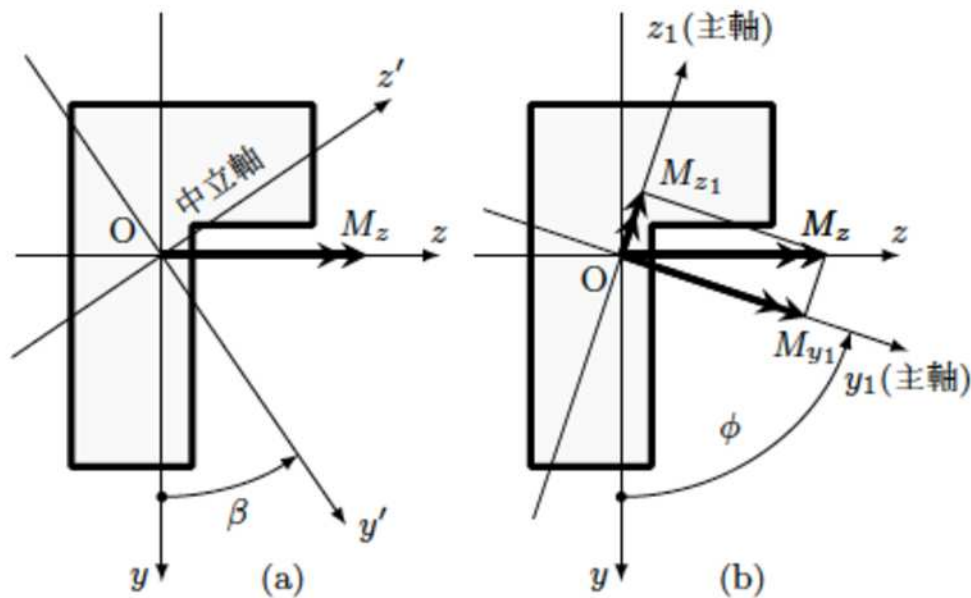


図 5.10 非対称荷重を受けるはり

非対称な断面形状を考える

ベルヌーイ・オイラーの仮説の成立を仮定し、中立軸の位置 (y_c, z_c) 、方向 β 、中立軸の曲率 κ の4つを未知量とする

軸力 N_x が0、モーメント M_y が0、 M_z が与えられた量となる3つの条件から、

$$y_c \cos \beta + z_c \sin \beta = 0$$

(y_c, z_c) を原点に選ぶと、

$$\sigma(y, z) = \frac{M_z(I_y y - I_{yz} z)}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

$$\kappa = -\frac{M_z \sqrt{I_y^2 + I_{yz}^2}}{E(I_y I_z - I_{yz}^2)} \quad \tan \beta = -\frac{I_{yz}}{I_y}$$

非対称荷重を受けるはり

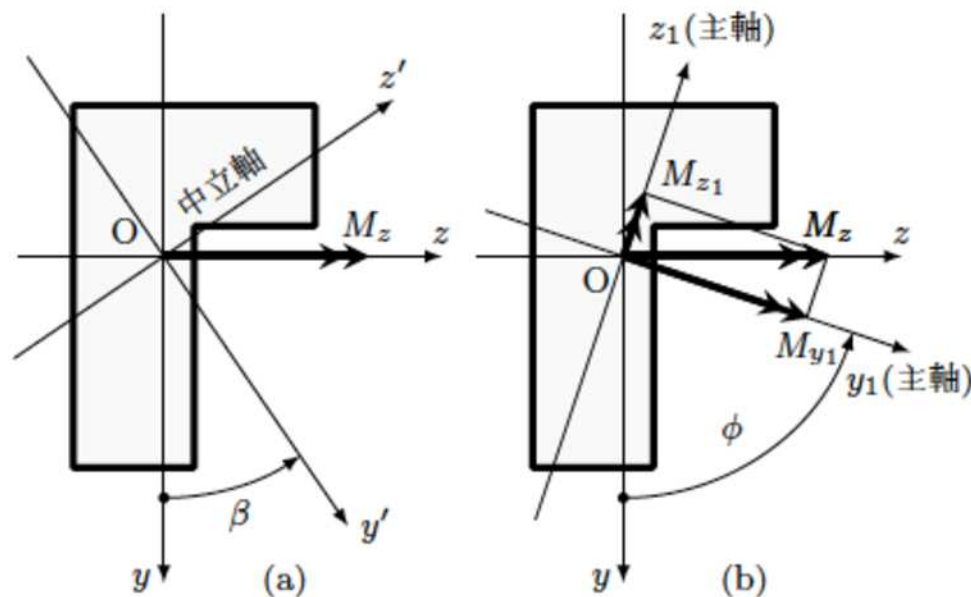


図 5.10 非対称荷重を受けるはり

$$\sigma(y, z) = \frac{M_z(I_y y - I_{yz} z)}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

もしモーメントの作用軸が慣性主軸と一致すれば、慣性相乗モーメントは0なので

$$\sigma(y, z) = \frac{M_z}{I_z} y \quad \kappa_z = -\frac{M_z}{EI_z}$$

慣性主軸 y_1 、 z_1 軸を求めて、

M_z を M_{y1} 、 M_{z1} に分解し以下を得る

$$\sigma(y_1, z_1) = \frac{M_{z1}}{I_{z1}} y_1 + \frac{M_{y1}}{I_{y1}} z_1$$

現在公開可能な情報

ベルヌーイ・オイラーの仮説
(Bernoulli-Euler's hypothesis)

変形前に、はりの軸線に垂直な横断面は、
変形後も平面を保ち、かつ、変形後の軸線に直交する

中立軸

軸力

曲げモーメント

$$\varepsilon = \frac{\eta}{\rho}$$



Daniel Bernoulli
(1700-1782)



Leonhard Euler
(1707-1783)

ベルヌーイとオイラーは、
ともにスイス・バーゼル
大学の出身。1727年から
1733年までロシア・サン
クトペテルブルクで共同
研究、その後も両者は終
生親しく交流を続けた。
(Wikipedia)

初等はり理論の正体みたり

次回

材料力学2024 シーズン 2

第3話 はりのたわみ 前編

2024年6月14日（金）

Coming Soon . . .