

材料力学2024 シーズン2

新々材料力学問題の研究

2024年7月23日（火）

中谷 彰宏

教科書「渋谷陽二，中谷彰宏，材料力学，(2017)，コロナ社」
1, 2, 3, 4, 10, 11章（春学期の授業）を学習し終えて、
5, 6, 7, 8, 9, 12, 13章（夏学期の授業）をこれから学ぶ諸君のために

【問題 1】 次の (1)～(15) の説明それぞれについて、正しいものは○、間違っているものは×と答えなさい。ただし、どちらともいえないと考える場合には△と答えるとともに、その理由を簡潔に述べなさい。

- (1) ベルヌーイ・オイラーの仮説では、変形前にはりの軸線に垂直な横断面を通る直線が、変形後には 0 でない曲率を有する円弧になると仮定する。
- (2) 円断面の軸のねじり問題において、せん断応力は図心で最大となる。
- (3) 正六角形断面の図心断面二次モーメントは座標軸のとり方に依らないが、断面係数は座標軸のとり方に依存する。
- (4) ミオソテス法は、ギリシャの鉄道技師ミオソテスが考案したひずみエネルギーを利用した変形解析の方法である。
- (5) ベッチの相反定理は、線形系に対してのみ成立するマクスウェルの相反定理を非線形系に一般化したものであるといえる。
- (6) コンプリメンタリーひずみエネルギーはひずみエネルギーの $1/2$ 倍である。
- (7) プラントルの薄膜相似法は、薄膜の張力分布とねじり問題のせん断応力分布との間に成り立つ相似則に着目した解析方法である。
- (8) 密巻きコイルばねの変形においては、素線の曲げ変形に比べてねじり変形が支配的である。
- (9) ある断面にはたらく垂直応力を σ 、せん断応力を τ とするとき、 $\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$ は、断面のとり方（断面の法線ベクトル）に依らず一定である。
- (10) 一定の引張軸力 N を受ける一様断面の棒の断面の一部分を切除した（取り除いた）とき、取り除く前に比べて断面の垂直応力の最大値を小さくできる場合がある。
- (11) 一定の曲げモーメント M を受ける一様断面のはりの断面の一部分を切除した（取り除いた）とき、取り除く前に比べて曲げ応力の最大値を小さくできる場合がある。
- (12) はりに作用するせん断力 V によるせん断応力の最大値は、断面が円るとき平均せん断応力 V/A_1 の $4/3$ 倍であり、断面が長方形るとき平均せん断応力 V/A_2 の $3/2$ 倍である。ただし、 A_1 、 A_2 はそれぞれ、円、長方形の断面積である。
- (13) 長柱のオイラー座屈において、両端固定境界条件の場合、奇関数モードが最小の座屈荷重を与える。
- (14) 座屈応力は有効細長比が小さい範囲では降伏応力の影響を強く受ける。
- (15) 重力加速度 g 下で、質量 m の物体をはりに接するまで近づけて静かに手を離れたときに生じる最大たわみは、集中荷重 $P = mg$ を受けるはりの最大たわみに等しい。

【問題 2】 図 1 に示すように、点 A で固定支持された長さ L の片持ちはり AB に、点 B にモーメント M_0 、点 A から距離 a 離れた点 C に集中荷重 P が作用する問題を考える。断面は高さが一定値 h の長方形断面の組み合わせはりとする。以下の問いに答えなさい。

- (1) はりが 2 種類の材料からなる組み合わせはりであるとし、それぞれのヤング率を E_1, E_2 、高さを h_1, h_2 とする。 $h_1 = h_2 = h/2$ のとき、中立軸の位置 y_N を高さ h 、ヤング率の比 $s(\equiv E_1/E_2)$ を用いて表しなさい。
- (2) はりがヤング率が一定値 E の単一の材料からなり（すなわち、 $E_1 = E_2 = E$ であり）、幅 $b(x)$ が位置 x によって変化する場合を考える。断面の縁曲げ応力の絶対値が許容応力 σ_0 と一致するように一様強さのほりを設計し、幅 $b(x)$ を $x, \sigma_0, P, M_0, h, L, a$ で表しなさい。
- (3) 小問 (2) の一様強さのほりについて、点 B のたわみ y_B とたわみ角 θ_B を、それぞれ、 E, σ_0, h, L を用いて表しなさい。

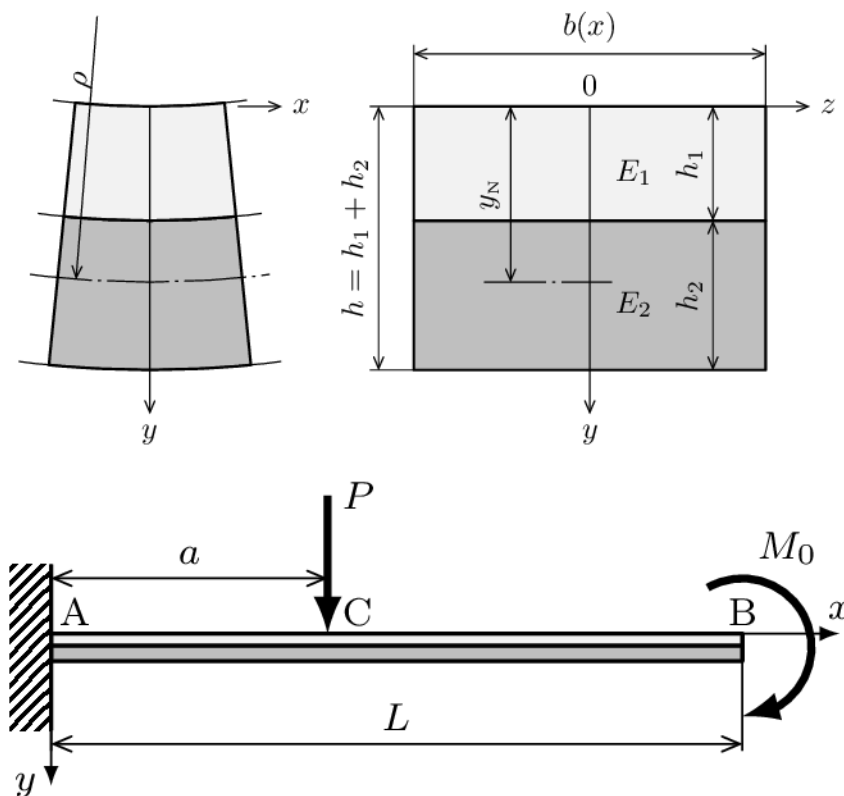


図 1

【問題 3】 図 2 に示すように、点 A, B がそれぞれ移動支持、固定支持された一定の曲げ剛性 EI を有するはり AB を考える。点 C に取り付けられた十分に剛性の大きい部材 CDH の先端点 H に鉛直荷重 P が作用するとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) 点 B の支持モーメント M_B を、 P と L を用いて表しなさい。
- (2) 点 C のたわみ y_C 、および、たわみ角 θ_C を P 、 L 、 EI を用いて表しなさい。
- (3) たわみが最大となる点を点 D とする。点 D の位置 x_D を L を用いて表し、点 D のたわみ y_D を P 、 L 、 EI を用いて表しなさい。ただし点 D は AC 間にあることは、あらかじめわかっているものとして解答してよい。

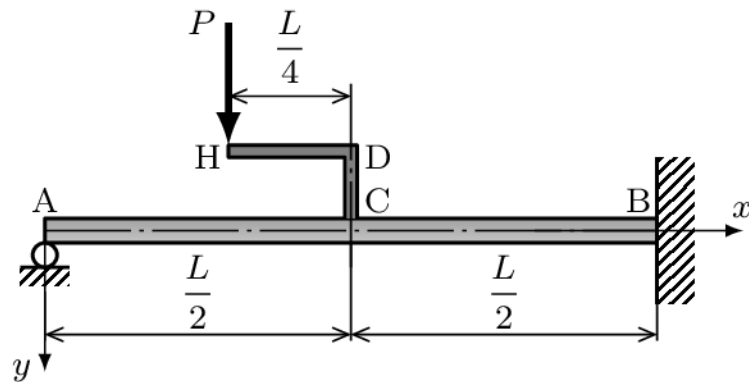


図 2

【問題 4】 図 3 に示すように、L 字形の部材 ABC が水平面に配置され点 A で固定支持されている。断面の寸法は定数 a で規定され、AB 間は直径 a の円形断面、BC 間は一辺 a の正方形断面である。また AB, BC の長さはそれぞれ L , $L/2$ である。BC 間に単位長さあたり q の一様分布荷重が鉛直方向に作用するとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) 最大せん断ひずみエネルギー説（ミーゼスの条件）によって降伏条件が与えられ、降伏応力は σ_y であるとする。安全率を n として設計するとき、寸法 a の最小許容値を、 σ_y , n , q , L を用いて表しなさい。
- (2) 材料のヤング率を E 、ポアソン比を ν とする。点 C のたわみ y_C を q , L , a , E , ν を用いて表しなさい。

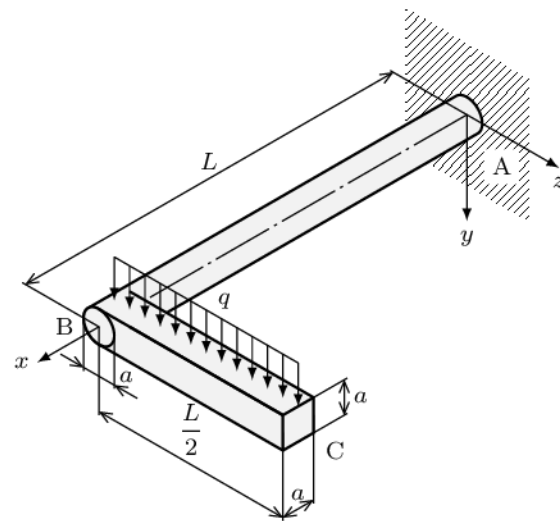


図 3

(2021AN)

【問題 1】 以下の問いに答えなさい。

(1) 次の (a)～(i) にふさわしい数を選択肢 (ア)～(セ) から一つずつ選んで記号で答えなさい。ただし、該当するものが選択肢にないと思われる場合には、代わりに具体的な数値を答えなさい。

- 断面一次モーメントは長さの (a) 乗の次元を持ち、断面二次モーメントは長さの (b) 乗の次元を持つ量である。
- はりに作用するせん断力 V によるせん断応力の最大値は、断面が円るとき平均せん断応力 V/A_1 の (c) 倍であり、断面が長方形るとき平均せん断応力 V/A_2 の (d) 倍である。ただし、 A_1 , A_2 はそれぞれ、円、長方形の断面積である。
- 長柱のオイラーの座屈荷重は、曲げ剛性の (e) 乗に比例し、柱の長さの (f) 乗に反比例する。
- 長さ L の片持ちはりの自由端に集中荷重 P が作用する問題 I と、長さ $2L$ の単純支持はりの中央に集中荷重 $2P$ が作用する問題 II を比較した時、問題 I の荷重作用点のたわみは問題 II のたわみの (g) 倍である。
- 長さ L の片持ちはりの自由端に集中荷重 P が作用する問題 I と、長さ $2L$ の片持ちはりの自由端に集中荷重 P が作用する問題 II を比較した時、問題 I のコンプリメンタリーひずみエネルギーは問題 II のコンプリメンタリーひずみエネルギーの (h) 倍である。
- 一端移動支持、他端回転支持の長さ L の柱の座屈問題 I と、一端自由、他端固定支持の長さ L の柱の座屈問題 II を比較した時、問題 I に対する座屈荷重は、問題 II に対する座屈荷重の (i) 倍である。

(ア) -1 , (イ) 0 , (ウ) $\frac{1}{3}$, (エ) $\frac{1}{2}$, (オ) 1 , (カ) $\frac{3}{2}$, (キ) $\frac{4}{3}$, (ク) 2 , (ケ) 3 , (コ) 4 , (サ) 6 , (シ) 8 , (ス) 9 , (セ) 16

(2) 次の (a)～(f) の説明それぞれについて、正しいものは○、間違っているものは×と答えなさい。ただし、どちらともいえないと考える場合には、その理由を述べなさい。

- (a) 真直はりの曲げ問題において、曲げ応力は中立面で最大となる。
- (b) 円断面の軸のねじり問題において、せん断応力は図心で最大となる。
- (c) 円形断面の断面二次モーメント I は、断面二次極モーメント I_p の 2 倍である。
- (d) せん断力 V によってはりの断面に生じるせん断応力は中立面からの距離に比例して大きくなる。
- (e) 一つの入力によって定常駆動される伝動軸において、1 分間あたりの軸の回転数と伝達される仕事率（動力）が規定されれば、入力点に外力として作用するモーメントは一意に定まる。
- (f) 長柱のオイラーの座屈の臨界座屈荷重 P_{cr} の値は、柱の長さ l と曲げ剛性 EI に依存するが、境界条件に依らない。

【問題 2】 図 1 に示すように、はり AD とはり DB が点 D においてヒンジ（ピン）で接合され、点 A が固定支持、点 C が移動支持で支持されている。点 B に集中荷重 P が作用するとき、以下の問いに答えなさい。ただしはりの断面は幅 b 高さ h の長方形であり、ヤング率は E である。

- (1) この問題は静定か不静定かを答えなさい。さらに以下の問題を解く方針を 140 字以内で簡潔に述べなさい。
- (2) 点 A の反力 R_A と支持モーメント M_A 、点 C の反力 R_C を求め、せん断力図、曲げモーメント図を描きなさい。
- (3) 断面 A および断面 C の最大曲げ応力を求めなさい。

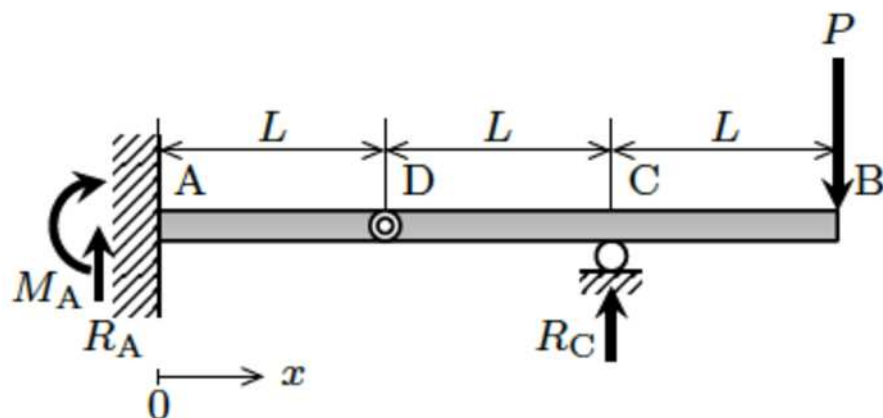


図 1

【問題 3】 図 2 に示すようなはり AB を考える．点 A が固定支持，点 C が移動支持で支持されている．点 B に集中荷重 P が作用するとき，以下の問いに答えなさい．ただし，はりの断面は直径 d の円であり，ヤング率は E である．

- (1) この問題の不静定次数を答えなさい．さらに以下の問題を解く方針を 140 字以内で簡潔に述べなさい．
- (2) 点 A の反力 R_A と支持モーメント M_A ，点 C の反力 R_C を求め，せん断力図，曲げモーメント図を描きなさい．
- (3) 断面 C の最大曲げ応力を求めなさい．
- (4) 点 B のたわみを求めなさい．

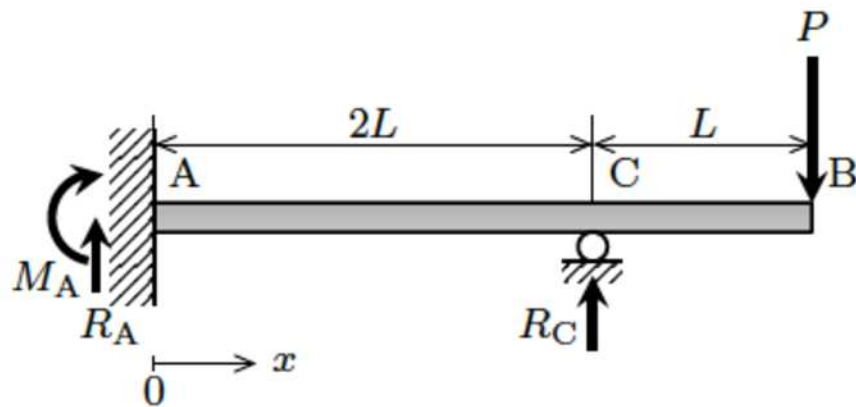
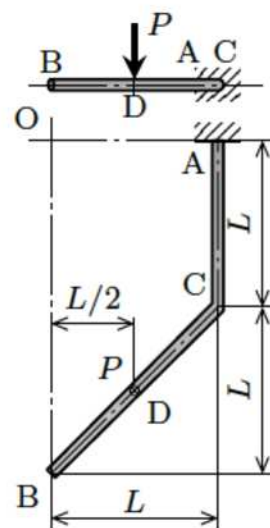


図 2

【問題 4】図 3 に示すように、点 C で同一面内で 45 度折れ曲がった一体構造 ACB が点 A で固定支持されている。AC の長さは L 、CB の長さは $\sqrt{2}L$ であり、ヤング率は E 、横弾性係数は G 、断面は直径 d の円である。CB の中点 D に面 ACB に垂直な荷重 P が作用するとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) 固定支持 A の反力 R_A 、支持モーメント（曲げ） M_A 、支持モーメント（ねじり） T_A を求めなさい。
- (2) 曲げモーメント分布、ねじりモーメント分布を求めなさい。ただし AC 間、CD 間、それぞれについて、座標軸は各自で定義してから解答しなさい。
- (3) 点 A のごく近傍の断面における最大主応力と最大せん断応力を求めなさい。（ヒント：曲げによる垂直応力とねじりによるせん断応力からモールの応力円を用いて評価しなさい。）
- (4) 点 D の変位（荷重 P が作用する方向に平行な成分） u_D を求めなさい。
- (5) 点 B の変位（荷重 P が作用する方向に平行な成分） u_B を求めなさい。



正面図
(横からみたところ)

平面図
(上からみたところ)

図 3

(2018AN)

【問題 1】 以下の問いに答えなさい。

(1) 次の (a)~(f) にふさわしい語または数を選択肢 (ア)~(ス) から一つずつ選んで記号で答えなさい。ただし、該当するものが選択肢にないと思われる場合には、代わりに具体的な語を答えなさい。

- 平面 (yz 面) 上の閉領域 Ω について、 z 軸に平行で Ω の図心を通る軸に関して、断面一次モーメントは (a) となり、断面二次モーメントは (b) となる。
- 断面積 A の断面を有するはりに作用するせん断力 V によるせん断応力の最大値は、円形断面のとき平均せん断応力 V/A の (c) 倍であり、長方形断面のとき (d) 倍である。
- 長柱のオイラーの座屈荷重は、曲げ剛性の (e) 乗に比例し、柱の長さの (f) 乗に反比例する。

(ア) 0, (イ) $\frac{1}{3}$, (ウ) $\frac{1}{2}$, (エ) 1, (オ) $\frac{3}{2}$, (カ) $\frac{4}{3}$, (キ) 2, (ク) 3, (ケ) 4, (コ) 最小, (サ) 最大, (シ) 負, (ス) 無限大

(2) 次の (a)~(h) の説明それぞれについて、正しいものは○、間違っているものは×と答えなさい。ただし、どちらともいえないと考える場合には、その理由を述べなさい。

- (a) はりの中立面の変形後の曲率は曲げモーメントの値に依らず常に 0 である。
- (b) 円形断面の断面二次極モーメント I_p は断面二次モーメント I の 2 倍である。
- (c) ある断面にはたらく垂直応力を σ 、せん断応力を τ とするとき、 $\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$ は、断面のとり方 (断面の法線ベクトル) に依らず一定である。
- (d) 一定の引張軸力 N を受ける棒の断面の一部分を切除した (取り除いた) とき、取り除く前に比べて断面の垂直応力の最大値を小さくできる場合がある。
- (e) 一定の曲げモーメント M を受けるはりの断面の一部分を切除した (取り除いた) とき、取り除く前に比べて曲げ応力の最大値を小さくできる場合がある。
- (f) せん断力 V によってはりの断面に生じるせん断応力は中立面からの距離に比例して大きくなる。
- (g) 一つの入力によって駆動される伝動軸において、1 分間あたりの軸の回転数と伝達される仕事率 (動力) が規定されれば、入力点に外力として作用するモーメントは一意に定まる。
- (h) 長柱のオイラーの座屈の臨界座屈荷重 P_{cr} の値は、長さ l と曲げ剛性 EI に依存するが、境界条件に依らない。

【問題 2】図 1 に示すように，中央点 C がヒンジ（ピン）で接合され，両端 A と F が固定支持されたはり $ABCF$ に，左端から a の点 B に荷重 P が作用するとき，以下の問いに答えなさい．ただしヤング率 E とし，はりは直径 d の円形断面とする．

- (1) 不静定次数を答えなさい．さらに，以下の問題を解く方針を 140 字以内で簡潔に述べなさい．
- (2) 反力 R_A ， M_A ， R_F ， M_F を求め，せん断力図，曲げモーメント図を描きなさい．
- (3) 荷重作用点 B のたわみを求めなさい．
- (4) 点 A および点 F の最大曲げ応力を求めなさい．

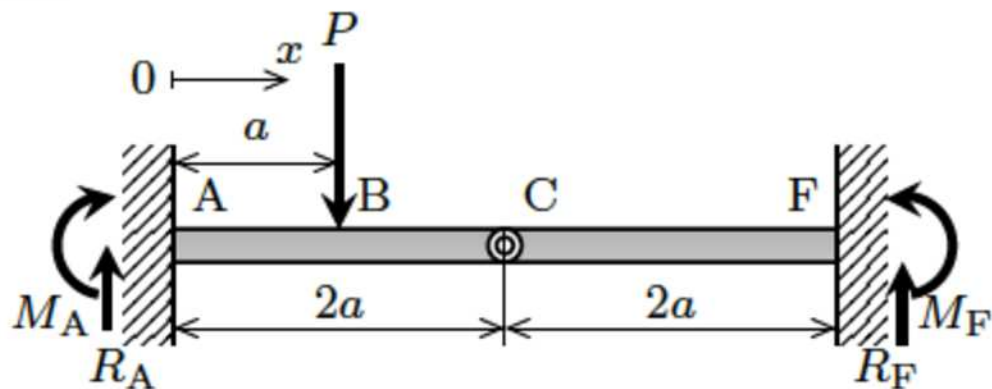


図 1

【問題 3】 図 2 に示すように，AC 間のヤング率 E ，CF 間が剛体（ヤング率が無限大）とみなせるはり ABCDF が，点 A で固定支持され，点 D で移動支持されている．左端から a の点 B に荷重 P が作用するとき，以下の問いに答えなさい．ただし，はりは横幅 b 高さ h の長方形断面とする．

- (1) 不静定次数を答えなさい．さらに，以下の問題を解く方針を 140 字以内で簡潔に述べなさい．
- (2) 反力 R_A ， M_A ， R_D を求め，せん断力図，曲げモーメント図を描きなさい．
- (3) 荷重作用点 B，および自由端 F のたわみを求めなさい．
- (4) 点 A の最大曲げ応力を求めなさい．

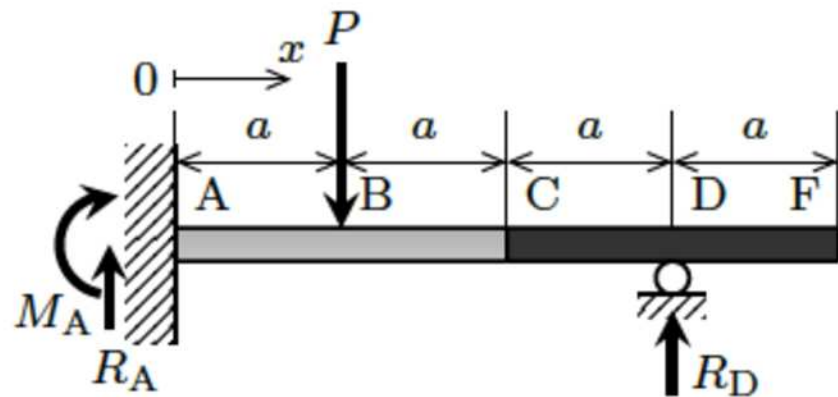


図 2

【問題 4】図 3 は自転車の構造を模式的に示したものである。FGABCD は一体構造であり、点間の寸法は l によって規定される。ペダルに相当する FG 間に一様な分布荷重 q が作用し、点 B の直径 r_B のスプロケット（円板）を介してチェーンに張力 P_B が生じ、動力が伝達される。図の配置で静力学的に釣合っているとき、以下の問いに答えなさい。ただし、支点 C, D は軸線 CD に対して横荷重のみを支える。

- (1) 張力 P_B 、および、点 C, 点 D の反力の水平方向成分 H_C , H_D 、鉛直方向成分 R_C , R_D をそれぞれ求めなさい。
- (2) FG 間, GA 間, AD 間それぞれについて、水平軸に関する曲げモーメントの分布と、鉛直軸に関する曲げモーメントの分布を求めなさい。
- (3) GA 間, AB 間のねじりモーメントを求めなさい。
- (4) FG 間, AD 間は、曲げ剛性 EI 、ねじり剛性 GI_p の円形断面であり、GA 間は剛体（ E と G は無限大）とみなすとき、点 F の鉛直方向変位を求めなさい。ただし点 B の円板の回転角を 0 と考える。

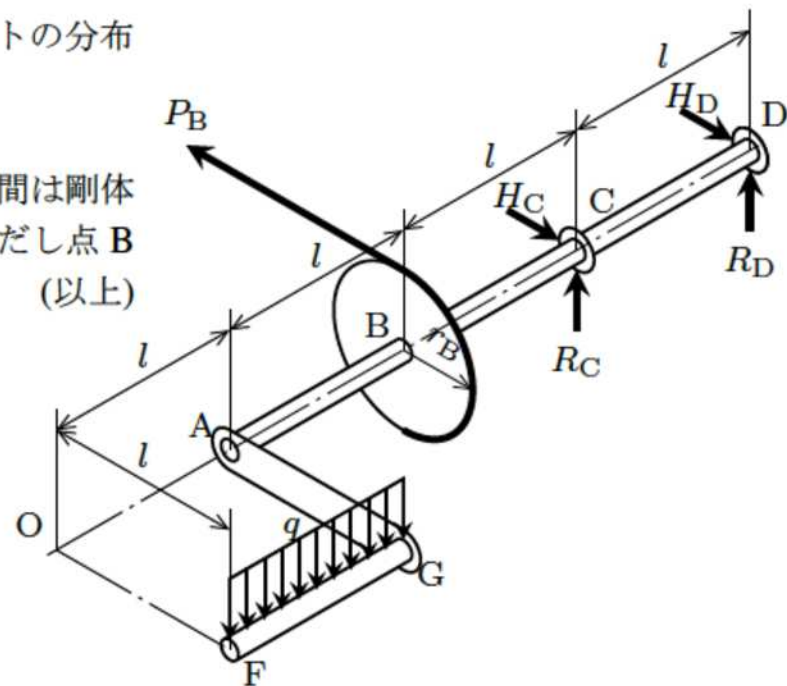


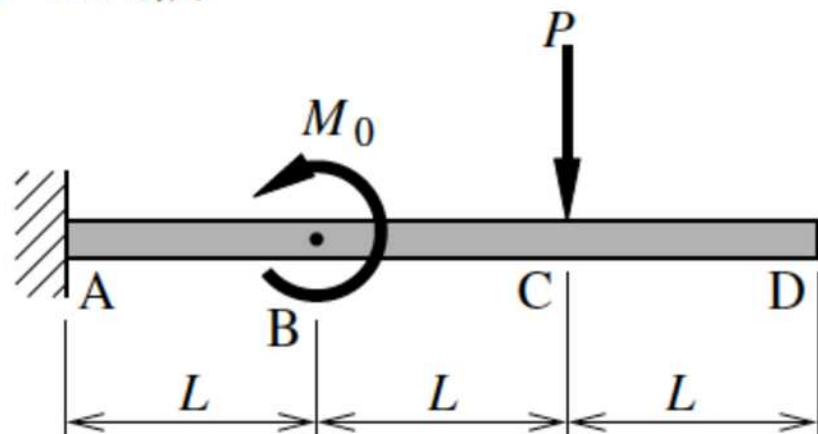
図 3

(2017AN)

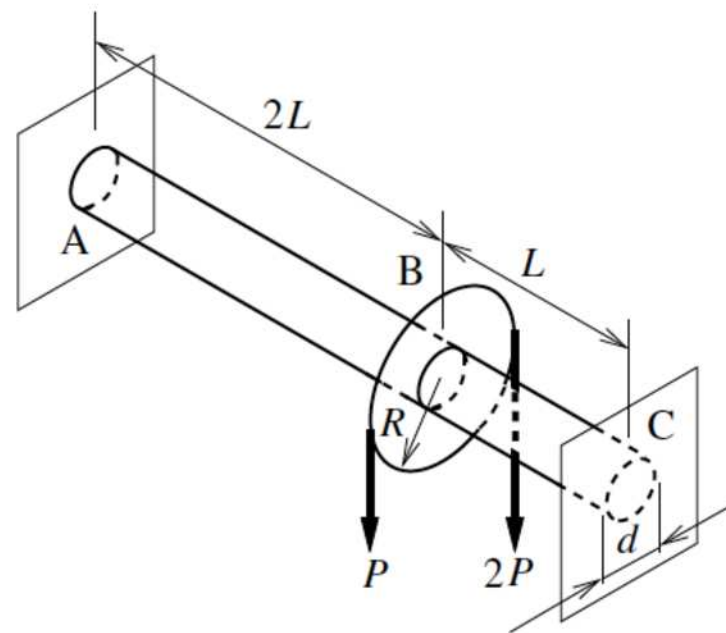
1. 右図に示すように、A 点が固定支持された長さ $3L$ の片持ちはり ABCD を考える。はりの曲げ剛性は一様でその値は EI である。このはりに、A 点から長さ L の距離にある B 点に曲げモーメント M_0 が、長さ $2L$ の距離にある C 点に横荷重 P が作用する。変形は微小であり、自重は無視できるものとし、以下の問いに答えなさい。

(配点 30 点)

- (1) 点 A の支持反力と反モーメントを求め、さらに、せん断力図と曲げモーメント図を描きなさい。
- (2) 点 D のたわみとたわみ角を求めなさい。

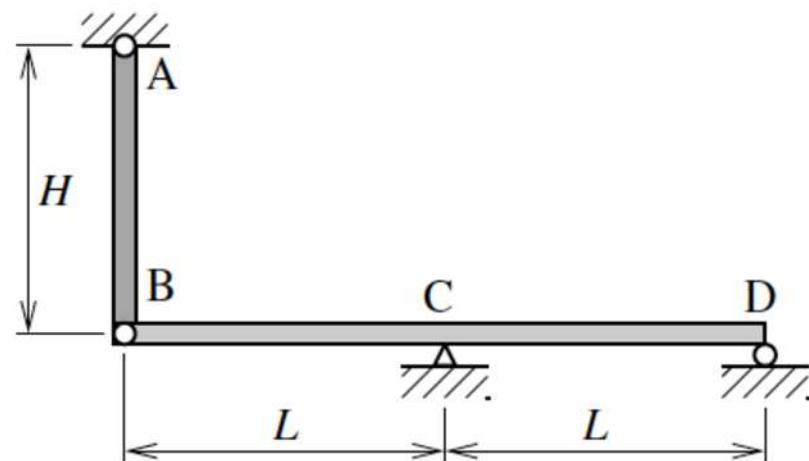


2. 右図に示すように、直径 d の円形断面を有する長さ $3L$ の円柱形部材の A 点と C 点が剛体壁に固定されている。この部材は、ヤング率 E 、横弾性係数 G の均質材料からなる。部材の A 点から距離 $2L$ の位置に半径 R の丈夫なプーリーが取り付けられ、ベルトによって張力 P と $2P$ が作用するとき、以下の問いに答えなさい。ただし変形は微小であり、自重は無視できるものとする。
(配点 40 点)



- (1) 点 B に外力として負荷される静力学的に等価な横荷重、および、静力学的に等価なねじりモーメントを求めなさい。
- (2) 点 A および点 C の反力（鉛直方向の力、曲げモーメント、および、ねじりモーメント）をもとめなさい。
- (3) この材料の降伏応力を σ_0 とし、トレスカの降伏条件（最大せん断応力説）によって降伏するとする。安全率を n とし、部材の直径 d を強度設計するための関係式を導きなさい。

3. 右図に示ように、C 点と D 点で単純支持された曲げ剛性は EI の張り出しはり BCD と、B 点でピン結合された長さ H の柱 AB とが、点 A において剛体天井にピン結合されている。BC の距離および CD の距離はともに L である。柱 AB は、ヤング率 E 、線膨張係数 α の均質な材料からなり、一辺の長さ a の正方形断面を有している。変形は微小であり、自重は無視できるものとし、以下の問いに答えなさい。(配点 30 点)



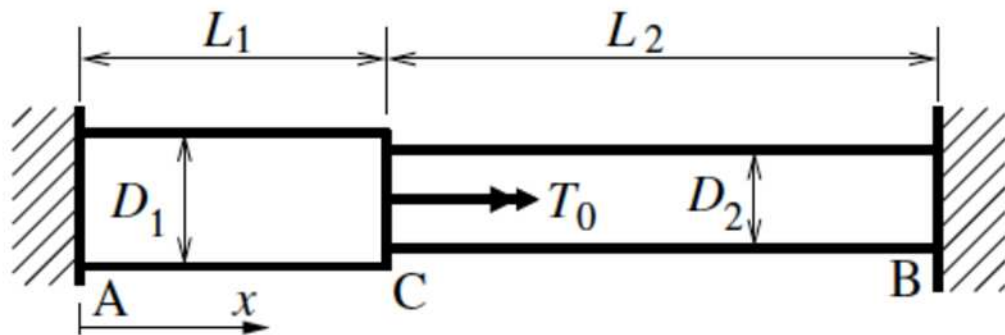
- (1) 温度を ΔT だけわずかに上昇させる。このときまだ座屈は生じないものとして、点 C および点 D の支持反力、柱 AB の伸びを求めなさい。
- (2) さらに温度上昇させると、柱 AB にはたらく軸力 P が増加し、やがて座屈荷重 P_c に達し座屈が生じるとする。柱 AB が座屈するときの温度上昇 $(\Delta T)_c$ を求めなさい。ただし、柱 AB の境界は両端支持条件であると考えることができ、曲げ剛性 EI 、長さ l の両端支持柱の座屈荷重 P_c は、

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

であるという座屈荷重の公式を用いることができるという前提で答えなさい。

3. 図に示すように、両端を固定した段付き丸棒を考える。区間 AC ($0 < x < L_1$) の直径は D_1 、区間 CB ($L_1 < x < L_1 + L_2$) の直径は D_2 であり、ともにせん断弾性係数 G の同一の均質な材料の中実棒からなっている。断面 C にねじりモーメント T_0 が作用するとき、以下の問いに答えなさい。(配点 30 点)

- (1) 固定端 A と B の支持モーメント、ねじりモーメント分布、断面 C のねじれ角を求めなさい。
- (2) $L_2/L_1 = 2$ のとき、区間 AC に生じる最大せん断応力の大きさと区間 CB に生じる最大せん断応力の大きさが等しくなるように、直径比 D_2/D_1 を求めなさい。



【3】 図 3(a) に示すように、直径 $2r$ 、厚さ t の断面形状を有する長さ $3L$ の密閉された薄肉円筒 ($r \gg t$) に、圧縮性気体を充填し内圧を p に変化させる。以下の問いに答えなさい。ただし、部材のヤング率を E 、ポアソン比を ν とする。なお L は r に比べて十分に長く、中央付近での応力状態・ひずみ状態が円筒容器全体の力学変形挙動において支配的であるとみなせるものとする。 (配点 30 点)

- (1) 図 3(b) のように、端部 A, B が自由縁となる条件で、内圧 p を負荷する場合について以下の問いに答えなさい。
 - (i) 円筒の中央付近の軸方向応力と周方向応力を求めなさい。
 - (ii) 円筒の中央付近の軸方向ひずみと周方向ひずみを求めなさい。
- (2) 内圧 $p = 0$ とした後、端部 A と端部 B を剛体壁に固定し、内圧 p を負荷する場合 (図 3(c) に示す条件において $T_1 = 0$ の場合) について以下の問いに答えなさい。
 - (i) 円筒の中央付近の軸方向応力と周方向応力を求めなさい。
 - (ii) 円筒の中央付近の周方向ひずみを求めなさい。
- (3) 図 3(c) に示すように、端部 A と端部 B を剛体壁に固定し、内圧 p の負荷に加えて、A 端から長さ L の位置にねじりモーメント T_1 を負荷するとき、薄肉円筒容器に生じる最大せん断応力の最大値を求めなさい。

