2021.6.15 AN

微小変形の考え方の例題 (高次の微小量を無視するとはどういうことか)

断面積 A，ヤング率 E，線膨張係数 α の棒 AB が，両端 A，B を固定されている。温度が，$\varDelta T$ 上昇したとき，発生する軸力を求めなさい。 (inspired by 欽ドン!良い子悪い子普通の子)

〔よし夫の思考〕

両端 AB の伸びの拘束がないと考えたときの熱ひずみは，$\varepsilon^* = \alpha \varDelta T$ である。一方，一様な軸力 N が作用する棒の応力は $\sigma_{\mathrm{N}} = N/A$ であり，そのときのひずみはフックの法則より $\varepsilon_{\mathrm{N}} = \sigma_{\mathrm{N}}/E$ である。したがって，$\varepsilon_{\mathrm{N}} = N/(EA)$ である。固定されて，形が変わらないから，

$$\varepsilon_{\mathrm{N}} + \varepsilon^* = 0$$

したがって，

$$N = -EA\alpha\varDelta T$$

〔わる夫の思考〕

状況によるが，無視できるほど小さい。でいいんじゃないの。（全然よくない。）

〔ふつ夫の思考〕

まず，問題文では，ヤング率と，線膨張係数のみが定義されているから，おそらく暗黙の了解で等方性が仮定されているのだろう。

まず両端 AB の伸びの固定の拘束を取り除いた状態で温度が，$\varDelta T$ 上昇したときの熱ひずみは，$\varepsilon^* = \alpha\varDelta T$ なので，温度上昇前の長さ l，断面積 A の棒は，熱膨張によって，長さが $l' = l(1+\varepsilon^*) = l(1+\alpha\varDelta T)$，断面積が $A' = A(1+\varepsilon^*)^2 = A(1+\alpha\varDelta T)^2$ になっているはず。

次に，その温度のままで，つまり，長さが $l' = l(1+\alpha\varDelta T)$，断面積が $A' = A(1+\alpha\varDelta T)^2$ の棒を圧縮して，長さを l にもどすためには，ひずみ

$$\varepsilon' = \frac{l-l'}{l'} = -\frac{\alpha\varDelta T}{1+\alpha\varDelta T} < 0$$

に相当するだけ圧縮する必要がある。

熱膨張状態でのヤング率 E が熱膨張前と同じとは書かれていないけれど，温度に依存したヤング率の変化は小さいとして、温度によらずそのまま E を使ってもいいかな。そうすると，ひとまずひずみ ε' に対応する応力 σ' は，

$$\sigma' = E\varepsilon' = \frac{E(l-l')}{l'} = \frac{-E\alpha\varDelta T}{1+\alpha\varDelta T} < 0$$

となるはずだ。

これに断面積 A をかければ軸力 N が求まるはず。だけど熱膨張した状態ですでに断面積は A ではなく膨らんで A' になってる。また問題文ではポアソン比 ν が定義されていないが，熱膨張した状態から圧縮する（ひずみ $\varepsilon'(<0)$ だけ変形させる）のであれば，それにポアソン比をかけた分だけ横方向にひずみが生じるので，さらに断面積は大きくなって，$A'' = A'(1-\nu\varepsilon')^2 = A(1+\alpha\Delta T)^2(1-\nu\varepsilon')^2$ になってるはずだ。

材料力学では変形前後を区別せずに変形前の形を基準にすることが原則であると教わったけど，応力に断面積をかけて軸力に換算するときは，A，A'，A'' のいずれをかけるのか，この場合，どれを基準にするのかがわからないな。とりあえず、三つの考え方で答えておこう。

両端の拘束を取り除いて熱膨張した力を加える前の断面積 A' で計算

$$N = \sigma' A' = -EA\alpha\Delta T(1+\alpha\Delta T)$$

拘束を受けて温度上昇後の最終的な断面積 A'' で計算

$$N = \sigma' A'' = -EA\alpha\Delta T(1+\alpha\Delta T)\left(1+\nu\frac{\alpha\Delta T}{1+\alpha\Delta T}\right)^2$$

温度上昇の前のもともとの断面積 A で計算

$$N = \sigma' A = -EA\alpha\Delta T\frac{1}{1+\alpha\Delta T}$$

〔解説〕

鉄（鋼 SS400）を例に考えると，ヤング率 $E = 206\text{GPa}$，ポアソン比 $\nu = 0.3$，降伏応力 $\sigma_{\text{yield}} = 200\text{MPa}$，線膨張係数 $\alpha = 11.8\times10^{-6}\ \text{K}^{-1}$。もし $\Delta T = 10$ ℃の変化を考えたなら，熱ひずみ $\varepsilon^* = \alpha\Delta T = 1.18\times10^{-4}$ になる。これは，安全率 10 としたときの許容ひずみ（降伏点ひずみの 1/10）1×10^{-4} と同程度のオーダーであり，これ以上の大きさのひずみを考える問題設定は，そもそも強度上の安全性の観点から想定できないから，温度上昇はこの程度だろう。

このとき，

$$1+\alpha\Delta T = 1.00012 \simeq 1$$

$$(1+\alpha\Delta T)\left(1+\nu\frac{\alpha\Delta T}{1+\alpha\Delta T}\right)^2 = 1.00019 \simeq 1$$
左辺の多項式近似は, $1+(1+2\nu)\alpha\Delta T+\cdots$

$$\frac{1}{1+\alpha\Delta T} = 0.999882 \simeq 1$$
左辺の多項式近似は, $1-\alpha\Delta T+\cdots$

とみなすことができる。つまり，$1+\alpha\Delta T$，$1+(1+2\nu)\alpha\Delta T$，$1-\alpha\Delta T$ を 1 とみなしてもよいオーダーの数値である。もし，これを 1 とみなすと，よし夫の答えに一致する。それでこの問題の答えとしては十分らしいことがわかる。

ただし，$\alpha\varDelta T$，あるいはそのひと桁程度の定数倍を 0 とみなしたわけではないことに注意しよう。例えば，この問題に付随する別の問いとして，横断面方向のひずみを求めなさいという問題（そのような出題の場合にはポアソン比が陽に与えられているはず）を考えてみよう。

わる夫は「ほとんど変化しない，変化は無視できる」という答えかもしれないが，それは答えになっていない。ふつ夫は，断面積の変化から，

$$\frac{\sqrt{A''}-\sqrt{A}}{\sqrt{A}} = (1+\alpha\varDelta T)(1-\nu\varepsilon') - 1 = 1.534\times 10^{-4}$$
$$\text{多項式近似は}, (1+\nu)\alpha\varDelta T + \cdots$$

という考え方で答えを導くかもしれない。よし夫は，拘束がないとしたときの等方的な熱ひずみ ε^* と軸方向の熱ひずみの拘束により発生する軸力による軸方向の変形 $\varepsilon_{\mathrm{N}} = -\varepsilon^*$ のポアソン比相当分が横方向のひずみ $-\nu\varepsilon_{\mathrm{N}} = \nu\varepsilon^*$ を与えるとして，両者の和として，

$$\varepsilon^* - \nu\varepsilon_{\mathrm{N}} = (1+\nu)\alpha\varDelta T = 1.534\times 10^{-4}$$

と答えそうである。よし夫の答えは，ふつ夫の答えの多項式近似の第一項に相当し，この両者は妥当な桁の範囲で数値的に一致し，どうやら正解と考えてよさそうである。

材料力学の微小変形理論の近似としてはよし夫の答えで十分である。しかも線形化によって，重ね合わせの原理等が成立することがこの理論のアドバンテージでもある。一方，有限変形理論では，むしろ，ふつ夫のように終始疑問を投げかけながら考察を丁寧に行う必要がでてくる。