

2018 年 6 月 26 日 (火)  
2018 年 7 月 4 日 (水) 改訂

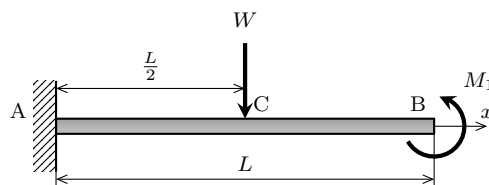
連載には程遠いたまにしかない講座「かけがえのない材料力学」  
材力演習 8 の補足<sup>\*1</sup>

大阪大学大学院工学研究科  
中 谷 彰 宏<sup>\*2</sup>

## 課題 [1]

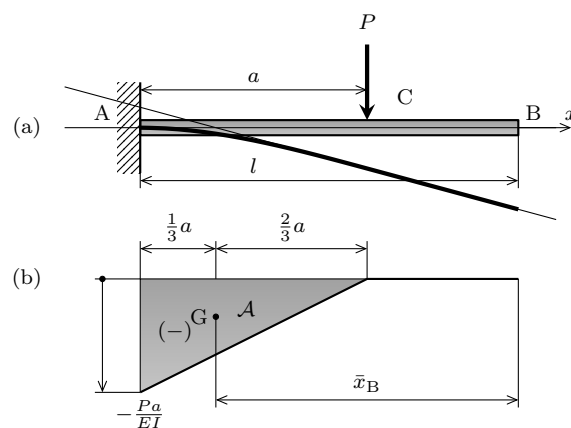
### 図 (a) の問題

長さ  $L$  の片持ちはり AB に、固定端 A から  $L/2$  だけ離れた点 C に集中力  $W$  が横荷重として作用し、点 B にモーメント  $M$  が作用しているとき、反力  $R_A$ ,  $M_A$  を求めなさい。さらに点 B のたわみを求めなさい。



### 問題 (i) : 横荷重のみが作用すると考えた問題

まず、長さ  $l$  の片持ちはり AB に、固定端 A から  $a$  だけ離れた点 C に集中力  $P$  が横荷重として作用しているとき、点 B のたわみを求める。力の釣合い、モーメントの釣合いを考えると同時に、せん断力図 (SFD)、曲げモーメント図 (BMD) を描く、反力  $R_A$ ,  $M_A$  も同時に求める。教科書 [1] p.111 の例題 6.2 を参照のこと。



<sup>\*1</sup> Copyright ©2017-2018 Akihiro Nakatani, Microdynamics Laboratory, Osaka University

<sup>\*2</sup> Email:nakatani@ams.eng.osaka-u.ac.jp

以下,  $P = W$ ,  $l = L$ ,  $a = L/2$  の場合について具体的に考える. 反力は,

$$R_A = W, \quad M_A = -\frac{WL}{2}.$$

■解 1: モーメント面積法  $M/EI$  線図 (この場合  $EI$  は一定なので BMD と相似) を描いて AB 間にモーメント面積法を適用する.

$M/EI$  線図の面積  $\mathcal{A}$  と, 点 B から図心までの距離  $\bar{x}_B$  は,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot \left( -\frac{WL}{2EI} \right) = -\frac{WL^2}{8EI}, \quad \bar{x}_B = \frac{2}{3} \cdot \frac{L}{2} + \frac{L}{2} = \frac{5L}{6}.$$

モーメント面積法により, たわみ曲線上の点 A の接線と点 B の接線のなす角と, 点 B の接線たわみ (点 A の接線からみた相対位置) は,

$$\theta_{BA} = \mathcal{A} = -\frac{WL^2}{8EI}, \quad t_{BA} = \bar{x}_B \mathcal{A} = \frac{5L}{6} \cdot \left( -\frac{WL^2}{8EI} \right) = -\frac{5WL^3}{48EI}.$$

したがって, 点 B のたわみ角\*3とたわみ\*4

$$\theta_B = -\theta_{BA} = \frac{WL^2}{8EI}, \quad y_B = -t_{BA} = \frac{5WL^3}{48EI}.$$

■解 2: 特異関数を用いる方法

$$V(x) = W - W \cdot H \left( x - \frac{L}{2} \right)$$

$$M(x) = -\frac{WL}{2} + Wx - W \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle$$

たわみの方程式は

$$EIy'' = \frac{WL}{2} - Wx + W \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle$$

$$EIy' = \frac{WL}{2}x - \frac{W}{2}x^2 + \frac{W}{2} \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^2$$

$$EIy = \frac{WL}{4}x^2 - \frac{W}{6}x^3 + \frac{W}{6} \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^3.$$

ここで, 積分定数は  $x = 0$  で  $y'(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$  より 0.

点 B ( $x = L$ ) のたわみ角とたわみは,

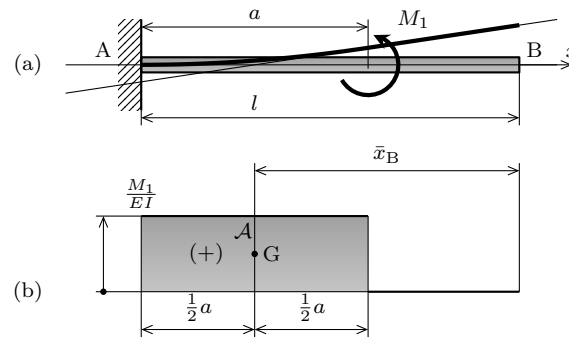
$$\theta_B = y'_B = y'(L) = \frac{WL^2}{8EI}, \quad y_B = y(L) = \frac{5WL^3}{48EI}.$$

\*3 左に点 A と右に点 B がある区間にモーメント面積法を適用するとき,  $\theta_{BA} = \mathcal{A}$  は, 点 A の接線を左回りに  $\theta_{BA}$  だけ回転させると点 B の接線に一致する. 今, 点 A のたわみ角は 0 (接線は水平) であり, そもそも点 B のたわみ角は水平線を右回りに  $\theta_B$  回転させて測った角度のことなので,  $\theta_B = -\theta_{BA}$  である.

\*4 左に点 A と右に点 B がある区間にモーメント面積法を適用するとき,  $t_{BA} = \bar{x}_B \mathcal{A}$  は, 点 A の接線を基準にして点 B の位置 (点 A の接線を基準とした点 B の接線たわみ) であり, 図を描いた時に点 A の接線の上 (下) を  $y$  軸の正 (負) の方向としたときの点 B があるときを正としている. 今, 点 A のたわみは 0 で, たわみ角は 0 (接線は水平) であり, そもそも点 B のたわみ  $y_B$  は, 原点を通る水平線を基準に下方を  $y$  軸の正の方向を正にしているので,  $y_B = -t_{BA}$  である.

## 問題 (ii) : モーメントのみが作用すると考えた問題

まず、長さ  $l$  の片持ちはり AB に、固定端 A から  $a$  だけ離れた点 C にモーメント  $M_1$  が作用しているとき、点 B のたわみを求める。力の釣合い、モーメントの釣合いを考えると同時に、せん断力図 (SFD)、曲げモーメント図 (BMD) を描く、反力  $R_A$ ,  $M_A$  も同時に求める。



以下、 $l = L$ ,  $a = L$  の場合について具体的に考える。反力は、

$$R_A = 0, \quad M_A = M.$$

■解 1 : モーメント面積法  $M/EI$  線図 (この場合  $EI$  は一定なので BMD と相似) を描いて AB 間にモーメント面積法を適用する。

$M/EI$  線図の面積  $\mathcal{A}$  と、点 B から図心までの距離  $\bar{x}_B$  は、

$$\mathcal{A} = \frac{M}{EI} \cdot L = \frac{ML}{EI}, \quad \bar{x}_B = \frac{L}{2}.$$

モーメント面積法により、たわみ曲線上の点 A の接線と点 B の接線のなす角と、点 B の接線たわみ (点 A の接線からみた相対位置) は、

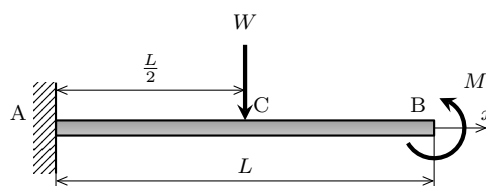
$$\theta_{BA} = \mathcal{A} = \frac{ML}{EI}, \quad t_{BA} = \bar{x}_B \mathcal{A} = \frac{L}{2} \cdot \frac{ML}{EI} = \frac{ML^2}{2EI}.$$

したがって、点 B のたわみ角とたわみは、

$$\theta_B = -\theta_{BA} = -\frac{ML}{EI}, \quad y_B = -t_{BA} = -\frac{ML^2}{2EI}.$$

## 問題 (i) と問題 (ii) の重ね合わせ

図に示す問題。



重ね合わせの原理より, (i) と (ii) の解を重ね合わせると,

$$R_A = R_A^{(i)} + R_A^{(ii)} = W, \quad M_A = M_A^{(i)} + M_A^{(ii)} = -\frac{WL}{2} + M.$$

であり, 点 B のたわみ角とたわみは, それぞれ,

$$\theta_B = \theta_B^{(i)} + \theta_B^{(ii)} = \frac{L}{EI} \left( \frac{WL}{8} - M \right), \quad y_B = y_B^{(i)} + y_B^{(ii)} = \frac{L^2}{EI} \left( \frac{5WL}{48} - \frac{M}{2} \right).$$

## 図 (b) の問題

力の釣合い, モーメントの釣合いを考えると同時に, 反力を求め, せん断力図 (SFD), 曲げモーメント図 (BMD) を描く (図は省略).

反力は,

$$R_A = \frac{w_0 L}{2}, \quad M_A = -\frac{w_0 L^2}{3}.$$

### 解 1: たわみの基礎式からの直接積分

分布荷重は  $q(x) = \frac{w_0 x}{L}$ . たわみの基礎式とその積分は

$$\begin{aligned} EI \frac{d^4 y}{dx^4} &= \frac{w_0 x}{L} \\ EI \frac{d^3 y}{dx^3} &= \frac{w_0 x^2}{2L} + C_1 \\ EI y'' &= \frac{w_0 x^3}{6L} + C_1 x + C_2 \\ EI y' &= \frac{w_0 x^4}{24L} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3 \\ EI y &= \frac{w_0 x^5}{120L} + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4. \end{aligned}$$

点 A ( $x = 0$ ) で, たわみ角とたわみが 0 なので,  $y'(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$ , すなわち,

$$C_3 = 0, \quad C_4 = 0.$$

点 B ( $x = L$ ) で, せん断力と曲げモーメントが 0 なので,  $\frac{dy^3}{dx^3}(L) = 0$ ,  $y''(L) = 0$ , すなわち,

$$\frac{w_0 L}{2} + C_1 = 0, \quad \frac{w_0 L^2}{6} + C_1 L + C_2 = 0 \quad \text{よって,} \quad C_1 = -\frac{w_0 L}{2}, \quad C_2 = \frac{w_0 L^2}{3}.$$

したがって,

$$y' = \frac{w_0 L^3}{EI} \left( \frac{1}{24} \frac{x^4}{L^4} - \frac{1}{4} \frac{x^2}{L^2} + \frac{1}{3} \frac{x}{L} \right), \quad y = \frac{w_0 L^4}{EI} \left( \frac{1}{120} \frac{x^5}{L^5} - \frac{1}{12} \frac{x^3}{L^3} + \frac{1}{6} \frac{x^2}{L^2} \right)$$

点 B ( $x = L$ ) での, たわみ角とたわみは,

$$\theta_B = y'(L) = \frac{w_0 L^3}{8EI}, \quad y_B = y(L) = \frac{11w_0 L^4}{120EI}.$$

## 解 2 : たわみの方程式からの直接積分

せん断力分布  $V(x)$ , 曲げモーメント分布  $M(x)$  は,

$$V(x) = -\frac{w_0}{2L}x^2 + \frac{w_0L}{2}, \quad M(x) = -\frac{w_0}{6L}x^3 + \frac{w_0L}{2}x - \frac{w_0L^2}{3}.$$

たわみの方程式とその積分は,

$$\begin{aligned} EIy'' &= \frac{w_0}{6L}x^3 - \frac{w_0L}{2}x + \frac{w_0L^2}{3} \\ EIy' &= \frac{w_0}{24L}x^4 - \frac{w_0L}{4}x^2 + \frac{w_0L^2}{3}x + C_1 \\ EIy &= \frac{w_0}{120L}x^5 - \frac{w_0L}{12}x^3 + \frac{w_0L^2}{6}x^2 + C_1x + C_2. \end{aligned}$$

点 A ( $x = 0$ ) で, たわみ角とたわみが 0 なので,  $y'(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$ , すなわち,

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0.$$

したがって,

$$y' = \frac{w_0L^3}{EI} \left( \frac{1}{24} \frac{x^4}{L^4} - \frac{1}{4} \frac{x^2}{L^2} + \frac{1}{3} \frac{x}{L} \right), \quad y = \frac{w_0L^4}{EI} \left( \frac{1}{120} \frac{x^5}{L^5} - \frac{1}{12} \frac{x^3}{L^3} + \frac{1}{6} \frac{x^2}{L^2} \right).$$

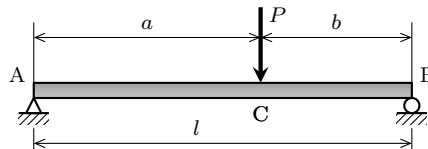
点 B ( $x = L$ ) での, たわみ角とたわみは,

$$\theta_B = y'(L) = \frac{w_0L^3}{8EI}, \quad y_B = y(L) = \frac{11w_0L^4}{120EI}.$$

## 課題 [2]

## 図 (c) の問題

力の釣合い, モーメントの釣合いを考えると同時に, せん断力図 (SFD), 曲げモーメント図 (BMD) を描く (図は省略). 教科書 p.113 の例題 6.4 を参照のこと.



以下,  $l = L$ ,  $a = L/4$ ,  $b = 3L/4$  について具体的に考える. 反力は,

$$R_A = \frac{3W}{4}, \quad R_B = \frac{W}{4}.$$

## 解 1: 特異関数を用いる方法

$$V(x) = \frac{3}{4}W - W \cdot H\left(x - \frac{L}{4}\right)$$

$$M(x) = \frac{3}{4}Wx - W\left\langle x - \frac{L}{4} \right\rangle$$

たわみの方程式とその積分は,

$$EIy'' = -\frac{3}{4}Wx + W\left\langle x - \frac{L}{4} \right\rangle$$

$$EIy' = -\frac{3}{8}Wx^2 + \frac{W}{2}\left\langle x - \frac{L}{4} \right\rangle^2 + C_1$$

$$EIy = -\frac{1}{8}Wx^3 + \frac{W}{6}\left\langle x - \frac{L}{4} \right\rangle^3 + C_1x + C_2$$

ここで,  $x = 0$  で  $y(0) = 0$  より  $C_2 = 0$ . また,  $x = L$  で  $y(L) = 0$  より,

$$-\frac{1}{8}WL^2 + \frac{1}{6}W\left(L - \frac{L}{4}\right)^3 + C_1L = 0, \quad C_1 = \frac{7}{128}WL^2.$$

点  $C(x = L/4)$  のたわみ角とたわみは,

$$\theta_C = y'_C = y'(L/4) = \frac{WL^2}{32EI}, \quad y_C = y(L/4) = \frac{3WL^3}{256EI}.$$

この例のように, 特異関数の表現は, 表記を単純にするだけでなく, 決定すべき積分定数の個数を減らすことができる利点があることに気づくだろう.

解 2: カスチリアーノの定理を用いる方法<sup>\*5</sup>

前掲のモーメント分布

$$M(x) = \frac{3}{4}Wx - W\left\langle x - \frac{L}{4} \right\rangle$$

を, AC 間 (A を原点にして右向きに  $x$ ,  $0 < x < \frac{L}{4}$ ), BC 間 (B を原点にして左向きに  $x_2$ ,  $0 < x_2 < \frac{3L}{4}$ ) を考える.<sup>\*6</sup>

$$M(x) = \frac{3}{4}Wx \quad (\text{AC 間}), \quad M(x_2) = \frac{1}{4}Wx_2 \quad (\text{BC 間})$$

$W$  による偏微分は,

$$\frac{\partial M}{\partial W} = \frac{3}{4}x \quad (\text{AC 間}), \quad \frac{\partial M}{\partial W} = \frac{1}{4}x_2 \quad (\text{BC 間}).$$

<sup>\*5</sup> 授業ではもうすぐ (12 章で) 講義します.

<sup>\*6</sup> 座標のとりかたを変える必要は必ずしもないが, この方が計算が楽

荷重  $W$  の作用点 C のたわみは、カスチリャーノの定理により、

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{\partial U_c}{\partial W} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial W} dx = \int_0^{L/4} \frac{1}{EI} \cdot \frac{3}{4} Wx \cdot \frac{3}{4} x dx + \int_0^{3L/4} \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{4} Wx_2 \cdot \frac{1}{4} x_2 dx_2 \\ &= \frac{W}{EI} \frac{9}{16} \frac{1}{3} \left(\frac{L}{4}\right)^3 + \frac{W}{EI} \frac{1}{16} \frac{1}{3} \left(\frac{3L}{4}\right)^3 = \frac{3WL^3}{256EI}. \end{aligned}$$

点 C に仮想的に加えた時計回りのモーメント  $M_1$  による曲げモーメント分布  $M^*$  は、

$$M^*(x) = -\frac{M_1}{L}x \quad (\text{AC 間}), \quad M^*(x_2) = \frac{M_1}{L}x_2 \quad (\text{BC 間}).$$

$M_1$  により偏微分し、 $M_1 = 0$  とおくと\*7、

$$\left. \frac{\partial M^*}{\partial M_1} \right|_{M_1=0} = -\frac{1}{L}x \quad (\text{AC 間}), \quad \left. \frac{\partial M^*}{\partial M_1} \right|_{M_1=0} = \frac{1}{L}x_2 \quad (\text{BC 間}).$$

モーメント  $M_1$  の作用点 C のたわみ角は、カスチリャーノの定理により、

$$\begin{aligned} \theta_C &= \left. \frac{\partial U_c}{\partial M_1} \right|_{M_1=0} = \int_0^L \frac{M}{EI} \left. \frac{\partial M^*}{\partial M_1} \right|_{M_1=0} dx \\ &= \int_0^{L/4} \frac{1}{EI} \cdot \frac{3}{4} Wx \cdot \left(-\frac{1}{L}x\right) dx + \int_0^{3L/4} \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{4} Wx_2 \cdot \frac{1}{L}x_2 dx_2 \\ &= -\frac{W}{EIL} \frac{3}{4} \frac{1}{3} \left(\frac{L}{4}\right)^3 + \frac{W}{EIL} \frac{1}{4} \frac{1}{3} \left(\frac{3L}{4}\right)^3 = \frac{WL^2}{32EI}. \end{aligned}$$

### 解 3：むりやりモーメント面積法を用いる方法 (2017/6/27 追記)

たわみ曲線やたわみ角分布は、本質的にたわみ方程式の解、つまり積分であり、任意点の値は、定積分に対応するので、原理的には、モーメント面積法を適用することができる。そして、適用区間を変えた 2 パターンについてモーメント面積法を使えば、たいていの問題の解を得ることができる\*8

以下、 $l = L$ ,  $a = L/4$ ,  $b = 3L/4$  について具体的に考える (図を参照)。

$M/EI$  図を、AC 間、CB 間の 2 領域に分けて考える。それぞれに 1, 2 の添字をつけて表記する。

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{3PL}{16EI} \right) \frac{L}{4} = \frac{3}{128} \frac{PL^2}{EI}, \quad \mathcal{A}_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{3PL}{16EI} \right) \frac{3L}{4} = \frac{9}{128} \frac{PL^2}{EI}.$$

まず、AB 間にモーメント面積法を適用すると、

$$\bar{x}_{A1} = \frac{1}{6}L, \quad \bar{x}_{A2} = \frac{1}{2}L, \quad \bar{x}_{B1} = \frac{5}{6}L, \quad \bar{x}_{B2} = \frac{1}{2}L.$$

$t_{BA}$  (点 A の接線を基準とした点 B の接線たわみ) は、

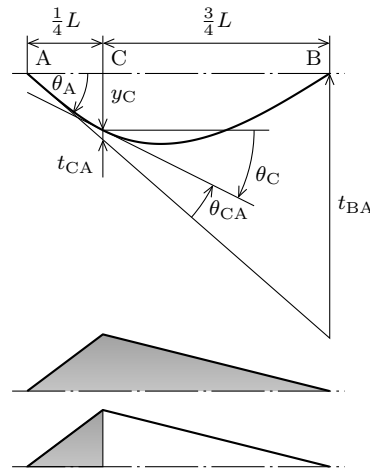
$$t_{BA} = \mathcal{A}_1 \bar{x}_{B1} + \mathcal{A}_2 \bar{x}_{B2} = \frac{PL^3}{EI} \left( \frac{3}{128} \cdot \frac{5}{6} + \frac{9}{128} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{7PL^3}{128EI}$$

点 A, 点 B のたわみは 0 なので、点 A のたわみ角  $\theta_A$  は、

$$\theta_A = \frac{t_{BA}}{L} = \frac{7PL^2}{128EI}.$$

\*7 ここでは、偏微分した段階で定数なのでそのままでも同じ。

\*8 他の解法に比べて有利かどうか、一般的かどうかは人に依るレベルの煩雑さですので、中谷的にはイチオシではない。むりやり感満載だが、やってみよう。



次に、AC 間にモーメント面積法を適用すると、

$$\bar{x}_{A1} = \frac{1}{6}L, \quad \bar{x}_{C1} = \frac{1}{12}L.$$

$t_{CA}$  (点 A の接線を基準とした点 C の接線たわみ) は、

$$t_{CA} = \bar{x}_{C1} \mathcal{A}_1 = \frac{1}{12}L \cdot \frac{3}{128} \frac{PL^2}{EI} = \frac{1}{512} \frac{PL^3}{EI}.$$

点 C のたわみ  $y_C$  は、 $(AC)/(AB) = 1/4$  あるいは、 $(AC) = L/4$  であることを利用して、

$$y_C = t_{BA} \cdot \frac{1}{4} - t_{CA} = \theta_A \cdot \frac{L}{4} - t_{CA} = \frac{PL^3}{EI} \left( \frac{7}{128} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{512} \right) = \frac{3}{256} \frac{PL^3}{EI}.$$

点 C のたわみ角  $\theta_C$  は、 $\theta_{CA} = \mathcal{A}_1$  を利用して、

$$\theta_C = \theta_A - \theta_{CA} = \frac{PL^2}{EI} \left( \frac{7}{128} - \frac{3}{128} \right) = \frac{PL^2}{32EI}.$$

このような問題では、モーメント面積法が“効率的”かどうかは意見がわかれると思う。ただし、教科書 p.127 例題 6.9 に示すように、最大たわみの発生位置とそのたわみの値を求める場合などには、有効であることは誰しもが思うのではないだろうか。

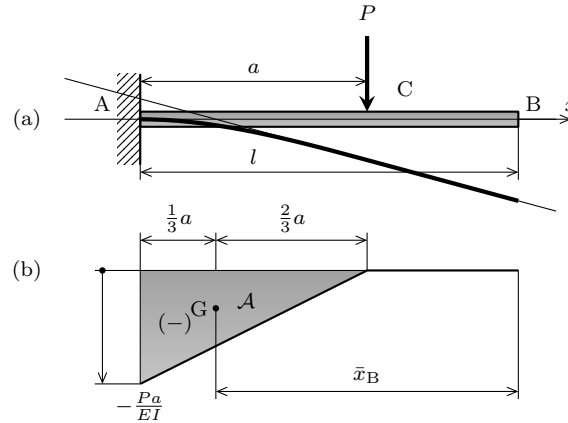
## 課題 [3]

### 図 (d) の問題

この問題は、[1]「図 (a) の問題」で考えた「問題 (i)：横荷重のみが作用すると考えた問題」である。つまり、まず、長さ  $l$  の片持ちはり AB に、固定端 A から  $a$  だけ離れた点 C に集中力  $P$  が横荷重として作用しているとき、点 B のたわみを求める問題をまず考える。力の釣合い、モーメントの釣合いを考えると同時に、せん断力図 (SFD)、曲げモーメント図 (BMD) を描く、反力  $R_A$ 、 $M_A$  も同時に求める。教科書 [1] p.111 の例題 6.2 を参照のこと。

ここでは、 $P = W$ 、 $l = L$  の場合について具体的に考えると、反力は、

$$R_A = W, \quad M_A = -Wa.$$



である．点 B のたわみ角とたわみは， $M/EI$  線図（この場合  $EI$  は一定なので BMD と相似）を描いて AB 間にモーメント面積法を適用する．

$M/EI$  線図の面積  $\mathcal{A}$  と，点 B から図心までの距離  $\bar{x}_B$  は，

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left( -\frac{Pa}{EI} \right) = -\frac{Pa^2}{2EI}, \quad \bar{x}_B = l - \frac{1}{3}a.$$

モーメント面積法により，たわみ曲線上の点 A の接線と点 B の接線のなす角と，点 B の接線たわみ（点 A の接線からみた相対位置）は，

$$\theta_{BA} = \mathcal{A} = -\frac{Pa^2}{2EI}, \quad t_{BA} = \bar{x}_B \mathcal{A} = \frac{1}{3}(3l - a) \cdot \left( -\frac{Pa^2}{2EI} \right) = -\frac{Pa^2}{6EI}(3l - a).$$

したがって，点 B のたわみ角とたわみは，荷重の位置  $a$  の関数として，

$$\theta_B(a) = -\theta_{BA} = \frac{Pa^2}{2EI}, \quad y_B(a) = -t_{BA} = \frac{Pa^2}{6EI}(3l - a).$$

である．

### 題意に基づいた重ね合わせ

はり  $0 \leq x \leq l$  を区間  $1, 2, \dots, n$  に等分すると，区間  $i$  は， $(i-1)\Delta a < x < i\Delta a$  で表される．ここで， $\Delta a = l/n$  である．区間  $i$  のみに大きさが  $q_i$  の等分布荷重が作用していて，その他の区間では分布荷重が 0 である問題を考える．荷重の作用点から十分に離れた点に対して， $W = q_i \Delta a$  の集中力とこの分布荷重による影響は等しい（サン・ブナンの原理）．このときの点 B のたわみ角，たわみをそれぞれ  $\theta_i$ ， $y_i$  とすると，

$$\theta_i = \frac{q_i \Delta a}{2EI} a_i^2, \quad y_i = \frac{q_i \Delta a}{6EI} a_i^2 (3l - a_i).$$

ここで，おおよその近似値を得るために， $a_i = (i-1/2)\Delta a$  と区間の中央とし， $q_i = q(a_i)$  で等分布荷重の値を決めてもよい．このとき，重ね合わせの原理により，

$$\theta_B = \sum_{i=1}^n \theta_i = \sum_{i=1}^n \frac{q_i \Delta a}{2EI} a_i^2, \quad y_B = \sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n \frac{q_i \Delta a}{6EI} a_i^2 (3l - a_i).$$

と表すことができる。この表式は、 $\Delta a$  を区分とする区分求積法になっており、極限  $n \rightarrow \infty$  をとると、次の積分表現を得る。

$$\theta_B = \int_0^L \frac{q(a)}{2EI} a^2 da, \quad y_B = \int_0^L \frac{q(a)}{6EI} a^2 (3L - a) da.$$

となる。いまの問題では、 $q(a) = w_0 a/L$  なので、これを用いると、

$$\theta_B = \int_0^L \frac{w_0}{2EIL} a^3 da = \frac{w_0 L^3}{8EI},$$

$$y_B = \int_0^L \frac{w_0}{6EIL} a^3 (3L - a) da = \frac{w_0 L^4}{8EI} - \frac{w_0 L^4}{30EI} = \frac{11}{120} \frac{w_0 L^4}{EI}.$$

を得る。

なお、集中力  $W$  が  $x = a$  に作用する問題では、

$$V(x) = W - W \cdot H(x - a)$$

$$M(x) = -\frac{WL}{2} + Wx - W(x - a)$$

となるが、このことから、

$$q(x) = W \cdot \delta(x - a)$$

と書くことができる。

## 参考文献

- [1] 渋谷陽二・中谷彰宏, 材料力学, (2017), コロナ社.