2018 年 8 月 3 日（金）

連載には程遠いたまにしかない講座「かけがえのない材料力学」

材料力学の公式のまとめ：棒の引張圧縮・はりの曲げ・軸のねじりの復習[*1]

大阪大学大学院工学研究科

中 谷 彰 宏[*2]

1　ミクロとマクロのはざまで

弾性力学では，変位が拘束された 3 次元の固体に様々な荷重が作用する問題を取り扱う．一方，材料力学では，引張圧縮を受ける棒，曲げを受けるはり，ねじりを受ける軸といったように，縦の軸線と横断面に分離して問題を考える．このような考え方が有効なのは，軸線が断面の代表長さに比べて長い場合であるが，様々な問題で棒，はり，軸としてモデル化してその変形形状や内力の分布を議論することにより，強度設計に関するさまざまな公式を導くことができる．ここでは，その取り扱いを復習することを通じて，理解を深めることを目的とする．

材料力学では要素間のつながりを力学的，幾何学的に考える．応力とひずみのミクロな関係を考えて，力のバランス，幾何学的な関係を考えて，力・モーメントなどの一般化力と変位・回転角などの一般化変位との関係，すなわち，マクロ特性を知ることができる．それによって，ある外力が作用しているときの変位を求めることができるだけでなく，ミクロな点の近傍の応力状態やひずみ状態を同時に求めることができる．その流れはさまざまな公式として整備されている．それを理解して覚えることがここでのねらいである．

参考文献

[1] 渋谷陽二・中谷彰宏，材料力学，(2017)，コロナ社．

[*2] Email:nakatani@ams.eng.osaka-u.ac.jp

表 1　材料力学の公式のまとめ：棒，はり，軸の定式化

		棒の引張圧縮	はりの曲げ	軸のねじり
(1)	3D モデルを 1D モデルにするために導入される“仮定” ※仮定なので，この部分は頭の中だけで考えてわかるものではない．現象に対する観察から得られる知識に基づいている．	・軸線は曲がらない． ・変形前に軸線に垂直な断面（平面）は変形後も軸線に垂直． （断面のいたるところでひずみが一定）	・軸線が曲がる． ・ベルヌーイ・オイラーの仮説：変形前に軸線に垂直な断面（平面）は変形後も軸線に垂直． （中立面からの距離が大きくなると比例してひずみが大きくなる）	・軸線は曲がらない． ・変形前に軸線に垂直な断面（平面）は変形後も軸線に関して剛体的に回転する． （中心からの距離が大きくなると比例してせん断ひずみが大きくなる）
(2)	一般化力	軸方向力：P_x	モーメント：M_z あるいは，横荷重：P_y	モーメント：T_x
(3)	一般化変位	軸方向変位：u	たわみ角：θ あるいは，たわみ：y	ねじれ角：ϕ
(4)	変形パラメータ：変形を表す代表パラメータ．“一般化変位”に対応する変形量の導関数 （“一般化変位の”単位長さあたりの変化量）に相当する．	軸ひずみ: ε $\left(=\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$	曲率:$\dfrac{1}{\rho}$　または $-\kappa$ $\left(=-\dfrac{d\theta}{dx}=-\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)$	比ねじれ角: θ $\left(=\dfrac{d\phi}{dx}\right)$
(5)	断面内のひずみ分布：変形パラメーター (4) による表現	$\varepsilon_x=\varepsilon$ (y, z に依らない)	$\varepsilon_x=\dfrac{y}{\rho}=-\kappa y$ (z に依らない)	$\gamma=\theta\rho$ (半径 ρ のみの関数)
(6)	応力とひずみの関係 （フックの法則）	$\sigma_x=E\varepsilon_x$	$\sigma_x=E\varepsilon_x$	$\tau=G\gamma$
(7)	断面内の応力分布：変形パラメーター (4) による表現 (5) を (6) に代入	$\sigma_x=E\varepsilon$	$\sigma_x=E\dfrac{y}{\rho}=-E\kappa y$	$\tau=G\theta\rho$
(8)	合力：定義 (x のみの関数であることに注意)	軸力: $N=\int_A\sigma_x dA$	曲げモーメント: $M=\int_A\sigma_x y dA$	ねじりモーメント: $T=\int_A\tau\rho dA$
(9)	合力：変形パラメーター (4) との関係 (7) を (8) を代入し，A，I，I_p の定義を用いる	$N=EA\varepsilon$ $\left(A=\int_A dA\right)$	$M=\dfrac{1}{\rho}EI=-\kappa EI$ $\left(I=\int_A y^2 dA\right)$	$T=\theta GI_\mathrm{p}$ $\left(I_\mathrm{p}=\int_A\rho^2 dA\right)$
(10)	剛性 (9) を通じて自然と定義される	EA	EI	GI_p
(11)	断面内の応力分布：合力 (9) との関係関係式 (9) を変形パラメーター (4) ついて解いて，変形パラメーター (4) を合力 (8) で表す．その結果を (7) に代入する	$\sigma_x=\dfrac{N}{A}$	$\sigma_x=\dfrac{M}{I}y$	$\tau=\dfrac{T}{I_\mathrm{p}}\rho$
(12)	コンプリメンタリーひずみエネルギー密度（単位長さあたり） $\int_A\frac{\sigma^2}{2E}dA$, $\int_A\frac{\tau^2}{2G}dA$ に，(11) を代入して，A，I，I_p の定義を用いる	$\bar{W}_\mathrm{c}=\dfrac{N^2}{2EA}$	$\bar{W}_\mathrm{c}=\dfrac{M^2}{2EI}$	$\bar{W}_\mathrm{c}=\dfrac{T^2}{2GI_\mathrm{p}}$