

2017 年 8 月 4 日 (金)

連載には程遠いたまにしかない講座「かけがえのない材料力学」 2017 期末試験速報^{*1}

大阪大学大学院工学研究科
中 谷 彰 宏^{*2}

1 はじめに

あれほど問題を解くスピードが大事と授業で再三に渡って言って、モーメント面積法もかなり詳しく説明したのに、全然勉強してくれなくて、たけど時間が足りなかった人が多かったみたいなのは残念です。

【問題 2】と【問題 3】は不静定はりの問題、どちらも一次の不静定で、しかも剛体部分があるので、カスチリアーノの定理を使っても、モーメント面積法を使ってもどちらも、計算は楽になります。不静定力さえ求めればあとは単純なので、以下ではその方法について述べます。学生さんたちはほぼ夏休みモードですが、こちらは採点です。そうそう、4 年生は院試シーズンですが、この程度のはすらすら解けるようになってますよね。大丈夫でしょうか。

【問題 2】

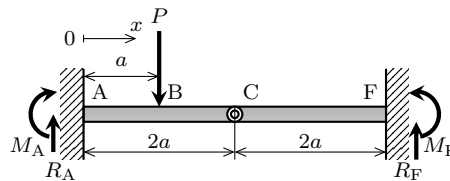


図 1 図 1

点 C で切断して内力を Q とします。曲げモーメント分布は、

$$M(x) = \begin{cases} P(x-a) - Q(x-2a) & 0 < x < a \\ -Q(x-2a) & a < x < 4a \end{cases} \quad (1)$$

です。

カスチリアーノの定理

まず

$$\frac{\partial M}{\partial Q} = -(x-2a), \quad 0 < x < 4a \quad (2)$$

^{*1} Copyright ©2017 Akihiro Nakatani, Microdynamics Laboratory, Osaka University

^{*2} Email:nakatani@ams.eng.osaka-u.ac.jp

を計算しておきます。そして、

$$\frac{\partial U_c}{\partial Q} = \int_0^{4a} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial Q} dx \quad (3)$$

$$= \int_0^a \frac{1}{EI} \{P(x-a) - Q(x-2a)\} \{-(x-2a)\} dx \\ + \int_a^{4a} \frac{1}{EI} \{-Q(x-2a)\} \{-(x-2a)\} dx \quad (4)$$

$$= -\frac{P}{EI} \int_0^a (x-a)(x-2a) dx + \frac{Q}{EI} \int_0^{4a} (x-2a)^2 dx \quad (5)$$

$$= \frac{a^3}{EI} \left(-\frac{5}{6}P + \frac{16}{3}Q \right) \quad (6)$$

最小仕事の原理*3によると、

$$\frac{\partial U_c}{\partial Q} = 0, \quad \text{すなわち, } Q = \frac{5}{32}P \quad (7)$$

モーメント面積法

モーメント面積法でヒンジを扱う方法については別に述べましたが、すこしトリッキーなので、ここでは、オーソドックスにヒンジ部で問題を分けることにします。これが素直です。AC 間について、

$$t_{CA} = \bar{x}_C \mathcal{A}_{CA} \quad (8)$$

$$= \left(a + \frac{2}{3}a \right) \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{-Pa}{EI} \right) a \right\} + \left\{ \frac{2}{3}(2a) \right\} \left\{ \frac{1}{2} \frac{Q(2a)}{EI} (2a) \right\} \quad (9)$$

$$= \frac{a^3}{EI} \left(-\frac{5}{6}P + \frac{8}{3}Q \right) \quad (10)$$

CF 間について、

$$t_{CF} = \bar{x}_C \mathcal{A}_{CF} \quad (11)$$

$$= \left\{ \frac{2}{3}(2a) \right\} \left\{ \frac{1}{2} \frac{(-Q)(2a)}{EI} (2a) \right\} \quad (12)$$

$$= \frac{a^3}{EI} \left(-\frac{8}{3}Q \right) \quad (13)$$

点 C でのたわみの連続性から、

$$t_{CA} = t_{CF} \quad (14)$$

$$\frac{a^3}{EI} \left(-\frac{5}{6}P + \frac{8}{3}Q \right) = \frac{a^3}{EI} \left(-\frac{8}{3}Q \right), \quad \text{すなわち, } Q = \frac{5}{32}P \quad (15)$$

【問題 3】

点 D の支持反力を Q とします*4

*3 点 C で問題を分離し、AC 間では上向きに Q 、CF 間では下向きに Q が外力として作用する問題に別けてカスチリアーノの定理を適用し、点 C でたわみが連続であるという条件を考えるのと等価

*4 ざっと答案を見たところ、点 C で切断しているひとがいました。原理的には間違いではありませんが、しかし、素早く問題を解くという意味では決してよい方法ではありません。点 A を回転支持に変更して、支持モーメントを不静定反力としてもいいですが、

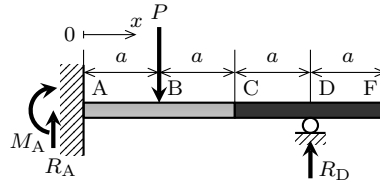


図 2 図 2

曲げモーメント分布は,

$$M(x) = \begin{cases} P(x-a) - Q(x-3a) & 0 < x < a \\ -Q(x-2a) & a < x < 3a \\ 0 & 3a < x < 4a \end{cases} \quad (16)$$

です.

カスチリアーノの定理

あらかじめ,

$$\frac{\partial M}{\partial Q} = \begin{cases} -(x-3a) & 0 < x < 3a \\ 0 & 3a < x < 4a \end{cases} \quad (17)$$

を計算しておきます. CF 間は剛体なので, この部分のコンプリメンタリーエネルギーへの寄与は 0 です. したがって, AC 間 ($0 < x < 2a$) を考えればいいことになります. すなわち,

$$\frac{\partial U_c}{\partial Q} = \int_0^{2a} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial Q} dx \quad (18)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^a \frac{1}{EI} \{P(x-a) - Q(x-3a)\} \{-(x-3a)\} dx \\ &\quad + \int_a^{2a} \frac{1}{EI} \{-Q(x-3a)\} \{-(x-3a)\} dx \end{aligned} \quad (19)$$

$$= -\frac{P}{EI} \int_0^a (x-a)(x-3a) dx + \frac{Q}{EI} \int_0^{2a} (x-3a)^2 dx \quad (20)$$

$$= \frac{a^3}{EI} \left(-\frac{4}{3}P + \frac{26}{3}Q \right) \quad (21)$$

となります*5.

点 C では支持条件によりたわみが 0 ですので*6,

$$\frac{\partial U_c}{\partial Q} = 0, \quad \text{すなわち, } Q = \frac{2}{13}P \quad (22)$$

ここでは片持ちはりにするのが素直でしょう.

*5 問題 2 を解いた後ですと, $x-2a$ が $x-3a$ になったり, 積分区間の終点の $4a$ が, $2a$ になったりしているだけで, ほとんど同じ手順なので確認しながらスピードアップが図れますね.

*6 これは最小仕事の原理の特別な場合と考えることもできます

モーメント面積法

CD 間は曲げモーメント M は 0 ではないですが、剛性が無限大なので、 M/EI は 0 です。したがって、その部分の面積の寄与を引きます*7。

$$\begin{aligned}
 t_{DA} &= \bar{x}_D \mathcal{A} \\
 &= \left(2a + \frac{2}{3}a\right) \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{-Pa}{EI} \right) a \right\} + (2a) \left\{ \frac{1}{2} \frac{Q(3a)}{EI} (3a) \right\} - \left(\frac{2}{3}a \right) \left(\frac{1}{2} \frac{Qa}{EI} a \right) \\
 &= \frac{a^3}{EI} \left(-\frac{4}{3}P + \frac{26}{3}Q \right), \quad \text{すなわち, } Q = \frac{2}{13}P
 \end{aligned} \tag{23}$$

と、たった 3 行で済みます。美しいでしょう！

参考文献

- [1] 渋谷陽二・中谷彰宏，材料力学，(2017)，コロナ社。

*7 台形の面積と台形の重心とかを難しく考えるのではなく三角形の面積と重心を二つ求めて寄与の差を計算します。もちろん台形をさらに二つの三角形にして計算することもできます