2017 年 7 月 21 日（金）

連載には程遠いたまにしかない講座「かけがえのない材料力学」

長柱のオイラー座屈の要点*1

大阪大学大学院工学研究科
中 谷 彰 宏*2

1　釣合いと安定

- 「釣合い」か「釣り合いでない」かという問いは，「安定」か「不安定」かという問いとは，異なる概念である．
- 「釣合い」には一般に「安定な釣合い」と「不安定な釣合い」がある．
- 釣合い状態に対して，外力や変形に微小な変化が外乱として加えられたときに，もとの状態に戻ろうとする復元力がはたらく場合は安定，復元力ではなく逆に状態の変化を外乱の方向に増長させる場合には不安定である（これは，「重力下で，下に凸の面の最深部に球を静かに置いた後その位置からすこし左右にずらしても元の位置に戻ろうとする性質があるのに対して，上に凸の面の最上部にそっと球を置こうとしても微小な擾乱によって中心から転がり落ちる．」という例から理解できる）．
- 圧縮荷重を受ける部材が，純粋な圧縮変形から，曲げ変形へと遷移するような現象を**座屈** (buckling) という．数学的には**分岐** (bifurcation) という．
- 分岐は分岐点のパラメーターの値と，対応するモードが存在する．それぞれ固有値，固有モードと呼ばれ，座屈の場合は，座屈荷重，座屈モード（分岐モード）である．
- 座屈は，変形後の釣合いを考えることによって評価できる．逆に，変形前の形に対して微小変形の枠組みで議論している限りは，安定か不安定化を論じることはできない．

2　変形後の形状を考えた釣合い

教科書，図 13.1 を考えよう．たわみ y が生じているとき，曲げモーメント分布は，

$$M(x) = Hy(x) + M_1(x)$$

となる．ただし $M_1(x)$ は横荷重 q による寄与である．たわみの方程式は，

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = -\frac{Hy + M_1}{EI}$$

と表される．x に関して微分すると，

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{H}{EI}\frac{dy}{dx} - \frac{V_1}{EI}$$

*2 Email:nakatani@ams.eng.osaka-u.ac.jp

さらに，x に関して微分すると，

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{H}{EI}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{q}{EI}$$

を得る．ここで，以下の関係を用いている．

$$\frac{dM_1}{dx} = V_1, \quad \frac{dV_1}{dx} = -q$$

このように，変形後のつりあい議論するためのたわみの基礎式 (13.7)

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} + H\frac{d^2y}{dx^2} = q$$

では，たわみの基礎式 (6.10)

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = q$$

に比べて，第 2 項が加わっている[*3]．

その一般解は，

$$y = C_1 \sin\lambda x + C_2 \cos\lambda x + C_3 x + C_4, \quad \text{ただし}, \lambda = \sqrt{\frac{H}{EI}}$$

であり，C_1，C_2，C_3，C_4 は境界条件から決定される．

3 オイラー座屈

次に，横荷重 $q = 0$ とし，単純支持はりの軸方向に圧縮軸力 P が作用する問題を考える（図 13.1 の H はここでは P と表記する）．変形後の釣合いを考えると，位置 x のたわみ $y(x)$ に対して，$M(x) = Py(x)$ なので，たわみの方程式に代入すると，

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = -\frac{Py}{EI}$$

を得る．この一般解は，

$$y = C_1 \sin\lambda x + C_2 \cos\lambda x, \quad \text{ただし}, \lambda = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

境界条件は，$x = 0$ で $y(0) = 0$，$x = l$ で $y(l) = 0$ である．これにより，$C_2 = 0$ であり，

$$C_1 = 0, \quad \text{または}, \sin\lambda l = 0$$

を得る．すなわち，

$$C_1 = 0, \quad \text{または}, \lambda l = \pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$$

$C_1 = 0$ は $y = 0$ を表し，たわみが 0 の単軸圧縮変形を意味する．一方，$\lambda l = \pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$ は，**分岐点** (bifurcation points)

$$P = P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}, \cdots = \frac{\pi^2 EI}{l^2}, \frac{2^2\pi^2 EI}{l^2}, \frac{3^2\pi^2 EI}{l^2}, \cdots$$

[*3] 前章までは，軸力は曲げ変形に影響しないと考えていたが，ここでの取り扱いではそうではない

に対応し，そのときのたわみ曲線は，それぞれ，

$$y = C_1^{(1)} \sin\frac{\pi}{l}, C_1^{(2)} \sin\frac{2\pi}{l}, C_1^{(3)} \sin\frac{3\pi}{l}, \cdots$$

である．これを**分岐モード** (bifurcation mode) という．そして，このように離散的な分岐点で生じるたわみ変形を**オイラー座屈** (Euler's buckling) という．このうち最小のもの

$$P_{\mathrm{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

を**オイラーの座屈荷重** (Euler's bucling load) という．

4 柱のオイラー座屈の要点

5 基本事項

長さ l，ヤング率 E，断面二次モーメント I の柱の**座屈荷重**は，

$$P_{\mathrm{cr}} = C\frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

である．ここで，C は境界条件に依存して決まる**端末条件係数** (fixity coefficient) であり

$$C = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{（一端自由，他端固定定支持の場合）} \\ 1 & \text{（一端移動支持，他端回転支持の場合）} \\ 2.0457 & \text{（一端移動支持，他端固定定支持の場合）} \\ 4 & \text{（両端固定支持の場合）} \end{cases}$$

である．

断面積 A，断面二次半径 $k = \sqrt{(I/A)}$ を用いて，座屈応力は

$$\sigma_{\mathrm{cr}} = \frac{P_{\mathrm{cr}}}{A} = C\frac{\pi^2 E}{(l/k)^2}$$

となる．ここで，l/k を**細長比** (slenderness ratio) という．

6 有効長さ

有効長さ (effective length) を

$$l_e = Kl$$

とする．ただし K は**有効長さ係数** (effective length coefficient) であり，

$$K = \frac{1}{\sqrt{C}}$$

である[*4]．

[*4] 境界条件に依存する係数 C が現れないように長さに係数をかけて換算する

座屈荷重は，

$$P_{\rm cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_e^2}$$

座屈応力は，

$$\sigma_{\rm cr} = \frac{P_{\rm cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{(l_e/k)^2}$$

となる．ここで l_e/k を**有効細長比** (effective slenderness ratio) という．

参考文献

[1] 渋谷陽二・中谷彰宏，材料力学，(2017)，コロナ社．