

2017 年 7 月 3 日 (月)

連載には程遠いたまにしかない講座「かけがえのない材料力学」 材力演習 10 の補足^{*1}

大阪大学大学院工学研究科
中 谷 彰 宏^{**2}

連続はりの基本

以下の流れになる。

1. 支点部の曲げモーメントを未知反力とする。
2. 与えられた問題（原問題）を支点間の区間ごとに、単純支持はりの問題に分ける。
3. 上記の問題ごとに、支点部にモーメントが作用している問題を考える。
4. 支点のたわみ角をモーメントで表現する。
5. 支点のたわみ角の連続性から、モーメントを決定する方程式を作って解く。
6. モーメントのつりあいから他の反力を決定する。

これは、三連モーメントの式を導く過程と同じであるので、正しく理解した上で、導出の際の仮定が成立しているかが確認できれば、三連モーメントの式を公式として用いてもよい。

[2]

点 A が回転支持、点 B、C が移動支持された連続はり。スパン AB、スパン BC の長さはともに l で、スパン AB の中央に P 、スパン BC の中央に $2P$ の集中荷重が作用している。曲げ剛性は一定として、支点 A, B, C の反力と、点 B の曲げモーメントを求めなさい。

この問題では、

1. 点 B の曲げモーメントを M_B とする。 $M_A = M_C = 0$ である。
2. 中央に集中荷重 P が作用し同時に点 B にモーメント M_B が反時計回りに作用する長さ l の単純支持はり AB（問題 1）と、中央に集中荷重 $2P$ が作用し同時に点 B にモーメント M_B が時計回りに作用する長さ l の単純支持はり BC（問題 2）に分ける。
3. まず、問題 1 に対して支点 B のたわみ角を求め $\theta_B^{(-)}$ とする。さらに、問題 2 に対して支点 B のたわみ角を求め $\theta_B^{(+)}$ とする。
4. たわみ角の連続条件 $\theta_B^{(-)} = \theta_B^{(+)}$ から、 M_B を決定する。
5. 問題 1 について点 A の反力 R_A 、問題 2 について点 C の反力 R_C を計算する。その後、全体のつりあいから、点 B の反力 R_B を計算する^{*3}

^{*1} Copyright ©2017 Akihiro Nakatani, Microdynamics Laboratory, Osaka University

^{*2} Email: nakatani@ams.eng.osaka-u.ac.jp

^{*3} あるいは、問題 1 について点 A の反力 R_A と点 B の反力 $R_B^{(-)}$ 、問題 2 について点 C の反力 R_C と点 B の反力 $R_B^{(+)}$ を計算する。その後、点 B の反力 $R_B = R_B^{(-)} + R_B^{(+)}$ を計算してもよい。答えはどちらの手順でも同じになるので、検算になる。

■解 1: モーメント面積法 上記で述べた単純支持はり AB (問題 1) と、単純支持はり BC (問題 2) に分けて、それぞれ、AB 間、BC 間にモーメント面積法を適用する。

はり AB について、

$$t_{AB} = \bar{x}_A \mathcal{A} = \frac{l}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{Pl}{4} \cdot l \right) + \frac{2}{3} l \cdot \left(\frac{1}{2} M_B l \right) = \frac{l^2}{EI} \left(\frac{Pl}{16} + \frac{M_B}{3} \right)$$

$$\theta_B^{(-)} = -\frac{t_{AB}}{l} = -\frac{l}{EI} \left(\frac{Pl}{16} + \frac{M_B}{3} \right)$$

はり BC について、

$$t_{CB} = \bar{x}_C \mathcal{A} = \frac{l}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2Pl}{4} \cdot l \right) + \frac{2}{3} l \cdot \left(\frac{1}{2} M_B l \right) = \frac{l^2}{EI} \left(\frac{Pl}{8} + \frac{M_B}{3} \right)$$

$$\theta_B^{(+)} = \frac{t_{CB}}{l} = \frac{l}{EI} \left(\frac{Pl}{8} + \frac{M_B}{3} \right)$$

たわみ角の連続条件

$$\begin{aligned} 0 &= \theta_B^{(+)} - \theta_B^{(-)} = \frac{l}{EI} \left(\frac{Pl}{8} + \frac{M_B}{3} \right) + \frac{l}{EI} \left(\frac{Pl}{16} + \frac{M_B}{3} \right) \\ 0 &= \frac{2}{3} M_B + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{16} \right) Pl = \frac{2}{3} M_B + \frac{3}{16} Pl, \quad \text{よって、} M_B = -\frac{9}{32} Pl \end{aligned}$$

AB について、点 B に関するモーメントのつりあいから、

$$M_B + P \frac{l}{2} - R_A l = 0, \quad \text{よって、} R_A = \frac{7}{32} P$$

BC について、点 B に関するモーメントのつりあいから、

$$-M_B - 2P \frac{l}{2} + R_C l = 0, \quad \text{よって、} R_C = \frac{23}{32} P$$

全体 ABC の力のつりあいから、

$$2P + P - R_A - R_B - R_C = 0, \quad \text{よって、} R_B = \frac{33}{16} P$$

■解 2: 三連モーメントの式 p.153 (8.17)、あるいは、(8.18) を公式として使って解いてもよい。なお、公式の導出過程は、本質的に、解 1 と同じ操作であり、解 1 と同じ式が得られる。ブラックボックス的に公式を用いているときには、前提となっている仮定が成立していることを確認しなければならない。

■解 3: カスチリアーノの定理の利用 はり AB について、曲げモーメント分布は、

$$\begin{aligned} M(x) &= M_1(x) + M_2(x) \\ M_1(x) &= \begin{cases} \frac{P}{2}x & (0 < x < \frac{l}{2}) \\ \frac{P}{2}(l-x) & (\frac{l}{2} < x < l) \end{cases}, \quad M_2(x) = \frac{M_B}{l}x \end{aligned}$$

である。

$$\frac{\partial M}{\partial M_B} = \frac{x}{l}$$

カスチリャーノの定理より、中央に集中荷重 P が作用し、点 B にモーメント M_B が作用するとき、点 B の M_B の作用方向の回転角 $\vartheta_B(P, M_B)$ は、

$$\begin{aligned}\vartheta_B(P, M_B) &= \int_0^l \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_B} dx \\ &= \int_0^l \frac{M_1}{EI} \frac{x}{l} dx + \int_0^l \frac{M_2}{EI} \frac{x}{l} dx \\ &= \int_0^{l/2} \frac{1}{EI} \frac{P}{2} \frac{x}{l} dx + \int_{l/2}^l \frac{1}{EI} \frac{P}{2} (l-x) \frac{x}{l} dx + \int_0^l \frac{1}{EI} \frac{M_B}{l} x \frac{x}{l} dx \\ &= \left[\frac{P}{6EI} x^3 \right]_0^{l/2} + \left[\frac{P}{4EI} x^2 - \frac{P}{6EI} x^3 \right]_{l/2}^l + \left[\frac{M_B}{3EI} x^3 \right]_0^l \\ &= \frac{Pl^2}{EI} \left(\frac{1}{48} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{16} + \frac{1}{48} \right) + \frac{M_B l}{3EI} \\ &= \frac{l}{EI} \left(\frac{1}{16} Pl + \frac{1}{3} M_B \right)\end{aligned}$$

である。

点 B の左側のたわみ角 $\theta_B^{(-)}$ は、たわみの導関数としてのたわみ角の符号を考慮すると、負号が必要であり、

$$\theta_B^{(-)} = -\vartheta_B(P, M_B) = -\frac{l}{EI} \left(\frac{1}{16} Pl + \frac{1}{3} M_B \right)$$

である。一方、点 B の右側のたわみ角を $\theta_B^{(+)}$ とする。はり、BC については、点 B のたわみ角は、上の式の P を $2P$ に置き換えた値として、

$$\theta_B^{(+)} = \vartheta_B(2P, M_B) = \frac{l}{EI} \left(\frac{1}{16} (2P)l + \frac{1}{3} M_B \right)$$

となる。ただし、たわみの導関数としてのたわみ角の符号を考慮すると、負号は不要であることがわかる。

点 B でのたわみ角の連続条件 $\theta_B^{(-)} = \theta_B^{(+)}$ から、

$$\frac{l}{EI} \left(\frac{3}{16} Pl + \frac{2}{3} M_B \right) = 0, \quad \text{ゆえに、} M_B = -\frac{9}{32} Pl$$

を得る。他の反力については、前述と同様の考え方で計算することができる。

■解 4:直接積分法 この連続はりの不静定次数は 1 次であり、この程度の簡単さならば、点 B の反力 R_B を不静定反力として選んで直接積分により解析することも可能。ただし、それでも複雑になるので、特異関数法を用いる。

単純支持はり AC に、 $x = l/4$ に P 、 $x = l/2$ に $-R_B$ 、 $x = 3l/2$ に $2P$ の荷重が同時に作用する問題は、3 つの荷重が一つずつ作用する問題の重ね合わせであるので、

$$\begin{aligned}
M(x) &= \frac{3}{4}Px - P\left\langle x - \frac{1}{2}l \right\rangle \\
&\quad - \frac{1}{2}R_Bx + R_B\langle x - l \rangle \\
&\quad + \frac{1}{4}(2P)x - 2P\left\langle x - \frac{3}{2}l \right\rangle \\
&= \frac{5}{4}Px - \frac{1}{2}R_Bx - P\left\langle x - \frac{1}{2}l \right\rangle + R_B\langle x - l \rangle - 2P\left\langle x - \frac{3}{2}l \right\rangle
\end{aligned}$$

たわみの方程式 $EIy'' = -M(x)$ から、直接積分すると、

$$\begin{aligned}
EIy'' &= -\frac{5}{4}Px + \frac{1}{2}R_Bx + P\left\langle x - \frac{1}{2}l \right\rangle - R_B\langle x - l \rangle + 2P\left\langle x - \frac{3}{2}l \right\rangle \\
EIy' &= -\frac{5}{8}Px^2 + \frac{1}{4}R_Bx^2 + \frac{1}{2}P\left\langle x - \frac{1}{2}l \right\rangle^2 - \frac{1}{2}R_B\langle x - l \rangle^2 + P\left\langle x - \frac{3}{2}l \right\rangle^2 + C_1 \\
EIy &= -\frac{5}{24}Px^3 + \frac{1}{12}R_Bx^3 + \frac{1}{6}P\left\langle x - \frac{1}{2}l \right\rangle^3 - \frac{1}{6}R_B\langle x - l \rangle^3 + \frac{1}{3}P\left\langle x - \frac{3}{2}l \right\rangle^3 + C_1x + C_2
\end{aligned}$$

$x = 0$ で、たわみ $y(0) = 0$ なので、 $C_2 = 0$ 。また、 $x = l$ 、 $x = 2l$ でたわみが 0、すなわち、 $y(l) = y(2l) = 0$ なので、

$$\begin{aligned}
-\frac{5}{24}Pl^3 + \frac{1}{12}R_Bl^3 + \frac{1}{6}P\left(\frac{l}{2}\right)^3 + C_1l &= 0 \\
-\frac{5}{24}P(2l)^3 + \frac{1}{12}R_B(2l)^3 + \frac{1}{6}P\left(\frac{3}{2}l\right)^3 - \frac{1}{6}R_Bl^3 + \frac{1}{3}P\left(\frac{1}{2}l\right)^3 + C_1(2l) &= 0
\end{aligned}$$

整理すると、

$$-\frac{3}{16}Pl^2 + \frac{1}{12}R_Bl^2 + C_1 = 0, \quad -\frac{17}{32}Pl^2 + \frac{1}{4}R_Bl^2 + C_1 = 0$$

これを解いて、

$$C_1 = \frac{1}{64}Pl^2 \quad R_B = \frac{33}{16}P$$

力のつりあい、および、点 A に関するモーメントの釣合いから、

$$R_A + R_B + R_C - P - 2P = 0, \quad R_Bl + R_C \cdot 2l - P \cdot \frac{l}{2} - 2P \cdot \frac{3}{2}l = 0$$

これを解いて、

$$R_A = \frac{7}{32}P, \quad R_C = \frac{23}{32}P$$

点 B の曲げモーメントは、 $M(x)$ に求めた R_B の値を代入し、 $x = l$ での値を求めると、

$$M(l) = \frac{5}{4}Pl - \frac{1}{2}R_Bl - P \cdot \frac{1}{2}l = -\frac{9}{32}Pl$$

[3]

はり ABCD が点 D で固定支持され、点 A、点 B、C で移動支持されている。スパン AB、スパン BC、スパン CD の長さはいずれも l で、スパン AB、スパン BC に、単位長さあたり q の一様分布荷重が作用している。曲げ剛性は一定として、支点 A, B, C, D の反力と、点 A, B, C の曲げモーメントを求める。

点 A, B, C の曲げモーメントを M_A 、 M_B 、 M_C 、点 D の反モーメントを M_D とする。まず、 $M_A = 0$ である。

■解 1: モーメント面積法 AB、BC、CD 間にモーメント面積法を適用し、

$$\begin{aligned}\theta_B^{(-)} &= -t_{AB}/l = \frac{-1}{l} \left\{ \frac{2}{3}l \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{M_B}{EI} \cdot l \right) + \frac{1}{2}l \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} \frac{ql^2}{EI} \cdot l \right) \right\} \\ \theta_B^{(+)} &= t_{CB}/l = \frac{1}{l} \left\{ \frac{2}{3}l \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{M_B}{EI} \cdot l \right) + \frac{1}{3}l \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{M_C}{EI} \cdot l \right) + \frac{1}{2}l \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} \frac{ql^2}{EI} \cdot l \right) \right\} \\ \theta_C^{(-)} &= -t_{BC}/l = \frac{-1}{l} \left\{ \frac{1}{3}l \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{M_B}{EI} \cdot l \right) + \frac{2}{3}l \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{M_C}{EI} \cdot l \right) + \frac{1}{2}l \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} \frac{ql^2}{EI} \cdot l \right) \right\} \\ \theta_C^{(+)} &= t_{DC}/l = \frac{1}{l} \left\{ \frac{2}{3}l \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{M_C}{EI} \cdot l \right) + \frac{1}{3}l \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{M_D}{EI} \cdot l \right) \right\} \\ \theta_D &= -t_{CD}/l = \frac{-1}{l} \left\{ \frac{1}{3}l \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{M_C}{EI} \cdot l \right) + \frac{2}{3}l \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{M_D}{EI} \cdot l \right) \right\}\end{aligned}$$

点 B、C でのたわみ角の連続条件 $\theta_B^{(-)} = \theta_B^{(+)}$ 、 $\theta_C^{(-)} = \theta_C^{(+)}$ と、点 D でたわみ 0 の条件 $\theta_D = 0$ を整理すると、

$$\begin{cases} 4M_B + M_C = -\frac{1}{2}ql^2 \\ M_B + 4M_C + M_D = -\frac{1}{4}ql^2 \\ M_C + 2M_D = 0 \end{cases}$$

これを解く。まず、第 1 式より、

$$M_B = -\frac{1}{4}M_C - \frac{1}{8}ql^2$$

これを第 2 式に代入し、第 3 式と連立して解くと、

$$M_C = -\frac{1}{26}ql^2, \quad M_D = \frac{1}{52}ql^2$$

を得る。したがって、

$$M_B = -\frac{3}{26}ql^2$$

単純支持はり AB に対して、点 B に関するモーメントの釣合いを考えると、

$$R_A l - ql \cdot \frac{l}{2} - M_B = 0, \quad R_A = \frac{ql}{2} + \frac{M_B}{l} = \frac{5}{13}ql$$

力の釣合いを考えると、

$$R_B^{(-)} = ql - R_A = \frac{8}{13}ql$$

単純支持はり BC に対して、点 C に関するモーメントの釣合いを考えると、

$$R_B^{(+)}l - ql \cdot \frac{l}{2} + M_B - M_C = 0, \quad R_B^{(+)} = \frac{ql}{2} - \frac{M_B}{l} + \frac{M_C}{l} = \frac{15}{26}ql$$

力の釣合いを考えると、

$$R_C^{(-)} = ql - R_B^{(+)} = \frac{11}{26}ql$$

単純支持はり CD に対して、点 D に関するモーメントの釣合いを考えると、

$$R_C^{(+)}l + M_C - M_D = 0, \quad R_C^{(+)} = -\frac{M_C}{l} + \frac{M_D}{l} = \frac{3}{52}ql$$

力の釣合いを考えると、

$$R_D = -R_C^{(+)} = -\frac{3}{52}ql$$

中間支点の反力 R_B と R_C は、左右のスパンの寄与を考慮して、

$$R_B = R_B^{(-)} + R_B^{(+)} = \frac{8}{13}ql + \frac{15}{26}ql = \frac{31}{26}ql$$

$$R_C = R_C^{(-)} + R_C^{(+)} = \frac{11}{26}ql + \frac{3}{52}ql = \frac{25}{52}ql$$

■解 2:三連モーメントの式 p.153 (8.17)、あるいは、(8.18) を公式として使って解いてもよい。なお、公式の導出過程は、本質的に、解 1 と同じ操作であり、解 1 と同じ式が得られる。ブラックボックス的に公式を用いているときには、前提となっている仮定が成立していることを確認しなければならない。