

連載には程遠いたまにしかない講座「かけがえのない材料力学」
材力演習 9 の補足^{*1}

大阪大学大学院工学研究科
中 谷 彰 宏^{*2}

[1] (問題の設定とまえおき)

長さ L のはり AB が、点 A を移動支持、点 B を固定支持されている。 $x = a$ にモーメント M_1 が反時計まわりに作用している。反力は R_A , R_B , M_B であり、1 次の不静定問題である、

反力をすべて決定するためには、力やモーメントの釣り合いを考えているだけでは不十分であり、たわみやたわみ角などの幾何学的な条件と構成式が必要である。

■解 1: モーメント面積法 ここでは不静定反力として R_A を選んで、AB 間にモーメント面積法を適用する。 M/EI 線図は、 R_A による寄与と、 M_1 による寄与の和である。

R_A による寄与分の面積 $\mathcal{A}^{(1)}$ と、点 A から図心までの距離 $\bar{x}_A^{(1)}$ は、 M_1 による寄与分の面積 $\mathcal{A}^{(2)}$ と、点 A から図心までの距離 $\bar{x}_A^{(2)}$ は、

$$\mathcal{A}^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_A L}{EI} \cdot L, \quad \bar{x}_A^{(1)} = \frac{2}{3} L$$

$$\mathcal{A}^{(2)} = -\frac{M_1}{EI} \cdot (L - a), \quad \bar{x}_A^{(2)} = \frac{1}{2} (L + a)$$

モーメント面積法により、

$$t_{AB} = \bar{x}_A^{(1)} \mathcal{A}^{(1)} + \bar{x}_A^{(2)} \mathcal{A}^{(2)} = \frac{2}{3} L \cdot \frac{R_A L^2}{2EI} + \frac{1}{2} (L + a) \cdot \left\{ -\frac{M_1}{EI} (L - a) \right\}$$

点 B の接線は点 A を通るので、 $t_{AB} = 0$ 。したがって、

$$R_A = \frac{3}{2} \frac{M_1}{L^3} (L - a)(L + a)$$

を得る。 $R_B = -R_A$, $M_B = R_A L - M_1$ によって全ての反力が決定される。

不静定内力や不静定反力を決定する場合にモーメント面積法を適用できるかどうかを考えてみることは、特に重要である。

■解 2: たわみの方程式からの直接積分 ここでは不静定反力として R_A を選ぶ。このとき $R_B = -R_A$, $M_B = R_A L - M_1$ と表すことができ、せん断力分布 $V(x)$ と曲げモーメント分布 $M(x)$ は、

$$V(x) = R_A, \quad M(x) = R_A x - M_1 H(x - a)$$

^{*1} Copyright ©2017 Akihiro Nakatani, Osaka University

^{*2} Email: nakatani@ams.eng.osaka-u.ac.jp

となる。

$$\begin{aligned}EIy'' &= -R_A x + M_1 H(x - a) \\EIy' &= -\frac{1}{2}R_A x^2 + M_1 \langle x - a \rangle + C_1 \\EIy &= -\frac{1}{6}R_A x^3 + \frac{1}{2}M_1 \langle x - a \rangle^2 + C_1 x + C_2\end{aligned}$$

支持点等の条件は、まず、 $y(0) = 0$ より、 $C_2 = 0$ 。次に、 $y(L) = 0$ 、 $y'(L) = 0$ より、

$$\begin{aligned}-\frac{1}{6}R_A L^3 + \frac{1}{2}M_1(L - a)^2 + C_1 L &= 0 \\-\frac{1}{2}R_A L^2 + M_1(L - a) + C_1 &= 0\end{aligned}$$

これを解くと、

$$R_A = \frac{3}{2} \frac{M_1}{L^3} (L - a)(L + a), \quad C_1 = \frac{1}{4} \frac{M_1}{L} (L - a)(-L + 3a)$$

を得る。得られた値を代入するとたわみ角分布、たわみ曲線が一意に定まる。また、 $R_B = -R_A$ 、 $M_B = R_A L - M_1$ によって全ての反力が決定される。

■解 3: たわみの基礎式からの直接積分 $x = a$ に反時計回りモーメント M_1 が作用する場合の分布荷重 $q(x)$ は形式的に

$$q(x) = M_1 \delta'(x - a)$$

と書くことができる*3。

$$\begin{aligned}EI \frac{d^4 y}{dx^4} &= M_1 \delta'(x - a) \\EI \frac{d^3 y}{dx^3} &= M_1 \delta(x - a) + C_1 \\EIy'' &= M_1 H(x - a) + C_1 x + C_2 \\EIy' &= M_1 \langle x - a \rangle + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \\EIy &= \frac{1}{2}M_1 \langle x - a \rangle^2 + \frac{1}{6}C_1 x^3 + \frac{1}{2}C_2 x^2 + C_3 x + C_4\end{aligned}$$

支持点等の条件は、まず、 $y(0) = 0$ 、 $y''(0) = 0$ より、 $C_4 = 0$ 、 $C_2 = 0$ 。次に、 $y(L) = 0$ 、 $y'(L) = 0$ より、

$$\frac{1}{2}M_1(L - a)^2 + \frac{1}{6}C_1 L^3 + C_3 L = 0, \quad M_1(L - a) + \frac{1}{2}C_1 L^2 + C_3 = 0$$

これを解くと、

$$C_1 = -\frac{3}{2} \frac{M_1}{L^3} (L - a)(L + a), \quad C_3 = \frac{1}{4} \frac{M_1}{L} (L - a)(-L + 3a)$$

を得る。反力 R_A 、 R_B 、 M_B は、せん断力分布 $V(x)$ と曲げモーメント分布 $M(x)$ をそれぞれ $V(x) = -EI d^3 y / dx^3$ 、 $M(x) = -EI y''$ で求めて、決定すればよい。

*3 あるいは $q(x) = 0$ とし、 $EI d^4 y / dx^4 = 0$ を出発点として、 $EI d^3 y / dx^3 = C_1$ と積分の後、 $EI y'' = C_1 x + C_2 + M_1 H(x - a)$ のように、積分定数を C_2 を加えるのと同時に $M_1 H(x - a)$ を加えて議論を進めることができる。

たわみの基礎式を用いる方法は、力の釣り合いの関係を陽に用いることなしに、単純な手続きでたわみ角分布やたわみ曲線を直接得ることができるという特長があるが、反力の値やせん断力分布、曲げモーメント分布を得るためには、 d^3y/dx^3 や $y''(x)$ の表現から議論しなければならない。これは少々煩雑さを伴うかもしれない。

[2]

(1) 長さ L の片持ちはり AB が点 B で固定支持されている。自由端 A から距離 a の位置に鉛直上向きに集中力 P が作用するときのたわみ角分布とたわみ曲線。

たわみの方程式を積分し、

$$EIy'' = -M(x) = -P\langle x - a \rangle$$

$$EIy' = -\frac{1}{2}P\langle x - a \rangle^2 + C_1$$

$$EIy = -\frac{1}{6}P\langle x - a \rangle^3 + C_1x + C_2$$

を得る。境界条件 $y'(L) = 0$, $y(L) = 0$ より、

$$-\frac{1}{2}P(L - a)^2 + C_1 = 0, \quad -\frac{1}{6}P(L - a)^3 + C_1L + C_2 = 0$$

これを解いて、

$$C_1 = \frac{1}{2}P(L - a)^2, \quad C_2 = -\frac{1}{6}P(L - a)^2(2L + a)$$

したがって、

$$y' = \frac{P}{2EI} \{ (L - a)^2 - \langle x - a \rangle^2 \},$$

$$y = \frac{P}{6EI} \{ (L - a)^2(3x - 2L - a) - \langle x - a \rangle^3 \}$$

(2) 長さ L の片持ちはり AB が点 B で固定支持されている。自由端 A から距離 a の位置に反時計まわりにモーメント M_1 が作用するときのたわみ角分布とたわみ曲線。

たわみの方程式を積分し、

$$EIy'' = -M(x) = M_1H(x - a)$$

$$EIy' = M_1\langle x - a \rangle + C_1$$

$$EIy = \frac{1}{2}M_1\langle x - a \rangle^2 + C_1x + C_2$$

を得る。境界条件 $y'(L) = 0$, $y(L) = 0$ より、

$$M_1(L - a) + C_1 = 0, \quad \frac{1}{2}M_1(L - a)^2 + C_1L + C_2 = 0$$

これを解いて、

$$C_1 = -M_1(L - a), \quad C_2 = \frac{1}{2}M_1(L - a)(L + a)$$

したがって、

$$y' = \frac{M_1}{EI} \{ \langle x - a \rangle - (L - a) \},$$

$$y = \frac{M_1}{2EI} \{ \langle x - a \rangle^2 + (L - a)(L + a - 2x) \}$$

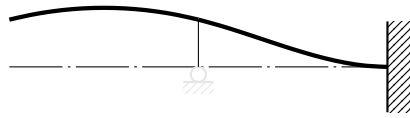
[3]

■解 1:重ね合せの原理による解（問題の指示どおりの方法） 問題 1「[2](1)において、 $a = 0$ とおいた問題」問題 2「2において、 $a = L/2$ とおいた問題」を考え、重ね合わせる。点 C のたわみが $y_C = y(L/2) = 0$ の条件から、 P を決定する。具体的な計算は諸君に委ねるが、 $P = \frac{9M_1}{8L}$ である。すなわち、反力 $R_A = P = \frac{9M_1}{8L}$ であり、 $R_B = -R_A = \frac{9M_1}{8L}$ 、 $M_B = \frac{M_1}{8}$ である。

[4]

■解 1:重ね合せの原理による解（問題の指示どおりの方法） 問題 1「[2](1)において、 $a = L/2$ とおいた問題」問題 2「2において、 $a = 0$ とおいた問題」を考え、重ね合わせる。具体的な計算は諸君に委ねてここでは省略するが、点 C のたわみが $y_C = y(L/2) = 0$ の条件から、 $P = \frac{3M_1}{L}$ となる。点 A のたわみ $y_A = y(0) = \frac{3M_1 L^2}{16EI}$ を得る。

■解 2:モーメント面積法（その 1） 不静定反力として R_C を選択し、点 C の支点を取り除いて片持ちはりの形にして、もとの問題の外力（点 A に反時計まわりに M_1 ）に加えて、点 C に外力として R_C が作用する問題を解く。



(a) $R_C = 6M_1/L$
(不正解)



(b) $R_C = 3M_1/L$
(正解)

点 B での境界条件（たわみ 0、たわみ角 0）は常に（任意の R_C に対して）満足されているので、点 C のたわみ y_C が 0 になるように、不静定力を決定することを方針とする。まず、CB 間にモーメント面積法を適用する。 M_1 と R_C による寄与をそれぞれ添字 1, 2 とする。 M/EI 図の面積 A_1 , A_2 と、その図心 $\bar{x}_{C1}$, $\bar{x}_{C2}$ は、

$$A_1 = \left(-\frac{M_1}{EI}\right) \frac{L}{2}, \quad A_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{R_C L^2}{2EI}\right) \frac{L}{2} = \frac{R_C L^2}{8EI}, \quad \bar{x}_{C1} = \frac{L}{4}, \quad \bar{x}_{C2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{L}{2} = \frac{L}{3}.$$

点 B の接線を基準とした点 C の接線たわみは、

$$t_{CB} = \bar{x}_C A = \bar{x}_{C1} A_1 + \bar{x}_{C2} A_2 = \frac{L}{4} \left(-\frac{M_1 L}{2EI}\right) + \frac{L}{3} \frac{R_C L^2}{8EI} = \frac{L^2}{EI} \left(-\frac{1}{8} M_1 + \frac{1}{24} R_C L\right).$$

点 B の接線の傾きは 0 なので、点 C のたわみは $y_C = -t_{CB}$ 。この値が 0 となる条件から、

$$R_C = \frac{3M_1}{L}.$$

次に、AB 間にモーメント面積法を適用する。 M_1 と R_C による寄与をそれぞれ添字 1, 2 とする。 M/EI

図の面積 $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ と, その図心 $\bar{x}_{A1}$, $\bar{x}_{A2}$ は,

$$\mathcal{B}_1 = -\frac{M_1 L}{EI}, \mathcal{B}_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{R_C L}{2EI} \right) \frac{L}{2} = \frac{R_C L^2}{8EI}, \quad \bar{x}_{A1} = \frac{L}{2}, \quad \bar{x}_{A2} = \frac{L}{2} + \frac{2}{3} \frac{L}{2} = \frac{5L}{6}.$$

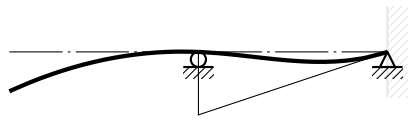
点 B の接線を基準とした点 A の接線たわみ t_{AB} は

$$\begin{aligned} t_{AB} &= \bar{x}_A \mathcal{B} = \bar{x}_{A1} \mathcal{B}_1 + \bar{x}_{A2} \mathcal{B}_2 \\ &= \frac{L}{2} \left(-\frac{M_1 L}{EI} \right) + \frac{5L}{6} \left(\frac{R_C L^2}{8EI} \right) = \frac{M_1 L^2}{EI} \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{8} \right) = -\frac{3M_1 L^2}{16EI}. \end{aligned}$$

点 B の接線の傾きは 0 なので, たわみ $y_A = -t_{AB}$

$$y_A = -t_{AB} = \frac{3}{16} \frac{M_1 L^2}{EI}$$

■解 3: モーメント面積法 (その 2) 不静定反力として M_B を選択し, 点 B の固定支持を回転支持にとりかえて, 両端支持はりの形にする。形にして, もとの問題の外力 (点 A に反時計まわりに M_1) に加えて, 点 B に外力として M_B が作用する問題を解く。点 B でのたわみ 0, 点 C でのたわみ 0 という条件は常に (任意の M_B に対して) 満足されているので, 点 B のたわみ角 θ_B が 0 になるように, 不静定力を決定することを方針とする。



(a) $M_B = 2.5M_1$
(不正解)



(b) $M_B = 0.5M_1$
(正解)

まず, CB 間にモーメント面積法を適用する。 M_1 と M_B による寄与をそれぞれ添字 1, 2 とする。 M/EI 図の面積 $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ と, その図心 $\bar{x}_{C1}$, $\bar{x}_{C2}$ は,

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2} \left(-\frac{M_1}{EI} \right) \frac{L}{2} = -\frac{M_1 L}{4EI}, \quad \mathcal{A}_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{M_B}{EI} \right) \frac{L}{2} = \frac{M_B L}{4EI}, \quad \bar{x}_{C1} = \frac{1}{3} \frac{L}{2} = \frac{L}{6}, \quad \bar{x}_{C2} = \frac{2}{3} \frac{L}{2} = \frac{L}{3}.$$

点 B の接線を基準とした点 C の接線たわみは,

$$t_{CB} = \bar{x}_C \mathcal{A} = \bar{x}_{C1} \mathcal{A}_1 + \bar{x}_{C2} \mathcal{A}_2 = \frac{L}{6} \left(-\frac{M_1 L}{4EI} \right) + \frac{L}{3} \left(\frac{M_B L}{4EI} \right) = \frac{L^2}{EI} \left(-\frac{1}{24} M_1 + \frac{1}{12} M_B \right).$$

点 B の接線の傾き θ_B を 0 にするには, 点 B の接線が点 C を通らなければならないから, つまり, $t_{CB} = 0^{*4}$. これを解くと,

$$M_B = \frac{1}{2} M_1.$$

^{*4} $\theta_B = -t_{CB}/(L/2) = 0$ の意味である。このようにたわみ角に対する条件を接線たわみで表現することに慣れておこう。

次に、AB 間にモーメント面積法を適用する。 M_1 による AC 間の領域への寄与を添字 3 とする。 M/EI 図の面積 $\mathcal{A}_3$ とする。

$$\mathcal{A}_3 = \left(-\frac{M_1}{EI} \right) \frac{L}{2} = -\frac{M_1 L}{2EI}, \quad \bar{x}_{A1} = \frac{2L}{3}, \quad \bar{x}_{A2} = \frac{5L}{6}, \quad \bar{x}_{A3} = \frac{L}{4}$$

点 B の接線を基準とした点 A の接線たわみ t_{AB} は、

$$t_{AB} = \bar{x}_{A1}\mathcal{A}_1 + \bar{x}_{A2}\mathcal{A}_2 + \bar{x}_{A3}\mathcal{A}_3 = \frac{M_1 L^2}{EI} \left(-\frac{2}{3} \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \frac{1}{2} \right) = -\frac{3}{16} \frac{M_1 L^2}{EI}$$

点 B の接線の傾きは 0 なので、たわみ $y_A = -t_{AB}$

$$y_A = -t_{AB} = \frac{3}{16} \frac{M_1 L^2}{EI}$$

[5]

■解 1: 重ね合せの原理による解（問題の指示どおりの方法） 問題 1 「[2](1) において、 $a = L/2$, $P = P$ とおいた問題」 問題 2 「[2](1) において、 $a = 0$, $P = R_C$ とおいた問題」を考え、重ね合わせる。具体的な計算は諸君に委ねてここでは省略するが、点 A のたわみが $y_A = R_C/k = R_C L^3/EI$ の条件から、 $R_C = \frac{5P}{64}$ となる。点 A のたわみ角 $\theta_A = y'(0) = -\frac{11PL^2}{128EI}$ を得る。

■解 2: モーメント面積法 不静定反力を R_C とし、AB 間にモーメント面積法を適用する。 P と R_C による寄与をそれぞれ添字 1, 2 とする。 M/EI 図の面積 $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ と、その図心 $\bar{x}_{A1}$, $\bar{x}_{A2}$ は、

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2} \left(-\frac{PL}{EI} \right) \frac{L}{2} = -\frac{PL^2}{8EI}, \quad \mathcal{A}_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{R_C L}{EI} \right) L = \frac{R_C L^2}{2EI}, \quad \bar{x}_{A1} = \frac{5}{6}L, \quad \bar{x}_{A2} = \frac{2}{3}L.$$

点 B の接線を基準とした点 A の接線たわみ t_{AB} は、

$$\begin{aligned} t_{AB} &= \bar{x}_A \mathcal{A} = \bar{x}_{A1}\mathcal{A}_1 + \bar{x}_{A2}\mathcal{A}_2 \\ &= \frac{5L}{6} \left(-\frac{PL^2}{8EI} \right) + \frac{2L}{3} \left(\frac{R_C L^2}{2EI} \right) = \frac{L^3}{EI} \left(-\frac{5P}{48} + \frac{R_C}{3} \right). \end{aligned}$$

点 A のたわみ y_A は、

$$y_A = -t_{AB} = \frac{L^3}{EI} \left(\frac{5P}{48} - \frac{R_C}{3} \right).$$

y_A は、力 R_C で圧縮されるばね ($k = EI/L^3$) の変位に等しいから、

$$y_A = \frac{R_C}{k} = \frac{R_C L^3}{EI} \quad \text{から,} \quad R_C = \frac{5P}{64}.$$

点 A のたわみ角 $\theta_A = \theta_{BA}$ は、

$$\theta_A = \theta_{BA} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = -\frac{PL^2}{8EI} + \frac{R_C L^2}{2EI} = -\frac{PL^2}{8EI} + \frac{5PL^2}{128EI} = -\frac{11PL^2}{128EI}.$$

参考文献

[1] 渋谷陽二・中谷彰宏, 材料力学, (2017), コロナ社。