

2017 年 6 月 25 日 (日)

連載には程遠いたまにしかない講座「かけがえのない材料力学」 ヒンジを持つ固定はり（ゲルバーはり）のたわみ解法に関する考察*1

大阪大学大学院工学研究科

中谷 彰 宏**2

1 はじめに

図 1 に示すようなヒンジを有するはりを考える。ヒンジ部では力学的には曲げモーメントが 0 になり、幾何学的にはたわみ角が不連続になる。このような特徴の物理的な意味を考えて、特異関数を用いる方法やモーメント面積法による方法、あるいはカスチリャーノの定理を用いる方法でどのような扱いになるのかを考えて、諸君に力学に対する理解を深めてもらいたいというのが本稿のねらいである。

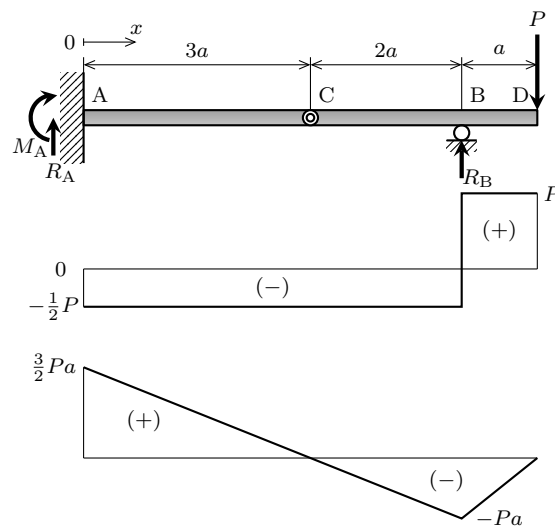


図 1 ヒンジを持つ固定はり（ゲルバーはり）

もし点 C にヒンジがなければ、あるいはヒンジ部に曲げに対する非 0 の剛性があれば不静定問題になる。一方、ヒンジがある場合、ヒンジ部（点 C : $x = 3a$ ）では、曲げモーメント $M(3a) = 0$ であるから、図は静定問題であり、力のつりあいとモーメントのつりあい反力を決定することができる。

$$M_A = \frac{3}{2}Pa, \quad R_A = -\frac{1}{2}P, \quad R_B = \frac{3}{2}P$$

せん断力図 (SFD) と曲げモーメント図 (BMD) を図にあわせて示す。

まず、AB 間について考える。この問題の場合、AB 間で、せん断力 $V(x) = -P/2$ は一定であり、曲げモー

*1 Copyright ©2017 Akihiro Nakatani, Osaka University

*2 Email:nakatani@ams.eng.osaka-u.ac.jp

メント $M(x)$ は

$$M(x) = \frac{P}{2}(3a - x)$$

のように直線状に変化する．この SFD、BMD は、点 B の移動支持を取り除き、点 C のヒンジを取り除いて AD を均質な片持ちはりとし、外力として、点 D に P 、点 B に $-\frac{3}{2}P$ の集中荷重を加えた場合のものに等しい。

このように BMD と SFD が同一であっても、はりの変形形状がさまざまに異なる例があることは材料力学の諸問題では既によくわかっていることであるという前置きをしたうえで、議論を進める。

2 たわみについて

したがって、材料力学の講義では、幾何学的・運動学的条件の重要性を述べる。ヒンジ部（点 C）で、たわみ $y(x)$ は連続であるが、たわみ角 $\theta(x)$ はで不連続になるので、たわみの方程式の積分やモーメント面積法の適用の際には注意が必要であると教える。

一般には AC 間、CB 間で場合分けするのが普通であり、ここではそれらを添字 1、添字 2 をつけて表記するとする．つまり、曲げモーメント分布は、

$$M_1(x) = M_2(x) = \frac{P}{2}(3a - x)$$

のように両区間で全く同一の表式となり、たわみの方程式も

$$EIy_1'' = EIy_2'' = \frac{1}{2}Px - \frac{3}{2}Pa$$

のように両区間で同一の表現になる．しかしその積分の過程では以下のように積分定数を区間ごとに別々の値をとるものとして考える必要がある．

$$\begin{aligned} EIy_1' &= \frac{1}{4}Px^2 - \frac{3}{2}Pax, & EIy_2' &= \frac{1}{4}Px^2 - \frac{3}{2}Pax + C_1 \\ EIy_1 &= \frac{1}{12}Px^3 - \frac{3}{4}Pax^2, & EIy_2 &= \frac{1}{12}Px^3 - \frac{3}{4}Pax^2 + C_1x + C_2 \end{aligned}$$

ただし、点 A ($x = 0$) でのたわみ、たわみ角が $y_A = y_1(0) = 0$, $y_A' = y_1'(0) = 0$ という条件を用いて、AC 間の表式 $y_1(x)$ と、 $y_1'(x)$ の積分定数は最初から 0 としている。

CB 間の表式 $y_2(x)$ と、 $y_2'(x)$ に現れる C_1 と、 C_2 は、点 B ($x = 5a$) でのたわみについて $y_2(5a) = 0$ の条件、および、ヒンジ部（点 C）でたわみが連続 $y_1(3a) = y_2(3a) = 0$ という条件から決定することができる。

問題を最後まで解くには、次に、BD 間について考える．曲げモーメント分布は、

$$M(x) = P(x - 6a)$$

たわみ方程式（添字 3 をつける）は、

$$EIy_3'' = -Px + 6Pa$$

積分し、点 B でのたわみ $y_3(5a) = 0$ と、たわみ角の連続性 $y_2'(5a) = y_3'(5a)$ から、積分定数を決定することができ、最終的に区分多項式の形でたわみ角分布、たわみ曲線を得ることができる．具体的な解析は難しいので、諸君に委ねることとし、本題に入る。

3 ヒンジを持つ固定はり（ゲルバーはり）への特異関数法の適用

外力が作用しないヒンジ部では、たわみは連続、たわみ角は不連続、曲げモーメントは 0（連続）、せん断力は連続である。

AD 間全体のせん断力分布、曲げモーメント分布は

$$V(x) = -\frac{1}{2}P + \frac{3}{2}PH(x-5a)$$

$$M(x) = \frac{3}{2}Pa - \frac{1}{2}Px + \frac{3}{2}P\langle x-5a \rangle$$

点 C でのたわみ角の跳躍量を C とすると、 $y'(x)$ に $CH(x-3a)$ のような項が含まれると考えることができる。この項は、 $y(x)$ には $C\langle x-3a \rangle$ のように連続関数として含まれる*3。このことを考慮すると、たわみの方程式と、その積分によって得られるたわみ角分布の方程式、たわみ曲線の方程式は、

$$EIy''(x) = -\frac{3}{2}Pa + \frac{1}{2}Px - \frac{3}{2}P\langle x-5a \rangle$$

$$EIy'(x) = -\frac{3}{2}Pax + \frac{1}{4}Px^2 + CH(x-3a) - \frac{3}{4}P\langle x-5a \rangle^2$$

$$EIy(x) = -\frac{3}{4}Pax^2 + \frac{1}{12}Px^3 + C\langle x-3a \rangle - \frac{1}{4}P\langle x-5a \rangle^3$$

である。ただし、点 A ($x=0$) でのたわみ、たわみ角が $y_A = y(0) = 0$, $y'_A = y'(0) = 0$ を用いて、 $y'(x)$, $y(x)$ の積分定数は最初から 0 とした。

たわみ角の不連続量 C は、点 B ($x=5a$) で、 $y_B = y(5a) = 0$ という条件

$$-\frac{3}{4}Pa(5a)^2 + \frac{1}{12}P(5a)^3 + C(5a-3a) = 0$$

から決定することができ、

$$C = \frac{25}{6}Pa^2$$

である。したがって、 $\theta(x) = y'(x)$, $y(x)$ は

$$\theta(x) = \frac{P}{EI} \left\{ -\frac{3}{2}ax + \frac{1}{4}x^2 + \frac{25}{6}a^2H(x-3a) - \frac{3}{4}\langle x-5a \rangle^2 \right\}$$

$$y(x) = \frac{P}{EI} \left\{ -\frac{3}{4}ax^2 + \frac{1}{12}x^3 + \frac{25}{6}a^2\langle x-3a \rangle - \frac{1}{4}\langle x-5a \rangle^3 \right\}$$

荷重作用点のたわみ y_D は、

$$y_D = y(6a) = \frac{13Pa^3}{4EI}$$

である。

*3 $y''(x)$ には $C\delta(x-3a)$, すなわち、 $M(x)$ には、 $(-C/EI)\delta(x-3a)$ の形で含まれ、 $V(x)$ には、 $(-C/EI)\delta'(x-3a)$ の形で含まれると考えることもできるが物理的意味はどのようなものになるかを考えてみよう

4 ヒンジを持つ固定はり（ゲルバーはり）へのカスチリアーノの定理の適用

AD 間全体の曲げモーメント分布は,

$$M(x) = \frac{3}{2}Pa - \frac{1}{2}Px + \frac{3}{2}P(x - 5a)$$

である. 表現を簡単にするために, AB 間については, 点 A を原点にして右方向を正に x_1 軸, DB 間については, 点 D を原点にして左方向を正に x_2 軸をとると,

$$\begin{aligned} M_1(x_1) &= \frac{1}{2}P(3a - x_1), & M_2(x_2) &= -Px_2 \\ \frac{\partial M_1}{\partial P} &= \frac{1}{2}(3a - x_1), & \frac{\partial M_2}{\partial P} &= -x_2 \end{aligned}$$

カスチリアーノの定理より, 荷重作用点のたわみ y_D は,

$$\begin{aligned} y_D &= \frac{\partial U_c}{\partial P} = \int_0^{5a} \frac{M_1}{EI} \frac{\partial M_1}{\partial P} dx_1 + \int_0^a \frac{M_2}{EI} \frac{\partial M_2}{\partial P} dx_2 \\ &= \frac{P}{EI} \left\{ \int_0^{5a} \frac{1}{4}(x_1 - 3a)^2 dx_1 + \int_0^a x_2^2 dx_2 \right\} \\ &= \frac{Pa^3}{EI} \left\{ \frac{8}{12} + \frac{27}{12} + \frac{1}{3} \right\} = \frac{13Pa^3}{4EI} \end{aligned}$$

となる. このように, ヒンジ部のたわみ角の不連続条件を陽に考えることなくたわみを求めることができるカスチリアーノの定理がこの問題においては非常に有効であることがわかる.

5 ヒンジを持つ固定はり（ゲルバーはり）へのモーメント面積法の適用

先に「ヒンジ部（点 C）で, たわみ $y(x)$ は連続であるが, たわみ角 $\theta(x)$ はで不連続になるので, たわみの方程式の積分やモーメント面積法の適用の際には注意が必要である」と述べたが, すこしその意味を考えておこう.

実際, ヒンジ部がなく, 曲げ剛性が一定のはりは不静定問題を構成することは先に述べた. ヒンジ部の剛性を徐々に小さくすることをイメージすると, 曲げ剛性 $EI \rightarrow 0$ の極限に対応することは容易に想像できる. このとき, ヒンジ部（点 C: $x = 3a$ ）の曲げモーメント $M(3a) \rightarrow 0$ である. モーメント面積法では, M/EI 線図の面積や面積の一次モーメントの値が, たわみ角やたわみと関係づけられるから, 初見したときに $0/0$ の不定に思える M/EI の極限がどうなるかを考えるとその意味がみえてくる.

つまり, 実は, 特異関数の議論の際に考えた,

$$\frac{M}{EI} \propto \delta(x - 3a)$$

というのはあながち間違いではなく, 0 でもなく無限大でもない有限の $\frac{M}{EI}$ が集中量 $\mathcal{A}_h$ として, $x = 3a$ に局所的に分布していると考えられることができると思える.

つまり, AB 間の曲げモーメント $M(x)$ は

$$M(x) = \frac{P}{2}(3a - x)$$

であるが、 M/EI 線図では、

$$\frac{M}{EI} = \frac{P}{2EI}(3a - x) + \mathcal{A}_h \delta(x - 3a)$$

と表すことができる。

このとき、AB 間に、この M/EI の集中面積分を考慮してモーメント面積法を適用すると、

$$\begin{aligned} \theta_{BA} &= \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_h \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3Pa}{2EI} \right) 3a + \frac{1}{2} \left(-\frac{Pa}{EI} \right) 2a + \mathcal{A}_h = \frac{5Pa^2}{4EI} + \mathcal{A}_h \\ t_{BA} &= \bar{x}_B \mathcal{A} = \bar{x}_{B,1} \mathcal{A}_1 + \bar{x}_{B,2} \mathcal{A}_2 + \bar{x}_{B,h} \mathcal{A}_h \\ &= (4a) \left(\frac{9Pa^2}{4EI} \right) + \left(\frac{2a}{3} \right) \left(-\frac{Pa^2}{EI} \right) + (2a) \mathcal{A}_h = \frac{25Pa^3}{3EI} - (2a) \mathcal{A}_h \end{aligned}$$

点 B のたわみは 0 で、点 A のたわみ角は 0、すなわち点 A の接線は点 B を通るので、 $t_{BA} = 0$ 。よって、

$$\mathcal{A}_h = \frac{25Pa^2}{6EI}$$

を得る。

おわりに

このように、理論や方法自体に限界があるとして諦めるのではなく、問題に対する洞察をより深めることに
より、力学のより深い理解に到達することができることを学んでくれることを切に希望して、本稿を終える。

参考文献

- [1] 渋谷陽二・中谷彰宏，材料力学，(2017)，コロナ社。