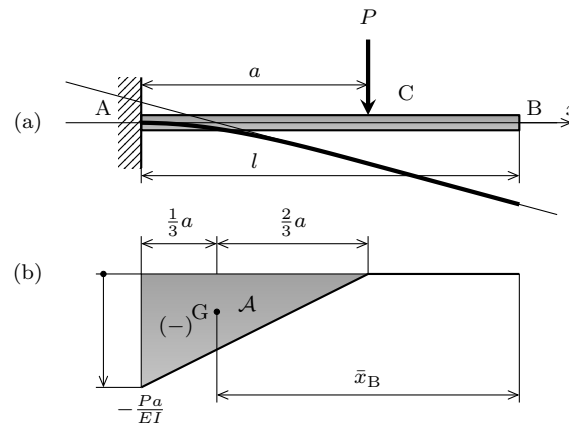


連載には程遠いたまにしかない講座「かけがえのない材料力学」
材力演習 8 の補足^{*1}

大阪大学大学院工学研究科
中 谷 彰 宏^{*2}

[1](a)

力の釣合い、モーメントの釣合いを考えると同時に、せん断力図 (SFD)、曲げモーメント図 (BMD) を描く。教科書 [1] p.111 の例題 6.2 を参照のこと。



以下、 $l = L$, $a = L/2$ の場合について具体的に考える。反力は、

$$R_A = W, \quad M_A = -\frac{WL}{2}.$$

■解 1: モーメント面積法 M/EI 線図 (この場合 EI は一定なので BMD と相似) を描いて AB 間にモーメント面積法を適用する。

M/EI 線図の面積 $\mathcal{A}$ と、点 B から図心までの距離 $\bar{x}_B$ は、

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot \left(-\frac{WL}{2EI} \right) = -\frac{WL^2}{8EI}, \quad \bar{x}_B = \frac{2}{3} \cdot \frac{L}{2} + \frac{L}{2} = \frac{5L}{6}.$$

モーメント面積法により、たわみ曲線上の点 A の接線と点 B の接線のなす角と、点 B の接線たわみ (点 A の接線からみた相対位置) は、

$$\theta_{BA} = \mathcal{A} = -\frac{WL^2}{8EI}, \quad t_{BA} = \bar{x}_B \mathcal{A} = \frac{5L}{6} \cdot \left(-\frac{WL^2}{8EI} \right) = -\frac{5WL^3}{48EI}.$$

したがって、点 B のたわみ角とたわみは、

$$\theta_B = -\theta_{BA} = \frac{WL^2}{8EI}, \quad y_B = \frac{5WL^3}{48EI}.$$

^{*1} Copyright ©2017 Akihiro Nakatani, Osaka University

^{*2} Email: nakatani@ams.eng.osaka-u.ac.jp

■解 2 : 特異関数を用いる方法

$$V(x) = W - W \cdot H\left(x - \frac{L}{2}\right)$$

$$M(x) = Wx - W\left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle$$

たわみの方程式は

$$EIy'' = \frac{WL}{2} - Wx + W\left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle$$

$$EIy' = \frac{WL}{2}x - \frac{W}{2}x^2 + \frac{W}{2}\left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^2$$

$$EIy = \frac{WL}{4}x^2 - \frac{W}{6}x^3 + \frac{W}{6}\left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^3.$$

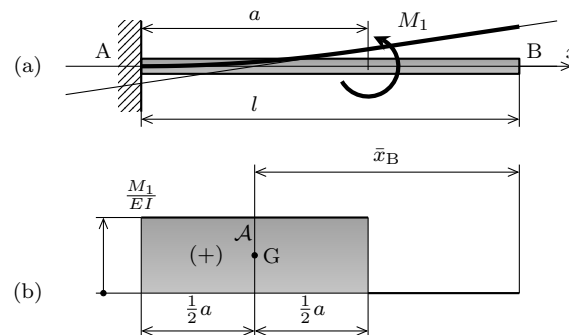
ここで、積分定数は $x = 0$ で $y'(0) = 0$, $y(0) = 0$ より 0.

点 B ($x = L$) のたわみ角とたわみは,

$$\theta_B = y'_B = y'(L) = \frac{WL^2}{8EI}, \quad y_B = y(L) = \frac{5WL^3}{48EI}.$$

[1](b)

力の釣合い、モーメントの釣合いを考えると同時に、せん断力図 (SFD), 曲げモーメント図 (BMD) を描く。



以下, $l = L$, $a = L/2$ の場合について具体的に考える。反力は,

$$R_A = 0, \quad M_A = M.$$

■解 1 : モーメント面積法 M/EI 線図 (この場合 EI は一定なので BMD と相似) を描いて AB 間にモーメント面積法を適用する。

M/EI 線図の面積 A と, 点 B から図心までの距離 $\bar{x}_B$ は,

$$A = \frac{M}{EI} \cdot L = \frac{ML}{EI}, \quad \bar{x}_B = \frac{L}{2}.$$

モーメント面積法により、たわみ曲線上の点 A の接線と点 B の接線のなす角と、点 B の接線たわみ（点 A の接線からみた相対位置）は、

$$\theta_{BA} = \mathcal{A} = \frac{ML}{EI}, \quad t_{BA} = \bar{x}_B \mathcal{A} = \frac{L}{2} \cdot \frac{ML}{EI} = \frac{ML^2}{2EI}.$$

したがって、点 B のたわみ角とたわみは、

$$\theta_B = -\theta_{BA} = -\frac{ML}{EI}, \quad y_B = -t_{BA} = -\frac{ML^2}{2EI}.$$

[1](c)

力の釣合い、モーメントの釣合いを考えると同時に、せん断力図（SFD）、曲げモーメント図（BMD）を描く（図は省略）。

反力は、

$$R_A = \frac{w_0 L}{2}, \quad M_A = -\frac{w_0 L^2}{3}.$$

■解 1：たわみの基礎式からの直接積分 分布荷重は $q(x) = \frac{w_0 x}{L}$ 。たわみの基礎式とその積分は

$$\begin{aligned} EI \frac{d^4 y}{dx^4} &= \frac{w_0 x}{L} \\ EI \frac{d^3 y}{dx^3} &= \frac{w_0 x^2}{2L} + C_1 \\ EI y'' &= \frac{w_0 x^3}{6L} + C_1 x + C_2 \\ EI y' &= \frac{w_0 x^4}{24L} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3 \\ EI y &= \frac{w_0 x^5}{120L} + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4. \end{aligned}$$

点 A ($x = 0$) で、たわみ角とたわみが 0 なので、 $y'(0) = 0$, $y(0) = 0$, すなわち、

$$C_3 = 0, \quad C_4 = 0.$$

点 B ($x = L$) で、せん断力と曲げモーメントが 0 なので、 $\frac{dy^3}{dx^3}(L) = 0$, $y''(L) = 0$, すなわち、

$$\frac{w_0 L}{2} + C_1 = 0, \quad \frac{w_0 L^2}{6} + C_1 L + C_2 = 0 \quad \text{よって,} \quad C_1 = -\frac{w_0 L}{2}, \quad C_2 = \frac{w_0 L^2}{3}.$$

したがって、

$$y' = \frac{w_0 L^3}{EI} \left(\frac{1}{24} \frac{x^4}{L^4} - \frac{1}{4} \frac{x^2}{L^2} + \frac{1}{3} \frac{x}{L} \right), \quad y = \frac{w_0 L^4}{EI} \left(\frac{1}{120} \frac{x^5}{L^5} - \frac{1}{12} \frac{x^3}{L^3} + \frac{1}{6} \frac{x^2}{L^2} \right)$$

点 B ($x = L$) での、たわみ角とたわみは、

$$\theta_B = y'(L) = \frac{w_0 L^3}{8EI}, \quad y_B = y(L) = \frac{11w_0 L^4}{120EI}.$$

■解 2 : たわみの方程式からの直接積分 セン断力分布 $V(x)$, 曲げモーメント分布 $M(x)$ は,

$$V(x) = -\frac{w_0}{2L}x^2 + \frac{w_0L}{2}, \quad M(x) = -\frac{w_0}{6L}x^3 + \frac{w_0L}{2}x - \frac{w_0L^2}{3}.$$

たわみの方程式とその積分は,

$$\begin{aligned} EIy'' &= \frac{w_0}{6L}x^3 - \frac{w_0L}{2}x + \frac{w_0L^2}{3} \\ EIy' &= \frac{w_0}{24L}x^4 - \frac{w_0L}{4}x^2 + \frac{w_0L^2}{3}x + C_1 \\ EIy &= \frac{w_0}{120L}x^5 - \frac{w_0L}{12}x^3 + \frac{w_0L^2}{6}x^2 + C_1x + C_2. \end{aligned}$$

点 A ($x = 0$) で, たわみ角とたわみが 0 なので, $y'(0) = 0$, $y(0) = 0$, すなわち,

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0.$$

したがって,

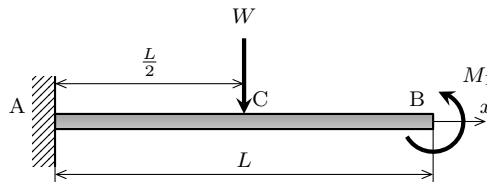
$$y' = \frac{w_0L^3}{EI} \left(\frac{1}{24} \frac{x^4}{L^4} - \frac{1}{4} \frac{x^2}{L^2} + \frac{1}{3} \frac{x}{L} \right), \quad y = \frac{w_0L^4}{EI} \left(\frac{1}{120} \frac{x^5}{L^5} - \frac{1}{12} \frac{x^3}{L^3} + \frac{1}{6} \frac{x^2}{L^2} \right).$$

点 B ($x = L$) での, たわみ角とたわみは,

$$\theta_B = y'(L) = \frac{w_0L^3}{8EI}, \quad y_B = y(L) = \frac{11w_0L^4}{120EI}.$$

[1](d)

図に示す問題。



重ね合わせの原理より, (a) と (b) の解を重ね合わせると,

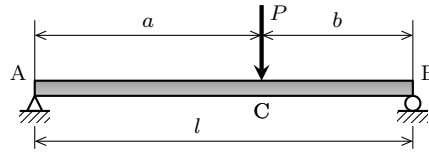
$$\theta_B = \theta_B^{(a)} + \theta_B^{(b)} = \frac{L}{EI} \left(\frac{WL}{8} - M \right), \quad y_B = y_B^{(a)} + y_B^{(b)} = \frac{L^2}{EI} \left(\frac{5WL}{48} - \frac{M}{2} \right).$$

[2](e)

力の釣合い, モーメントの釣合いを考えると同時に, セン断力図 (SFD), 曲げモーメント図 (BMD) を描く (図は省略)。教科書 p.113 の例題 6.4 を参照のこと。

以下, $l = L$, $a = L/4$, $b = 3L/4$ について具体的に考える。反力は,

$$R_A = \frac{3W}{4}, \quad R_B = \frac{W}{4}.$$



■解 1：特異関数を用いる方法

$$V(x) = \frac{3}{4}W - W \cdot H\left(x - \frac{L}{4}\right)$$

$$M(x) = \frac{3}{4}Wx - W\left\langle x - \frac{L}{4} \right\rangle$$

たわみの方程式とその積分は,

$$EIy'' = -\frac{3}{4}Wx + W\left\langle x - \frac{L}{4} \right\rangle$$

$$EIy' = -\frac{3}{8}Wx^2 + \frac{W}{2}\left\langle x - \frac{L}{4} \right\rangle^2 + C_1$$

$$EIy = -\frac{1}{8}Wx^3 + \frac{W}{6}\left\langle x - \frac{L}{4} \right\rangle^3 + C_1x + C_2$$

ここで, $x = 0$ で $y(0) = 0$ より $C_2 = 0$. また, $x = L$ で $y(L) = 0$ より,

$$-\frac{1}{8}WL^2 + \frac{1}{6}W\left(L - \frac{L}{4}\right)^3 + C_1L = 0, \quad C_1 = \frac{7}{128}WL^2.$$

点 C($x = L/4$) のたわみ角とたわみは,

$$\theta_C = y'_C = y'(L/4) = \frac{WL^2}{32EI}, \quad y_C = y(L/4) = \frac{3WL^3}{256EI}.$$

この例のように, 特異関数の表現は, 表記を単純にするだけでなく, 決定すべき積分定数の個数を減らすことができる利点があることに気づくだろう。

■解 2：カスチリアーノの定理を用いる方法^{*3} 前掲のモーメント分布

$$M(x) = \frac{3}{4}Wx - W\left\langle x - \frac{L}{4} \right\rangle$$

を, AC 間 (A を原点にして右向きに x , $0 < x < \frac{L}{4}$), BC 間 (B を原点にして左向きに x_2 , $0 < x_2 < \frac{3L}{4}$) を考える。^{*4}

$$M(x) = \frac{3}{4}Wx \quad (\text{AC 間}), \quad M(x_2) = \frac{1}{4}Wx_2 \quad (\text{BC 間})$$

W による偏微分は,

$$\frac{\partial M}{\partial W} = \frac{3}{4}x \quad (\text{AC 間}), \quad \frac{\partial M}{\partial W} = \frac{1}{4}x_2 \quad (\text{BC 間}).$$

^{*3} 授業ではもうすぐ (12 章で) 講義します。

^{*4} 座標のとりかたを変える必要は必ずしもないが, この方が計算が楽

荷重 W の作用点 C のたわみは、カスチリアーノの定理により、

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{\partial U_c}{\partial W} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial W} dx = \int_0^{L/4} \frac{1}{EI} \cdot \frac{3}{4} Wx \cdot \frac{3}{4} x dx + \int_0^{3L/4} \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{4} Wx_2 \cdot \frac{1}{4} x_2 dx_2 \\ &= \frac{W}{EI} \frac{9}{16} \frac{1}{3} \left(\frac{L}{4}\right)^3 + \frac{W}{EI} \frac{1}{16} \frac{1}{3} \left(\frac{3L}{4}\right)^3 = \frac{3WL^3}{256EI}. \end{aligned}$$

点 C に仮想的に加えた時計回りのモーメント M_1 による曲げモーメント分布 M^* は、

$$M^*(x) = -\frac{M_1}{L}x \quad (\text{AC 間}), \quad M^*(x_2) = \frac{M_1}{L}x_2 \quad (\text{BC 間}).$$

M_1 により偏微分し、 $M_1 = 0$ とおくと*5、

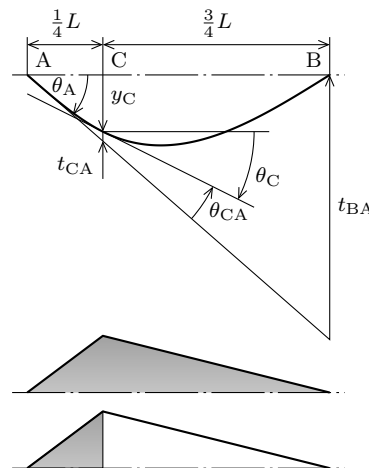
$$\left. \frac{\partial M^*}{\partial M_1} \right|_{M_1=0} = -\frac{1}{L}x \quad (\text{AC 間}), \quad \left. \frac{\partial M^*}{\partial M_1} \right|_{M_1=0} = \frac{1}{L}x_2 \quad (\text{BC 間}).$$

モーメント M_1 の作用点 C のたわみ角は、カスチリアーノの定理により、

$$\begin{aligned} \theta_C &= \left. \frac{\partial U_c}{\partial M_1} \right|_{M_1=0} = \int_0^L \frac{M}{EI} \left. \frac{\partial M^*}{\partial M_1} \right|_{M_1=0} dx \\ &= \int_0^{L/4} \frac{1}{EI} \cdot \frac{3}{4} Wx \cdot \left(-\frac{1}{L}x\right) dx + \int_0^{3L/4} \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{4} Wx_2 \cdot \frac{1}{L}x_2 dx_2 \\ &= -\frac{W}{EIL} \frac{3}{4} \frac{1}{3} \left(\frac{L}{4}\right)^3 + \frac{W}{EIL} \frac{1}{4} \frac{1}{3} \left(\frac{3L}{4}\right)^3 = \frac{WL^2}{32EI}. \end{aligned}$$

■解3：むりやりモーメント面積法を用いる方法 (2017/6/27 追記) たわみ曲線やたわみ角分布は、本質的にたわみ方程式の解、つまり積分であり、任意点の値は、定積分に対応するので、原理的には、モーメント面積法を適用することができる。そして、適用区間を変えた2パターンについてモーメント面積法を使えば、たいていの問題の解を得ることができる*6

以下、 $l = L$, $a = L/4$, $b = 3L/4$ について具体的に考える (図を参照)。



*5 ここでは、偏微分した段階で定数なのでそのままでも同じ。

*6 他の解法に比べて有利かどうか、一般的かどうかは人に依るレベルの煩雑さですので、中谷的にはイチオシではない。むりやり感満載だが、やってみよう。

M/EI 図を, AC 間, CB 間の 2 領域に分けて考える。それぞれに 1, 2 の添字をつけて表記する。

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{3PL}{16EI} \right) \frac{L}{4} = \frac{3}{128} \frac{PL^2}{EI}, \quad \mathcal{A}_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{3PL}{16EI} \right) \frac{3L}{4} = \frac{9}{128} \frac{PL^2}{EI}.$$

まず, AB 間にモーメント面積法を適用すると,

$$\bar{x}_{A1} = \frac{1}{6}L, \quad \bar{x}_{A2} = \frac{1}{2}L, \quad \bar{x}_{B1} = \frac{5}{6}L, \quad \bar{x}_{B2} = \frac{1}{2}L.$$

t_{BA} (点 A の接線を基準とした点 B の接線たわみ) は,

$$t_{BA} = \mathcal{A}_1 \bar{x}_{B1} + \mathcal{A}_2 \bar{x}_{B2} = \frac{PL^3}{EI} \left(\frac{3}{128} \cdot \frac{5}{6} + \frac{9}{128} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{7PL^3}{128EI}$$

点 A, 点 B のたわみは 0 なので, 点 A のたわみ角 θ_A は,

$$\theta_A = \frac{t_{BA}}{L} = \frac{7PL^2}{128EI}.$$

次に, AC 間にモーメント面積法を適用すると,

$$\bar{x}_{A1} = \frac{1}{6}L, \quad \bar{x}_{C1} = \frac{1}{12}L.$$

t_{CA} (点 A の接線を基準とした点 C の接線たわみ) は,

$$t_{CA} = \bar{x}_{C1} \mathcal{A}_1 = \frac{1}{12}L \cdot \frac{3}{128} \frac{PL^2}{EI} = \frac{1}{512} \frac{PL^3}{EI}.$$

点 C のたわみ y_C は, $(AC)/(AB) = 1/4$ あるいは, $(AC) = L/4$ であることを利用して,

$$y_C = t_{BA} \cdot \frac{1}{4} - t_{CA} = \theta_A \cdot \frac{L}{4} - t_{CA} = \frac{PL^3}{EI} \left(\frac{7}{128} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{512} \right) = \frac{3}{256} \frac{PL^3}{EI}.$$

点 C のたわみ角 θ_C は, $\theta_{CA} = \mathcal{A}_1$ を利用して,

$$\theta_C = \theta_A - \theta_{CA} = \frac{PL^2}{EI} \left(\frac{7}{128} - \frac{3}{128} \right) = \frac{PL^2}{32EI}.$$

このような問題では, モーメント面積法が“効率的”かどうかは意見がわかれると思う。ただし, 教科書 p.127 例題 6.9 に示すように, 最大たわみの発生位置とそのたわみの値を求める場合などには, 有効であることは誰しもが思うのではないだろうか。

参考文献

- [1] 渋谷陽二・中谷彰宏, 材料力学, (2017), コロナ社。