

# 連載には程遠いたまにしかない講座「かけがえのない材料力学」 はりのたわみの種々の解法の基礎<sup>\*1</sup>

大阪大学大学院工学研究科  
中谷 彰 宏<sup>\*2</sup>

## 1 はじめに

図 1 に示すような、固定端と自由端の中間に集中荷重を受ける片持はりの問題（教科書 p.111, 例題 6.2）を復習してみよう。

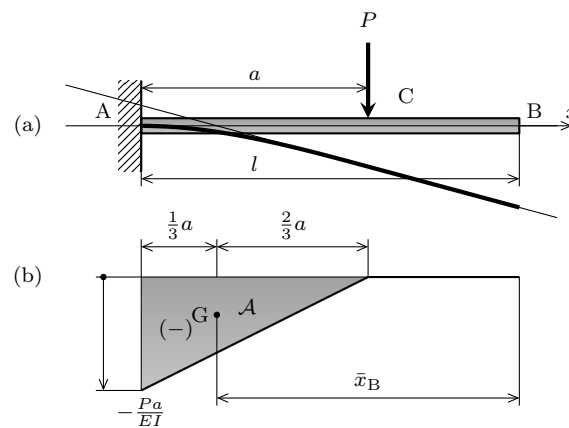


図 1 固定端と自由端の中間に集中荷重を受ける片持はり

AC, CB 間についてそれぞれ, 添字 1, 2 をつけて場合分け考える。

AC

$$(0 < x < a)$$

$$V_1(x) = P$$

$$M_1(x) = P(x - a)$$

$$EIy_1'' = -Px + Pa$$

$$EIy_1' = -\frac{P}{2}x^2 + Pax + C_1$$

$$EIy_1 = -\frac{P}{6}x^3 + \frac{P}{2}ax^2 + C_1x + C_2$$

CB

$$(a < x < l)$$

$$V_2(x) = 0$$

$$M_2(x) = 0$$

$$EIy_2'' = 0$$

$$EIy_2' = C_3$$

$$EIy_2 = C_3x + C_4$$

点 A の境界条件 ( $y_1(0) = 0$ ,  $y_1'(0) = 0$ ) より

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0$$

<sup>\*1</sup> Copyright ©2017 Akihiro Nakatani, Osaka University

<sup>\*2</sup> Email: nakatani@ams.eng.osaka-u.ac.jp

点 C で、たわみ角とたわみが連続となる条件 ( $y_1(a) = y_2(a)$ ,  $y_1'(a) = y_2'(a)$ ) より,

$$C_3 = \frac{Pa^2}{2}, \quad C_4 = -\frac{Pa^3}{6}$$

## 2 特異関数を用いた解法

特異関数の一覧を図 2 に示す。

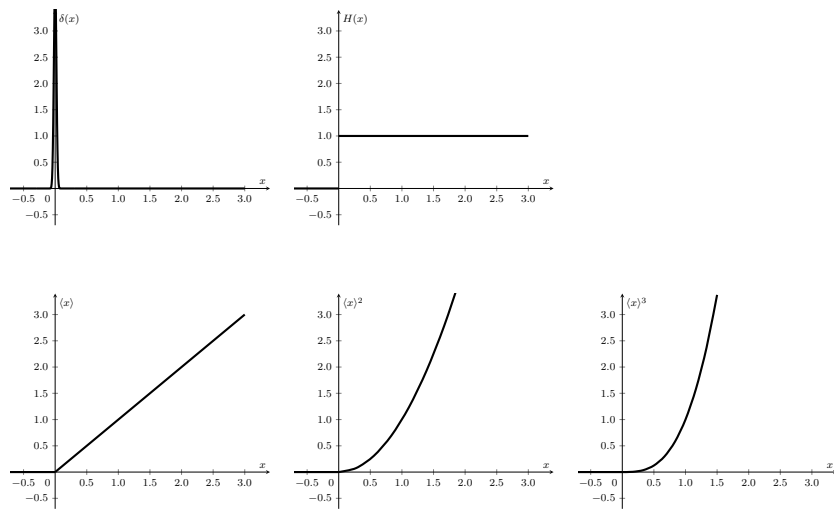


図 2 特異関数のグラフの一覧

図 1 に示すような、固定端と自由端の間に集中荷重を受ける片持はりの問題（教科書 p.111, 例題 6.2）を特異関数を用いて表現すると

$$V(x) = P - PH(x - a)$$

$$M(x) = -Pa + Px - P\langle x - a \rangle$$

$$\frac{EI}{P} y_1'' = a - x + \langle x - a \rangle$$

$$\frac{EI}{P} y_1' = ax - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\langle x - a \rangle^2 + C_1$$

$$\frac{EI}{P} y_1 = \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}\langle x - a \rangle^3 + C_1x + C_2$$

点 A の境界条件 ( $y_1(0) = 0$ ,  $y_1'(0) = 0$ ) より

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0$$

反力,  $M_A = Pa$ ,  $R_A = P$  なので

$$V(x) = -Pa\delta(x) + PH(x) - PH(x - a)$$

$$M(x) = -PaH(x) + P\langle x \rangle - P\langle x - a \rangle$$

のように議論を出発してもよいが、結局  $0 < x < l$  では、

$$\delta(x) = 0, \quad H(x) = 1, \quad \langle x \rangle = x$$

なので,

$$\begin{aligned} V(x) &= P - PH(x-a) \\ M(x) &= -Pa + Px - P\langle x-a \rangle \end{aligned}$$

と書き直すことができる。

### 3 モーメント面積法の利用

図 1 に示すような、固定端と自由端の間に集中荷重を受ける片持はりの問題（教科書 p.111, 例題 6.2）では、固定端のたわみ角とたわみが 0 であり、曲げモーメント線図に描かれるグラフの面積や図心位置は容易に求めることが可能なので、モーメント面積法を用いてたわみやたわみ角を求めることができる。

$M/EI$  線図を描き、AB 間にモーメント面積法を用いると

$$\begin{aligned} \theta_{BA} &= \mathcal{A} = \frac{1}{2} \left( -\frac{Pa}{EI} \right) a = -\frac{Pa^2}{2EI}, \\ t_{BA} &= \bar{x}_B \mathcal{A} = \left\{ (l-a) + \frac{2}{3}a \right\} \left( -\frac{Pa^2}{2EI} \right) = -\frac{Pa^2}{6EI} (3l-a) \end{aligned}$$

点 A は固定支持 ( $y_A = 0$ ,  $\theta_A = 0$ ) であることを考慮すると、  
点 B のたわみ角とたわみは、

$$\theta_B = -\theta_{BA} = \frac{Pa^2}{2EI}, \quad y_B = -t_{BA} = \frac{Pa^2}{6EI} (3l-a)$$

### 4 はりの中間にモーメントが作用する問題の特異関数を用いた解についての考察

(1)  $x = a$  にモーメント  $M_0$  が作用するはり

$$\begin{aligned} q(x) &= -M_0 \delta'(x-a) \\ V(x) &= M_0 \delta(x-a) \\ M(x) &= M_0 H(x-a) \end{aligned}$$

$H(x)$ ,  $\delta(x)$  あたりまではイメージしやすいが、 $\delta'(x)$  のイメージは湧きにくい。そもそも、曲げモーメント分布に不連続を生じさせるモーメントに対応する分布荷重を想像しにくい。例えば、以下のように考えてみよう。

(2)  $x = a - c$  に上向き、 $x = a + c$  に上向きに、集中力  $P = M_0/(2c)$  が作用するはり

$$\begin{aligned} q(x) &= -\frac{M_0}{2c} \{ \delta(x - (a-c)) - \delta(x - (a+c)) \} \\ V(x) &= \frac{M_0}{2c} \{ H(x - (a-c)) - H(x - (a+c)) \} \\ M(x) &= \frac{M_0}{2c} \{ \langle x - (a-c) \rangle - \langle x - (a+c) \rangle \} \end{aligned}$$

(3)  $a - c < x < a$  に上向き,  $a < x < a + c$  に下向きに, 分布力  $q = M_0/c^2$  が作用するはり

$$q(x) = -\frac{M_0}{c^2} \{H(x - (a - c)) - 2H(x - a) + H(x - (a + c))\}$$

$$V(x) = \frac{M_0}{c^2} \{\langle x - (a - c) \rangle - 2\langle x - a \rangle + \langle x - (a + c) \rangle\}$$

$$M(x) = \frac{M_0}{2c^2} \{\langle x - (a - c) \rangle^2 - 2\langle x - a \rangle^2 + \langle x - (a + c) \rangle^2\}$$

(2), (3) において,  $M_0$  を一定に保ったまま  $c \rightarrow 0$  の極限を考えると (1) になりそうということがわかる。

## 参考文献

[1] 渋谷陽二・中谷彰宏, 材料力学, (2017), コロナ社。