質問があった問題へのヒント

2006.7.26 AN

【1】 u(x,y) に対する偏微分方程式を解きなさい.

$$u_{xy} + yu_x = 0 \tag{1}$$

ただし,

$$u(x,x) = x^2, \quad u_x(x,x) = u_y(x,x) \tag{2}$$

とする．(マイベルク／ファヘンアウア工科系の数学 8 偏微分方程式，変分法，及川正行訳，サイエンス社, p.7, 1.b))

$$u_{xy} + yu_x = (u_y + yu)_x = 0 \tag{3}$$

ゆえに,

$$u_y + yu = F(y) \tag{4}$$

一方，$u(x,x) = x^2, u_y(x,x) = u_x(x,x) = 2x$ より,

$$F(x) = 2x + x^3 \tag{5}$$

である．よって,

$$u_y + yu = 2y + y^3 \tag{6}$$

両辺に，$e^{\int y dy} \left(= e^{\frac{1}{2}y^2}\right)$ をかけると

$$u_y e^{\frac{1}{2}y^2} + yue^{\frac{1}{2}y^2} = (2y + y^3)e^{\frac{1}{2}y^2} \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(ue^{\frac{1}{2}y^2}) = (2y + y^3)e^{\frac{1}{2}y^2} \tag{8}$$

$$ue^{\frac{1}{2}y^2} = \int (2y + y^3)e^{\frac{1}{2}y^2} dy + G(x) \tag{9}$$

$$u = -1 + y^2 + e^{-\frac{1}{2}y^2} G(x) \tag{10}$$

$u(x,x) = x^2$ より，$G(x) = e^{\frac{1}{2}x^2}$

$$u = e^{\frac{1}{2}(x^2 - y^2)} + y^2 - 1 \tag{11}$$

【2】 関数 $u(x,y)$ に対して，任意関数を消去して一階の偏微分方程式を見つけなさい.

$$F\left(u, \frac{xy}{u}\right) = 0.$$

ただし，$F(\cdot,\cdot)$ は任意関数.

答えはいくつもあり得る．陽関数 $u = u(x,y)$ の陰関数表現が，$f(x,y,u) = 0$ であるとき，陰関数定理により,

$$u_x = -f_x/f_u, \quad u_y = -f_y/f_u \tag{12}$$

が成立する．いま，$F(\alpha,\beta)=0$ に対して，$a \equiv= \partial F/\partial\alpha, b \equiv= \partial F/\partial\beta$ とおく．

$$u_x = -\frac{F_x}{F_u} = -\frac{\frac{y}{u}b}{a-\frac{1}{u^2}b} = -\frac{yub}{u^2a-b} \tag{13}$$

$$u_y = -\frac{F_y}{F_u} = -\frac{\frac{x}{u}b}{a-\frac{1}{u^2}b} = -\frac{xub}{u^2a-b} \tag{14}$$

b/a を等置して，整理すると，

$$-xu_x + yu_y = 0 \tag{15}$$

を得る．

【3】 未知関数 $u(x,y)$ に関する偏微分方程式

$$x^2u_x - xyu_y = -y^2$$

に対して以下の問いに答えなさい．

(1) 一般解を求めなさい．

(2) パラメーター η に対して，$x=1, y=\eta, u=0$ で表される曲線を通 る解 (コーシー問題の解) を求めなさい．

---

(1)

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{-xy} = \frac{du}{-y^2}(=d\xi) \tag{16}$$

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{-xy} \tag{17}$$

から，

$$xy = \alpha \tag{18}$$

を得る．ただし，α は任意定数．

$$\frac{dy}{-xy} = \frac{du}{-y^2} \tag{19}$$

で，$xy=\alpha$ と置くと，

$$\frac{dy}{\alpha} = \frac{du}{y^2} \tag{20}$$

$$\alpha u - \frac{y^3}{3} = \beta' \tag{21}$$

$\alpha = xy$ を代入して

$$u - \frac{y^2}{3x} = \beta \tag{22}$$

ただし，$\beta = \beta'/\alpha$ は任意定数．したがって，一般解，

$$F\left(u - \frac{y^2}{3x},\ xy\right) = 0 \tag{23}$$

あるいは,

$$u = \frac{y^2}{3x} + f(xy) \tag{24}$$

を得る．ここで，F, f は任意関数である．

(2) $x = 1, y = \eta, u = 0$ を一般解に代入すると,

$$0 = \frac{\eta^2}{3} + f(\eta) \tag{25}$$

$$f(\eta) = -\frac{\eta^2}{3} \tag{26}$$

よって,

$$u = \frac{y^2}{3x} - \frac{y^2}{3} \tag{27}$$

から,

$$u = \frac{y^2}{3}\left(\frac{1}{x} - x^2\right) \tag{28}$$

を得る．

これは，特性方程式,

$$\frac{dx}{d\xi} = x^2, \quad \frac{dy}{d\xi} = -xy, \quad \frac{du}{d\xi} = -y^2 \tag{29}$$

を，初期条件,

$$x(0, \eta) = 1, \quad y(0, \eta) = \eta, \quad u(0, \eta) = 0 \tag{30}$$

の下で解くことによって直接的に得られる．

$$\frac{dx}{d\xi} = x^2 \tag{31}$$

から,

$$-\frac{1}{x} = \xi + C_1 \tag{32}$$

ただし，C_1 は任意定数．$x(0, \eta) = 1$ より，$C_1 = 1$ なので,

$$-\frac{1}{x} = \xi + 1 \tag{33}$$

$$x = -\frac{1}{\xi + 1} \tag{34}$$

さらに,

$$\frac{dy}{d\xi} = -xy \tag{35}$$

$$\frac{dy}{d\xi} = \frac{y}{\xi + 1} \tag{36}$$

ゆえに,

$$y = C_2(\xi + 1) \tag{37}$$

ここで，$y(0,\eta)=\eta$ より，$C_2=\eta$

$$y=\eta(\xi+1) \tag{38}$$

さらに，

$$\frac{du}{d\xi}=-y^2 \tag{39}$$

$$\frac{du}{d\xi}=-\eta^2(\xi+1)^2 \tag{40}$$

$$u=-\frac{\eta^2}{3}(\xi+1)^3+C_3 \tag{41}$$

$u(0,\eta)=0$ より，$C_3=-\frac{\eta^2}{3}$

$$u=-\frac{\eta^2}{3}((\xi+1)^3+1) \tag{42}$$

$\xi+1=-1/x, \eta=-xy$ より，

$$u=-\frac{(-xy)^2}{3}\left(\left(-\frac{1}{x}\right)^3+1\right) \tag{43}$$

$$u=\frac{y^2}{3}\left(\frac{1}{x}-x^2\right) \tag{44}$$

となり，同じ答えを得る．