応用数学 I (偏微分方程式)2008 年度の演習

2008.7.15 AN

2008.5.27

【1】未知関数 $u(x,y)$ に関する次の偏微分方程式の一般解を求めなさい.

(1) $yuu_x + xyu_y = xy$

(2) $u_x + 3u_y = 5e^{2x+y}$

(3) $u_x + 2u_y + u = xy$

(4) $xu_x + yu_y = 2xy$

2008.6.24

【2】$u(x,y)$ に対する偏微分方程式,

$$u_x + uu_y = 0$$

について以下の問に答えなさい.

(1) 一般解を求めなさい.

(2) 完全解を求めなさい.

(3) (2) で得られた完全解から, (1) で得られた一般解が導かれることを示しなさい.

【3】次の $u(x,y)$ に対する偏微分方程式

$$u = px+qy+\phi(p,q) \qquad \text{(ただし, } p = u_x,\ q = u_y \text{で,} \phi \text{はある与えられた関数)}$$

について以下の問に答えなさい.

(1) $u = \alpha x + \beta y + \phi(\alpha, \beta)$ は, 完全解であることを示しなさい (ただし, α, β は定数パラメーター).

(2) $\phi(p,q) = 0$ の場合について, 問 (1) の結果を利用して得た完全解から, 一般解 (任意関数を含む形) を導きなさい.

応用数学 I (偏微分方程式)2008 年度の演習の略解例とヒント

2008.7.15 AN

【1】(1)

$$\frac{dx}{yu} = \frac{dy}{xy} = \frac{du}{xy}$$

$$y - u = \alpha, \qquad x^2 - u^2 = \beta$$

$$F(y - u, x^2 - u^2) = 0$$

(2)

$$dx = \frac{dy}{3} = \frac{du}{5e^{2x+y}}$$

$$3x - y = \alpha$$

$$\frac{du}{dx} = 5e^{2x+y} = 5e^{5x-\alpha}$$

$$u - e^{5x-\alpha} = u - e^{2x+y} = \beta$$

$$F(3x - y, u - e^{2x+y}) = 0, \qquad u = e^{2x+y} + f(3x - y)$$

(3) 講義中に示した.

(4)

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{2xy}$$

$$\frac{y}{x} = \alpha$$

$$du = 2y dx = 2\alpha x dx$$

$$u - \alpha x^2 = u - xy = \beta$$

$$F\left(\frac{y}{x}, u - xy\right) = 0, \qquad u = xy + f\left(\frac{y}{x}\right)$$

ただし，いずれも，$F()$, $f()$ は任意関数.

【2】(1)

$$dx = \frac{dy}{u}, \qquad du = 0$$

$$u = \alpha$$

$$dy = u\,dx = \alpha\,dx$$

$$y - \alpha x = y - ux = \beta$$

$$F(u, y - ux) = 0$$

(2) 変数分離

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

により，

$$u(x,y) = \frac{y+\beta}{x+\alpha}$$

を導く方法については，2007 年度の演習で示した．ここでは，$p = u_x$, $q = u_y$ について，

$$F(x(\xi), y(\xi), u(\xi), p(\xi), q(\xi)) = 0$$

を満たす特性微分方程式,

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{du}{pF_p + qF_q} = -\frac{dp}{F_x + pF_u} = -\frac{dq}{F_y + qF_u} = d\xi$$

を出発点とし，完全解（独立変数と同数のパラメーターを含む解）を見つける．

$$F(u,p,q) \equiv p + uq = 0$$

とすると，

$$-\frac{dp}{F_x + pF_u} = -\frac{dq}{F_y + qF_u}$$

から，

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$$

$$p = \alpha^* q$$

ここで，α^* はパラメーター．一方，

$$F(u,p,q) = p + uq = (u + \alpha^*)q = 0$$

より，通常は，q が u と α^* を変数に持つ関数として表されるが，ここでは，$q \neq 0$ であるためには，

$$u = -\alpha^*$$

でなければならない．また，このとき，q は α^* とは独立に任意パラメーター β^* を用いて，

$$q = \beta^*$$

と書くことができる．

$$du = pdx + qdy = \alpha^* \beta^* dx + \beta^* dy$$

積分して，

$$u = \alpha^* \beta^* x + \beta^* y + \gamma$$

$\alpha^* = -u$ より，

$$u = \frac{\beta^* y + \gamma}{\beta^* x + 1} = \frac{y + \gamma/\beta^*}{x + 1/\beta^*}$$

このままでもよいが，$\beta = \gamma/\beta^*$, $\alpha = 1/\beta^*$ と置きなおすと，

$$u(x, y) = \frac{y + \beta}{x + \alpha}$$

を得る．

(3)

$$\alpha \equiv w(\beta)$$

$$u(x, y) - \frac{y + \beta}{x + w(\beta)} = 0$$

$$\frac{\partial [\{x + w(\beta)\} u(x, y) - (y + \beta)]}{\partial \beta} = w'(\beta) u - 1 = 0$$

したがって，

$$u = w'(\beta) \equiv g(\beta)$$

逆に，

$$\beta \equiv G(u)$$

$$ux - y = uw(G(u)) + G(u) \equiv f(u)$$

$$F(u, ux - y) = 0$$