応用数学 I(偏微分方程式) 演習

2006.7.18 AN

【1】未知関数 $u(x,y)$ に関する偏微分方程式

$$xu_x + yu_y = 2u$$

に対して以下の問いに答えなさい.

(1) 一般解を求めなさい.

(2) 初期条件として，直線 $x = s,\ y = 1$ 上で初期値 $u = s^2$ が与えられている時，この初期値問題の解を求めなさい.

【2】未知関数 $u(x,y)$ に関する偏微分方程式

$$u_x + u_y = u^2$$

に対して以下の問いに答えなさい.

(1) 一般解を求めなさい.

(2) パラメーター η に対して，$x = \eta,\ y = -\eta,\ u = \eta$ で表される曲線を通る解 (コーシー問題の解) を求めなさい.

【3】未知関数 $u(x,y)$ に関する偏微分方程式

$$u_x + uu_y = 0$$

に対して以下の問いに答えなさい.

(1) 特性曲線の方程式を考えることにより，一般解を求めなさい.

(2) 変数分離形 $u(x,y) = X(x)Y(y)$ とおくことにより，完全解 $u(x,y) = (y+\alpha)/(x+\beta)$ を導きなさい．ただし，$X(x),\ Y(y)$ は，それぞれ，$x,\ y$ のみの関数であり，$\alpha,\ \beta$ はともに任意定数である.

(3) (2) の完全解に対して，$\beta = w(\alpha)$ とおいて，α をパラメーターとする包絡面を考えると (1) で求めた一般解が導かれることを示しなさい．ただし，$w(\alpha)$ は，α の任意関数である.

(以　上)

応用数学 I(偏微分方程式) 演習略解

2007.7.10 AN

【1】(1) 特性曲線の方程式

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{2u} = d\xi$$

から，独立な積分

$$\frac{y}{x} = \alpha, \qquad \frac{u}{x^2} = \beta$$

を得るので，一般解,

$$u = x^2 f\left(\frac{y}{x}\right)$$

を得る.

(2) $x = s, y = 1, u = s^2$ を (1) で得られた一般解に代入すると,

$$s^2 = s^2 f\left(\frac{1}{s}\right)$$

したがって,

$$f\left(\frac{1}{s}\right) = 1$$

よって,

$$u = x^2.$$

【2】(1) 特性曲線の方程式

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{u^2}$$

から，独立な積分

$$x - y = \alpha, \qquad x = -\frac{1}{u} + \beta$$

を得るので，一般解,

$$u = \frac{1}{G(x-y) - x}$$

を得る.

(2) $x = \eta, y = -\eta, u = \eta$ を (1) で得られた一般解に代入すると,

$$\eta = \frac{1}{G(2\eta) - \eta}$$

したがって,

$$G(\eta) = \frac{1}{\eta}\left(\frac{\eta^2}{2} + 2\right)$$

よって,

$$u = \frac{1}{\dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{(x-y)^2}{2} + 2\right) - x}$$

$$u = \frac{2(x-y)}{4 - x^2 + y^2}$$

【3】(1)　特性曲線の方程式

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{u}, \quad du = 0$$

から，独立な積分

$$u = \alpha, \qquad y - ux = \beta$$

を得るので，一般解,

$$F(u, y - ux) = 0$$

を得る.

(2)

$$u = X(x)Y(y)$$

$$X'(x)Y(y) + \{X(x)\}^2 Y(y)Y'(y) = 0$$

$$\frac{X'(x)}{\{X(x)\}^2} = -Y'(y) = -\lambda$$

$$\frac{1}{X(x)} = \lambda x + \beta^*, \quad X(x) = \frac{1}{\lambda x + \beta^*} = \frac{1}{\lambda(x+\beta)}$$

$$Y(y) = \lambda y + \alpha^* = \lambda(y + \alpha)$$

$$u = XY = \frac{y+\alpha}{x+\beta}$$

(3)　$\beta = w(\alpha)$ とおく,

$$u = \frac{y+\alpha}{x+w(\alpha)}$$

$$0 = \frac{(x+w(\alpha)) - (y+\alpha)w'(\alpha)}{(x+w(\alpha))^2}$$

$$\frac{1}{x+w(\alpha)}(1 - uw'(\alpha)) = 0$$

したがって,

$$\alpha = g(u)$$

代入すると

$$xu + uw(g(u)) = y + g(u)$$

$$y - ux = f(u)$$