

応用数学Ⅰ(偏微分方程式) 演習

2006.7.18 AN

- 【1】 以下の (1), (2) それぞれを満たす関数 $u(x, y)$ に対して, 任意関数を消去して一階の偏微分方程式を見つけなさい.

(1)

$$u = x + y + f(xy).$$

ただし, $f(\cdot)$ は任意関数.

(2)

$$F\left(u, \frac{xy}{u}\right) = 0.$$

ただし, $F(\cdot, \cdot)$ は任意関数.

- 【2】 2 個の独立変数 x, y の未知関数 $u = u(x, y)$ と, $v = v(x, y)$ が, 次の 1 階連立偏微分方程式をみたすとき, $u(x, y), v(x, y)$ を求めなさい.

$$\begin{cases} u_x + v_y = 0 \\ v_x = 0 \end{cases}$$

ただし,

$$u(0, y) = y, \quad v(0, y) = y^2$$

- 【3】 未知関数 $u(x, y)$ に関する偏微分方程式

$$x^2 u_x - xy u_y = -y^2$$

に対して以下の問いに答えなさい.

(1) 一般解を求めなさい.

(2) パラメーター η に対して, $x = 1, y = \eta, u = 0$ で表される曲線を通る解 (コーシー問題の解) を求めなさい.

- 【4】 2 個の独立変数 x, y の未知関数 $u = u(x, y)$ に対する, 2 階偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

が, 双曲型, 放物型, 楕円型となる領域を $x - y$ 平面に図示しなさい。

- 【5】 2 個の独立変数 x, t の未知関数 $u = u(x, t)$ に対する, 2 階偏微分方程式 (P.D.E.), 初期条件 (I.C.), 境界条件 (B.C.) を, それぞれ,

$$\text{P.D.E. : } u_t - u_{xx} + u = 0, \quad (0 < x < 1, 0 < t < \infty)$$

$$\text{I.C. : } u(x, 0) = \sin(\pi x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$\text{B.C. : } u(0, t) = 0, u(1, t) = 0 \quad (0 < t < \infty)$$

とする. $u(x, t) = e^{-t}v(x, t)$ と置くことにより, $v(x, t)$ に対する P.D.E, I.C, B.C を求め, 解を求めなさい.

(以 上)