応用数学 I(A. 偏微分方程式) 演習問題 1

9/19/2001　中谷 彰宏

1. (1) 恒等式

$$\nabla \cdot (u\nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u\nabla^2 v \tag{1}$$

を証明しなさい．(2) (1) の恒等式と，ガウスの発散定理,

$$\int_V \nabla \cdot w dV = \int_{\partial V} w \cdot n dS \tag{2}$$

を用いて，グリーンの定理,

$$\int_V u\nabla \cdot w dV = \int_{\partial V} w \cdot n dS \tag{3}$$

$$\int_V (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u) dV = \int_{\partial V} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \tag{4}$$

を証明しなさい．

2. 未知関数 $u(x,y)$ に関する次の偏微分方程式の一般解を求めなさい．

(1) $u_x = 0$

(2) $u_x = 2x + y$

(3) $u_{xy} = 0$

(4) $au_x + bu_y = 0$ (a,b は 0 でない定数)

(5) $au_x + bu_y = 1$ (a,b は 0 でない定数)

(6) $u_{xx} - c^2 u_{yy} = 0$ (c は 0 でない定数)

(7) $u_{xxyy} = 0$

(8) $u_{xxx} = 0$

(9) $u_x - u_y = 0$

(10) $xu_x - yu_y = 0$

(11) $xu_x - yu_y = u$

(12) $u_x + uu_y = 0$

(13) $u_y - u = 0$

3. 次の 2 階の偏微分方程式を双曲型，放物型，楕円型のいずれに分類されるか，その具体的根拠とともに答えなさい．

(1) $u_{xx} + 2yu_{xy} + xu_{yy} - u_x + u = 0$

(2) $2xyu_{xy} + xu_y + yu_x = 0$

(3) $u_{xx} + u_{xy} + 5u_{yx} + u_{yy} + 2u_{yz} + u_{zz} = 0$

(以　上)