

平成 10 年 9 月 18 日 (金) 実施

平成 10 年度 機械・産業機械・電子制御機械工学科

## 数学解析 III 試験問題

(コース A: 偏微分方程式論)

( 筆記用具以外の教科書・ノート・電卓等の持ち込み不可．  
計算用紙は，二ツ折にして答案にはさんで提出すること． )

【1】  $u(x, y)$  に対して，次の偏微分方程式の一般解を求めなさい．

(a)  $u_x + uu_y = 0$     (b)  $uu_x + yu_y = x$     (c)  $u_x + 2u_y + u = xy$

【2】 ストークスの公式を利用して  $u(x, t)$  に関する以下の問に答えなさい．

(a) 次の偏微分方程式と初期条件が与えられた初期値問題の解を求めなさい．

偏微分方程式:  $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$      $(-\infty < x < \infty, 0 < t < \infty)$   
初期条件:  $u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{l}, u_t(x, 0) = 0$      $(-\infty < x < \infty)$

(ただし， $c$  は定数)

(b) 問 (a) で，偏微分方程式および初期条件の区間が，それぞれ， $(0 < x < \infty, 0 < t < \infty)$  および  $(0 < x < \infty)$  に変わり，新たに境界条件  $u(0, t) = 0$  ( $0 < t < \infty$ ) が与えられたとき，この初期値・境界値問題の解を求めなさい．

(c) 問 (a) で，偏微分方程式および初期条件の区間が，それぞれ， $(0 < x < l, 0 < t < \infty)$  および  $(0 < x < l)$  に変わり，新たに境界条件  $u(0, t) = 0, u(l, t) = 0$  ( $0 < t < \infty$ ) が与えられたとき，この初期値・境界値問題の解を求めなさい．

(d) 問 (a), (b), (c) の解を， $x - t$  平面に特徴がわかるように描き，波動方程式の解の性質について論じなさい．

【3】 次の  $u(x, t)$  に対する初期値・境界値問題について以下の問に答えなさい．

偏微分方程式:  $u_t - u_{xx} + u = 0$      $(0 < x < 1, 0 < t < \infty)$   
初期条件:  $u(x, 0) = \sin(\pi x)$      $(0 \leq x \leq 1)$   
境界条件:  $u(0, t) = 0, u(1, t) = 0$      $(0 < t < \infty)$

(a)  $u(x, t) = e^{-t}v(x, t)$  とおくことにより  $v(x, t)$  についての偏微分方程式と，初期条件，境界条件を導きなさい．

(b) この初期値・境界値問題の解  $v(x, t)$  を変数分離の方法で誘導しなさい．

【4】 以下の関数は，2次元ラプラス方程式を満足することを示しなさい．

$$u(r) = c_0 + c_1 \log \frac{1}{r}$$

ただし， $c_0, c_1$  は，定数であり， $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$  のように， $r$  は，ある点  $(\xi, \eta)$  からの距離を意味する．

(以 上)