

応用数学 I 試験問題

(コース A: 偏微分方程式論)

(筆記用具以外の教科書・ノート・電卓等の持ち込み 不可 .
計算用紙は, ニツ折にして答案にはさんで提出すること .
答えだけでなく計算途中もできるだけ示すこと .)

【1】 未知関数 $u(x)$ に対し, 一階常微分方程式

$$xu' - u^2 = 0 \quad (a < x < b)$$

が $u(a) = u(b) = 0$ という境界条件とともに与えられているとする. いま, 残差 (左辺と右辺の差) の 2 乗を積分して,

$$J[u] = \int_a^b (xu' - u^2)^2 dx$$

という汎関数をつくってみる. $J[u]$ は, 任意の u に対し非負であり, もとの微分方程式の解を代入すると 0 となるから, $J[u]$ の停留問題 (すなわち $\delta J = 0$ となる $u(x)$ を決定する問題) は, もとの微分方程式を解く問題と等価であることが予想される.

- (1) J の変分 (第 1 変分) δJ を δu の項で表しなさい.
- (2) $\delta J = 0$ の条件から, 導かれる Euler-Lagrange 方程式を求めなさい. また, その方程式ともとの常微分方程式とを比較しなさい.

(配点 20 点)

【2】 未知関数 $u(x, y)$ に関する偏微分方程式

$$xu_x + yu_y = 2u$$

に対して以下の問いに答えなさい.

- (1) 一般解を求めなさい.
- (2) 初期条件として, 直線 $x = s, y = 1$ 上で初期値 $u = s^2$ が与えられている時, この初期値問題の解を求めなさい.

(配点 20 点)

【3】 未知関数 $u(x, y)$ に関する二階偏微分方程式

$$u_{xx} + 6u_{xy} + 5u_{yy} + 3u_x - 2u_y + u = 0$$

は, 双曲型, 放物型, だ円型のいずれに分類されるかを示し, 変数変換 $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ により標準形に書き直しなさい.

(配点 20 点)

【4】 (1) 偏微分方程式の特性曲線, モンジュ錐について簡単に説明しなさい.

- (2) 二階偏微分方程式における代表的な 2 つの型, 双曲型と放物型についてその解の特徴を比較しなさい.
- (3) 無次元化と相似解の方法について簡単に説明しなさい.

(配点 20 点)

配点は目安であり修正する場合がある. (以 上)