平成 15 年度　応用理工学科機械工学コース　　　平成 15 年 11 月 27 日 (木) 13:30-15:00 実施

応用数学 I 追試験問題
(コース A: 偏微分方程式論)

(筆記用具以外の教科書・ノート・電卓等の持ち込み 不可.
計算用紙は，二ツ折にして答案にはさんで提出すること.
答えだけでなく計算途中もできるだけ示すこと.)

【1】 $u(x,y)$ に対して，次の偏微分方程式の一般解を求めなさい．　(配点 15 点)

(a) $u_x + uu_y = 0$　(b) $yuu_x + xuu_y = xy$　(c) $u_x + 3u_y = 5e^{2x+y}$

【2】 ストークスの公式を利用して $u(x,t)$ に関する以下の問に答えなさい．　(配点 25 点)

(a) 次の偏微分方程式と初期条件が与えられた初期値問題の解を求めなさい．

偏微分方程式:　$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$　$(-\infty < x < \infty,\quad 0 < t < \infty)$

初期条件:　$u(x,0) = 0,\quad u_t(x,0) = \sin\dfrac{\pi x}{l}$　$(-\infty < x < \infty)$

(ただし，c は定数)

(b) 問 (a) の解を，$x-t$ 平面に特徴がわかるように描き，波動方程式の解の性質について論じなさい．

【3】 次の $u(x,t)$ に対する初期値・境界値問題について以下の問に答えなさい．　(配点 30 点)

偏微分方程式:　$u_t - u_{xx} + u_x = 0$　$(0 < x < 1,\quad 0 < t < \infty)$

初期条件:　$u(x,0) = e^{x/2}$　$(0 \le x \le 1)$

境界条件:　$u(0,t) = 0,\quad u(1,t) = 0$　$(0 < t < \infty)$

(a) $u(x,t) = e^{x/2 - t/4} v(x,t)$ とおくことにより $v(x,t)$ についての偏微分方程式と，初期条件，境界条件を導きなさい．

(b) この初期値・境界値問題の解 $v(x,t)$ を変数分離の方法で誘導しなさい．

【4】 $u(x)$ に対し，1 階の微分方程式

$$xu' - u^2 = 0$$

から，残差 (左辺と右辺の差) の 2 乗を積分して，

$$J[u] = \int_a^b (xu' - u^2)^2\, dx$$

という汎関数をつくってみる．$J[u]$ は，任意の u に対し非負であり，もとの微分方程式の解を代入すると 0 となるから，J[u] の停留問題 (すなわち $\delta J = 0$ となる $u(x)$ を決定する問題) は，もとの微分方程式を解く問題と等価であることが予想される．実際に，未知関数 $u(x)$ に対し，得られる Euler-Lagrange 方程式ともとの常微分方程式とを比較しなさい．(ただし，a, b は定数で，$u(a) = u(b) = 0$ とする．)　(配点 30 点)

(ヒント，もとの微分方程式の他にもう一つ別の微分方程式が現れることが示せれば満点)

※配点は目安であり修正する場合がある．(以　上)