

応用数学 I 試験問題

(コース A: 偏微分方程式論)

(筆記用具以外の教科書・ノート・電卓等の持ち込み 不可 .
計算用紙は , ニツ折にして答案にはさんで提出すること .
答えだけでなく計算途中もできるだけ示すこと .)

【1】 未知関数 $u(x, y)$ に関する次の偏微分方程式の一般解を求めなさい . (配点 20 点)

(1) $u_y - u = 0$

(2) $12u_x + 4u_y - x = 0$

(3) $18u_x + 6u_y - xy = 0$ (4) $(x^2 + 1)u_x - 2xyu_y + 2xu + 1 = 0$

【2】 未知関数 $u(x, y)$ に関する偏微分方程式

$$(y^2 - u^2)u_x - xyu_y = xu$$

に対して以下の問いに答えなさい .

(配点 20 点)

(1) 一般解を求めなさい .

(2) 初期条件として , 「 $x^2 + y^2 = 1$ を満たす x, y に対して , $u(x, y) = 1$ 」が与えられている時 , この初期値問題の解を求めなさい .

【3】 未知関数 $u(x, y)$ に関する二階偏微分方程式

$$u_{xx} + xu_{xy} + yu_{yy} = 0$$

が , (i) 楕円型 , (ii) 放物型 , (iii) 双曲型となる領域を xy 面に図示しなさい .

(配点 20 点)

【4】 $u(x, t)$ に対する一次元波動方程式

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (-\infty < x < \infty; \quad t > 0)$$

について , 初期条件 $u(x, 0) = e^{-x}$, $u_t(x, 0) = \sin x$ を満足する解を求めなさい (ただし , c は正の定数) .

(配点 20 点)

【5】 $u(x)$ に対する汎関数

$$J[u] = \int_0^\pi \left\{ \frac{1}{2}(u')^2 - u \sin x \right\} dx$$

の停留問題 (すなわち $\delta J = 0$ となる $u(x)$ を決定する問題) は , 未知関数 $u(x)$ に対する常微分方程式の境界値問題

$$u'' = \sin x, \quad u(0) = u(\pi) = 0$$

を解くことによって得られることを証明しなさい .

(配点 20 点)

配点は目安であり修正する場合がある . (以 上)