

応用数学 I 試験問題

(コース A: 偏微分方程式論)

(筆記用具以外の教科書・ノート・電卓等の持ち込み 不可 .
 計算用紙は , ニツ折にして答案にはさんで提出すること .
 答えだけでなく計算途中もできるだけ示すこと .)

【1】未知関数 $u(x, y)$ に関する次の偏微分方程式の一般解を求めなさい .

(配点 30 点)

- (1) $u_x = 0$, (2) $u_{xy} = 0$, (3) $u_{xxyy} = 0$
 (4) $u_x + 2u_y = xy$, (5) $xu_x - yu_y = 0$, (6) $u_x - u = x + y$

【2】次の $u(x, t)$ に対する 2 階の偏微分方程式は「双曲型」「放物型」「楕円型」「分類不可能」のいずれに分類されるか ,
 その具体的根拠とともに答えなさい . (分類が x, y の値に依存する場合には , 場合分けすること .) (配点 20 点)

- (1) $u_{xx} + 2yu_{xy} + xu_{yy} - u_x + u = 0$
 (2) $2xyu_{xy} + xu_y + yu_x = 0$

【3】次の $u(x, t)$ に対する初期値問題について以下の問に答えなさい .

(配点 30 点)

偏微分方程式:	$u_t = \kappa u_{xx}$	$(-\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty)$
初期条件:	$u(x, 0) = 0$	$(x > 0)$
	$u(x, 0) = U_0$	$(x < 0)$

(1) この問題を ,

$$\eta = \frac{x^2}{\kappa t}, \quad u/U_0 = f(\eta) \quad (1)$$

とおくことにより解くことを考える . $f(\eta)$ が満たすべき微分方程式を求めなさい .(2) $f(\eta)$ を求めなさい . ただし ,

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt \quad (2)$$

を用いても良い .

(3) 以上の結果からこの熱伝導方程式の解 $u(x, t)$ を求めなさい . またその特徴を述べなさい .

【4】3 次元空間上で , ある点 $Q(\xi, \eta, \zeta)$ からの距離 $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$ のみを変数とするスカラー関数
 $u(r)$ について以下の問いに答えなさい . (配点 20 点)

(1)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{x - \xi}{r} \quad (3)$$

を示しなさい .

(2) 点 Q が原点 , すなわち , $(\xi, \eta, \zeta) = (0, 0, 0)$ のとき ,

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) \quad (4)$$

を示しなさい .

配点は目安であり修正する場合がある . (以 上)