

応用数学 I 試験問題

(コース A: 偏微分方程式論)

(筆記用具以外の教科書・ノート・電卓等の持ち込み 不可.
計算用紙は、二ツ折にして答案にはさんで提出すること.)

【1】 $u(x, y)$ に対する偏微分方程式 (a)~(c) に対して以下の問に答えなさい.

$$(a) u_x + e^u u_y = 0, \quad (b) y u u_x + x u u_y = xy, \quad (c) u_x + 2u_y + u = xy$$

(1) (a)~(c) それぞれに対し、その性質を表す語を次の選択 (ア)~(ク) から選び記号で答えなさい (それぞれ複数選択回答しなければならないが、過不足あれば減点する). (配点 9 点)

(ア) 1 階, (イ) 2 階, (ウ) 線形, (エ) 準線形, (オ) 非線形, (カ) 半線形, (キ) 同次, (ク) 非同次

(2) (a)~(c) の一般解を求めなさい. (配点 21 点)

【2】 次の $u(x, t)$ に対する初期値・境界値問題について以下の問に答えなさい.

偏微分方程式:	$u_t - u_{xx} + u = 0$	$(0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty)$
初期条件:	$u(x, 0) = \sin(\pi x)$	$(0 \leq x \leq 1)$
境界条件:	$u(0, t) = u(1, t) = 0$	$(0 < t < \infty)$

(1) $u(x, t) = e^{-t}v(x, t)$ とおくことにより、 $v(x, t)$ についての偏微分方程式、初期条件、境界条件を導きなさい. (配点 10 点)

(2) この初期値・境界値問題の解 $v(x, t)$ を変数分離の方法で誘導しなさい. (配点 20 点)

【3】 真空中のある座標系 O-xyz で、原点におかれた点電荷 q のまわりの電位は基本解

$$u(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \epsilon_0 \text{ は定数})$$

で与えられる. このことを利用して次の問に答えなさい.

(1) $u(r)$ は、3 次元ラプラスの方程式,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = 0$$

を満足することを示しなさい. (配点 10 点)

(2) z 軸に沿う線上に電荷が一様に分布している場合、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = z_0$ (定数) の電位 $v(r)$ を求めなさい. ただし、単位長さあたりの電荷の大きさを γ とする. (配点 20 点)

(3) (2) で求めた $v(r)$ が 2 次元ラプラスの方程式,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = 0$$

を満足することを示しなさい. (配点 10 点)

【4】 (a)~(d) から一つだけ選択して簡潔に説明しなさい. (配点 20 点)

(a) 随伴演算子とグリーン関数, (b) 特性曲線とモンジュ錐, (c) 重みつき残差法, (d) コーシー問題とその例

※配点は目安であり修正する場合がある. (以 上)