応用数学I(A.偏微分方程式)

中谷 彰宏

演習 0(4/13/2001)

1. 偏微分方程式に関連する「偏微分方程式の型」,「グリーン関数」,「フーリェ変換」,「ラプラス変換」,「変分法」,「数式処理」について知っていることを自由に述べなさい.

演習 1(4/20/2001)

1. 次の 2 変数関数 $f(x, y)$ について以下の問いに答えなさい.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}, & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{1}$$

(a) 以下の式が成立することを示しなさい.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} = 0 \tag{2}$$

(b) 次の 2 階偏微分を評価しなさい.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \tag{3}$$

2. 次の極限を計算しなさい.

(a)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2+y^2} \tag{4}$$

(b)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[xy \log(x^2+y^2)\right] \tag{5}$$

3. コンピューターを使って,1. の f, f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, f_{yx}, f_{xy} の 3D グラフを描いてみよう.

演習 2(5/18/2001)

1. J の第一変分 δJ を定義に基づき計算しなさい.

(a)

$$J = \int_0^1 \{u(x)\}^3 dx \tag{6}$$

(b)

$$J = \int_0^1 \sin u(x) dx \tag{7}$$

(c)

$$J = \int_0^1 \sin u(x) dx \tag{8}$$

(d)

$$J = \int_0^1 \{u'(x)\}^3 dx \tag{9}$$

(e)

$$J = \int_0^1 \sin u'(x) dx \tag{10}$$

2.

$$J[u] = \int_0^\pi \{\frac{1}{2}(u')^2 - u \sin x\} dx \to min \tag{11}$$

すなわち，$\delta J = 0$ は,

$$u'' = \sin x, \quad u(0) = 0, \quad u(\pi) = 0 \tag{12}$$

を解く問題と等価であることを示しなさい.

演習 3(6/1/2001)

1. 一般解を求めなさい.

(a)

$$yuu_x + xuu_y = xy \tag{13}$$

(b)

$$u_x + 3u_y = 5e^{2x+y} \tag{14}$$

(c)

$$u_x + 2u_y + u = xy \tag{15}$$

演習 4(7/6/2001)

1. 2 変数の未知関数 u(x,t) に関して,

$$\begin{array}{lll} \text{P.D.E.} & u_t - u_{xx} + u = 0 & (0 < x < 1, 0 < t < \infty) \\ \text{I.C.} & u(x,0) = \sin(\pi x) & (0 \leq x \leq 1) \\ \text{B.C.} & u(0,t) = 0, u(1,t) = 0 & (0 < t < \infty) \end{array} \tag{16}$$

(a) $u(x,t) = e^{-t}v(x,t)$ と置くことにより，$v(x,t)$ についての P.D.E, I.C., B.C. を導きなさい.

(b) $v(x,t)$ を変数分離の方法で解きなさい.