

1 1 階準線形偏微分方程式の完全解

ここでは, 2 つの独立変数 x, y を持つ関数 $u(x, y)$ についての 1 階偏微分方程式を考える .

1 階準線形方程式は ,

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) \quad (1)$$

の特性曲線 C :

$$\frac{dx}{d\xi} = a(x, y, u), \quad \frac{dy}{d\xi} = b(x, y, u), \quad \frac{du}{d\xi} = c(x, y, u) \quad (2)$$

は ,

$$\frac{dx}{a(x, y, u)} = \frac{dy}{b(x, y, u)} = \frac{du}{c(x, y, u)} = (d\xi) \quad (3)$$

と書き換えることができる . この 3 つの連立方程式の 2 つの独立な積分 (特性曲線に沿って定数をとる (x, y, u) を変数とする関数のこと) ,

$$\phi(x, y, u) = \alpha, \quad \psi(x, y, u) = \beta \quad (\alpha \text{ と } \beta \text{ は定数}) \quad (4)$$

が得られたとする . このことは , 式 (1) の任意の解を代入したとき , ϕ, ψ は定数となることを意味している . そのような場合 , x, y, u の 3 変数に対し 2 つの関係式が成り立っているため , どれか 2 つについて解けることになる .

$\phi(x, y, u) = \alpha$ と $\psi(x, y, u) = \beta$ は , とともに (x, y, u) 空間上の曲面を表しており , これらの交線が式 (1) の解 , すなわち , ξ をパラメータとする特性曲線である .

ある任意関数 F を考え ,

$$F(\alpha, \beta) = 0 \quad (5)$$

という関係を制限として科すと, α と β のどちらかのパラメータだけが自由に動けることになる. 式 (4), (5) を使って, α, β を消去すると, 特性曲線の 1 つのパラメータを含む族, すなわち, 式 (1) の解曲面が得られる. これを一般解という.

[例 1] 未知関数 $u(x, y)$ に関して,

$$au_x + bu_y = 1 \quad (a, b \text{ は定数}) \quad (6)$$

の一般解.

[例 2] 未知関数 $u(x, y)$ に関して

$$xu_x - yu_y = u \quad (7)$$

[例 3] 未知関数 $u(t, x)$ に関して

$$u_t + uu_x = 0 \quad (8)$$

の一般解.

[例 4] 未知関数 $u(x, y)$ に関して

$$yuu_x + xuu_y = xy \quad (9)$$

の一般解.

[例 5] 未知関数 $u(x, y)$ に関して

$$u_x + 3u_y = 5e^{2x+y} \quad (10)$$

の一般解.

[例 6] 未知関数 $u(x, y)$ に関して

$$u_x + 2u_y + u = xy \quad (11)$$

の一般解 .

[例 7] 未知関数 $u(x, y)$ に関して

$$xu_x + 2u_y + u = xy \quad (12)$$

の一般解 .