May 17, 2002 ©AN

1　1階偏微分方程式

ここでは，2つの独立変数 x, y を持つ関数 $u(x, y)$ についての1階偏微分方程式を考える．

1階準線形方程式は，

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) \tag{1}$$

と書くことができる．u_x と u_y については線形であり，それぞれの係数には u_x, u_y は含まれない.「注意」u は (いわば0階微分のようなものであり) 含まれていてもよい．$u = u(x, y)$ は，(x, y, u) 空間の曲面を形作る．$u = u(x, y)$ が，(x, y, u) 空間に形成する曲面を解曲面という．$\phi(x, y, u) = u(x, y) - u$ と書くと，解曲面の方程式は，$\phi(x, y, u) = 0$ と書くことができる．ここで，

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial u}\right) = (u_x, u_y, -1) \tag{2}$$

は，解曲面上の点 (x, y, u) における解曲面の法線ベクトルである．($\nabla\phi$ は，$\phi =$ 一定 の曲面と直交する．いまは，$\phi = 0$)

式(1)の係数を成分とするベクトル (a, b, c) を考えると，式(1)は，ベクトル (a, b, c) とベクトル $\nabla\phi = (u_x, u_y, -1)$ の内積が零であることを示している．すなわち，両者は直交する．以上のことから，(a, b, c) は解曲面の接平面上にある．

ここで，ξ をパラメーターとする曲線 C：

$$\frac{dx}{d\xi} = a(x, y, u), \quad \frac{dy}{d\xi} = b(x, y, u), \quad \frac{dz}{d\xi} = c(x, y, u) \tag{3}$$

を考える．イメージとしては，ベクトル場 $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (a, b, c)\Delta\xi$. この曲線 C は，点 (x, y, u) でベクトル (a, b, c) に接している．この曲線 C のことを式(1)の特性曲線という．a, b, c が C^1 関数であれば特性曲線が1つ，しかもただ1つ存在する (if and only if，必要十分という意味に解釈できる)．特性曲線の族 (family) が1つの曲面を形成するとき，この曲面は解曲面である．

2 コーシー問題

η をパラメーターとする，ある与えられた曲線 L ：$x = x(\eta), y = y(\eta), z = z(\eta)$ を通る式 (1) の解を求める問題を考える．これを式 (1) の初期値問題 (initial value problem)，あるいは，コーシー問題 ((Cauchy problem) と呼ぶ．L 上の各点 (η を決めれば一意に決まる) を通る特性曲線を考えるとその族としての解曲面 S ：$x = x(\xi,\eta), y = y(\xi,\eta), u = u(\xi,\eta)$ が作れる．これは，連立常微分方程式

$$\frac{dx}{d\xi} = a(x, y, u), \quad \frac{dy}{d\xi} = b(x, y, u), \quad \frac{du}{d\xi} = c(x, y, u) \tag{4}$$

を初期条件

$$x(0, \eta) = x(\eta), \quad y(0, \eta) = y(\eta), \quad u(0, \eta) = u(\eta) \tag{5}$$

の下に解けば良い．この問題が解ければ，ヤコビ行列式 (Jacobian)

$$J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \neq 0 \tag{6}$$

ならば，逆関係，$x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta)$ の

$$\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y) \tag{7}$$

が一意的に存在するので，これを $u = u(\xi, \eta)$ に代入することにより，解が得られる．$J =\neq 0$ は，$J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi = a y_\eta - b x_\eta \neq 0$ であるから，(x_η, y_η) と，(a, b) は平行ではないことを示している．言い替えると，L の (x, y) 平面への射影が特性曲線の (x, y) 平面への射影と一致したり接したりしないことを意味する．