

1 偏微分方程式の基礎

[例 1]

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

を解いて, $u(x, y) = 0$ を求める .

?(a)

[例 2]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2)$$

を解いて, $u(x, y) = 0$ を求める .

?(a)

! 一般に以下のことが言える .

- 常微分方程式の一般解 ... 階数に等しい個数の任意 ? を含む .
- 偏微分方程式の一般解 ... 階数に等しい個数の任意 ? を含む .

[例 3] 2 次元ラプラス方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3)$$

の解の例:

$$\begin{array}{lll} (1) u = x^2 - y^2 & (2) u = 2xy & (3) u = e^\alpha x \cos \alpha y \\ (4) u = e^\alpha x \sin \alpha y & (5) u = x/(x^2 + y^2) & (6) u = -y/(x^2 + y^2) \end{array}$$

!! 補足

1. 偏微分方程式の解は多様である。これは、支配方程式は、その多くがシンプルな形で表現されるにもかかわらず、多様な現実の現象を記述することからも直観的に理解できる。目的とする関数形は、 $\boxed{?}$ (initial condition) や $\boxed{?}$ (boundary condition) などの、 $\boxed{?}$ (subsidiary condition) を規定することにより一意に決まる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{初期値問題 (initial value problem)} \\ \text{境界値問題 (boundary value problem)} \end{array} \right\} \text{混合問題 (mixed value problem)}$$

2. 応用上は考えている問題に対応した変分原理から自動的に付帯条件が生成される。

$$\left. \begin{array}{l} \text{支配方程式 (governing equation)} \\ \text{境界条件 (boundary conditions)} \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \text{変分原理 (variational principle)}$$

3. 未知関数が複数ある場合は、未知関数の個数と同じ数の偏微分方程式からなる連立偏微分方程式を考える必要がある。

密度一定の変形体の静力学問題：

未知関数は、	$\Longleftrightarrow$	支配方程式は、	
$u_i(x, y, z)$ 3 個		$\sigma_{ij,i} + F_j = 0$ 3 個	力の釣合い
$\sigma_{ij}(x, y, z)$ 9 個		$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ 3 個	角運動量保存
$\varepsilon_{ij}(x, y, z)$ 9 個		$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ 6 個	ひずみの定義
		$\boxed{?}$ 9 個	$\boxed{?}$
21 個		21 個	

2 理工学に現われる偏微分方程式

!! 偏微分方程式の役割

1. (t, x) を変数とする連続体の場を記述する方程式としての役割を持つ．
2. 多くは線形，準線形モデルとして近似できる．
3. 大雑把に言って，保存則と構成式からなる，または，保存則に構成式を代入し，未知関数の数を減らしたたものと考えて良い．

[例] 電磁場の方程式 (マクスウェルの方程式)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{ファラデーの電磁誘導} \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{アンペールの法則} \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \text{電荷に対するクーロンの法則} \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{磁場に対するクーロンの法則} \quad (7)$$

ここで， $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}, \rho, \mathbf{J}$ は，それぞれ，電場の強さ，電束密度，磁場の強さ，磁束密度，電荷密度，電流密度を表している．これを補う構成式に相当するのは，

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (8)$$

であり， ϵ, μ, σ は，それぞれ，誘電率，透磁率，電気伝導率である．

$\rho = 0$ に対して，これらの式から，電場 $\mathbf{E}$ についての偏微分方程式を導くと，

$?(a)$

最終的に，

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{\sigma}{\epsilon} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c^2 \nabla^2 \mathbf{E}, \quad \text{ただし} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (9)$$

を得る．一方，磁場 $\mathbf{H}$ についての偏微分方程式を導くと，

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \frac{\sigma}{\epsilon} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = c^2 \nabla^2 \mathbf{H}, \quad \text{ただし} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (10)$$

電場と磁場の変動が，それぞれ同じ形の支配方程式によって記述されることがわかる．電磁波の伝ばを表す．

- $\sigma = 0, c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ とすると, 真空中の電磁波の伝ばを記述する波動方程式となる.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \mathbf{E} \quad (11)$$

- $\mathbf{E}$ の時間変化が緩やかで左辺第 1 項が無視できるとき,

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\epsilon}{\sigma} c^2 \nabla^2 \mathbf{E} \quad \text{波動方程式} \quad (12)$$

真空中の電磁波の伝ばを記述する波動方程式となる.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \mathbf{E} \quad \text{拡散方程式} \quad (13)$$

- 真空中の静電場では, 定常, すなわち, 時間に関する偏微分の項がすべて零となる. $\rho \neq 0$ の場合について, $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ と置くと,

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{ポアソン方程式} \quad (14)$$

$\rho = 0$ の場合は,

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{ラプラス方程式} \quad (15)$$

となる.

マクスウェルの方程式は, 形式的にはシンプルである. しかしながら, いわば相対論の基礎となったものであり, 現象を統一的に表現できる能力を持っている, そして, 条件によって異なる多様な解が現われる.

[例] バーガース方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_x^{x_1} \rho(x, t) dx = \int_x^{x_1} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = q(x, t) - q(x_1, t) \quad (16)$$

$$q(x_1) = q(x + dx) = q(x) + \frac{\partial q}{\partial x} dx = q(x) + q_x(x) dx \quad (17)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx = q(x) - q(x + dx) = -q_x(x) dx, \quad \therefore \rho_t + q_x = 0 (\text{質量保存則}) \quad (18)$$

q と ρ の関係を $q = Q(\rho)$ と置く (一種の構成式によるモデル化). 構成式は本質的には現象論的経験則による, $q = Q(\rho) - v\rho_x$ と置いて得られる次の方程式は, バーガース方程式と呼ばれる.

$$\rho_t + Q'(\rho)\rho_x = v\rho_{xx} \quad (19)$$